Введение

Методические указания предназначены для практических занятий и самостоятельной работы студентов.

Методические указания по теме «Комплексные числа» составлены в соответствии с типовой программой по дисциплине, содержат теоретические обоснования, подробное решение некоторых задач и практические задания для проверки подготовленности студентов ЕТК специальностей: 230101, 210306, 200401, 151001 к выполнению контрольной работы, а также для проведения промежуточного контроля знаний студентов.

Цель данных методических указаний заключается в оказании помощи студентам по развитию умения применять теоретические знания правил по действию с комплексными числами различной формы представления при решении задач.

Приведенные в методических указаниях задания могут быть использованы как для аудиторной, так и для внеаудиторной самостоятельной работы студентов.

1. Общие положения

Термин «комплексное» переводится как составленное. Комплексным числом называется выражение вида $c = a + bj$, где $a, b-$ действительные числа; $j-$ символ, который удовлетворяет условию $j = \sqrt{-1}$ и называется мнимой единицей. Число a называется действительной частью комплексного числа $c = a + bj$ и обозначается символом $\operatorname{Re} c$, а число b называется мнимой частью и обозначается символом $\operatorname{Im} c$.

Таким образом $\operatorname{Re} c = a$, $\operatorname{Im} c = b$.

Если $a = \operatorname{Re} c = 0$, то $c = bj-$ чисто мнимое комплексное число.

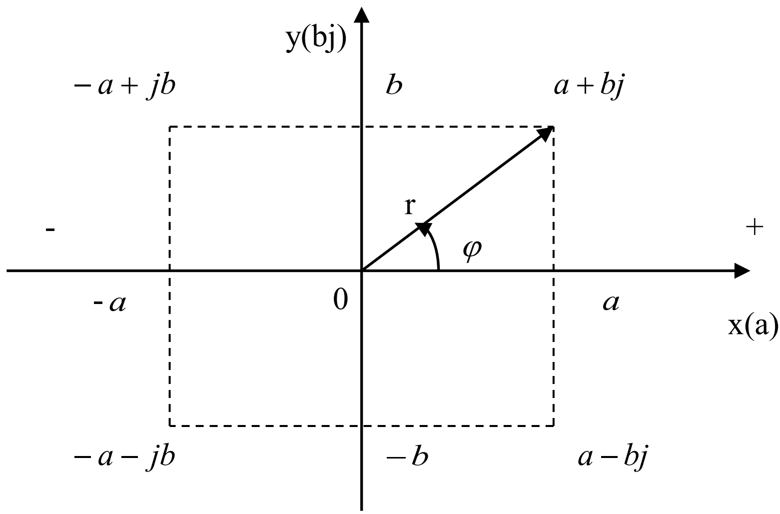
Два комплексных числа $c_1 = a_1 + b_1 j$ и $c_2 = a_2 + b_2 j$ называются равными, если равны их действительные и мнимые части, т.е. $c_1 = c_2 \Leftrightarrow \{a_1 = a_2 , \quad b_1 = b_2\}$.

Замечание: на множестве комплексных чисел нет отношения порядка, то есть между комплексными числами нельзя поставить знаки «больше» или «меньше».

Комплексные числа появились в 16 веке, однако полное признание завоевали в начале 19 века, когда Карл Фридрих Гаусс (1777-1855 гг. немецкий математик) выяснил их геометрический смысл.

2. Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Введем на плоскости прямоугольную систему координат XOY и поставим в соответствие (оно будет взаимнооднозначным) каждому числу $c = a + bj$ точку плоскости с координатами (a, b). Плоскость XOY называется в этом случае комплексной плоскостью.



Комплексные числа изображаются либо точкой, либо её радиус – вектором (r). Ось OX – действительная, ось OY–

мнимая. $\varphi -$угол между положительным направлением действительной оси и радиус- вектором (r), изображающим данное комплексное число.

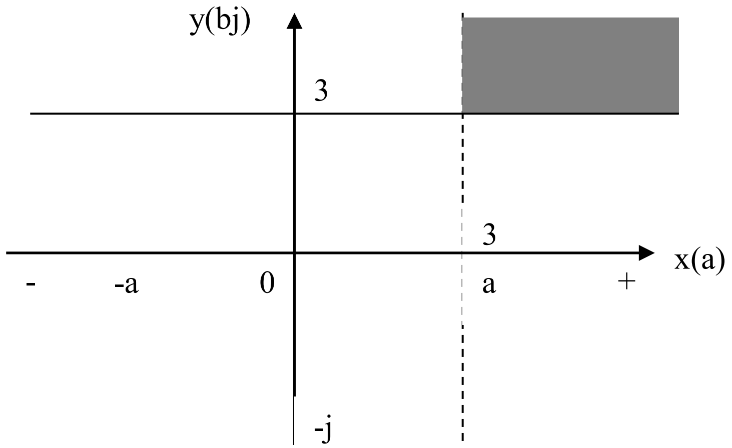
Пример 1.

Изобразить графически множество точек плоскости, для которых выполняются следующие условия.

1) $\begin{cases} \mathrm{Re}(c-1) > 2, \\ \mathrm{Im}\, c \le 3. \end{cases}$, где с – комплексное число.

Пусть $c = x + yj$, тогда получим

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(x+yj-1) > 2, \\ \mathrm{Im}(x+yj) \le 3; \end{cases} \begin{cases} x-1 > 2, \\ y \le 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 3, \\ y \le 3. \end{cases}$$



Решение каждого из неравенств последней системы изображаем на комплексной плоскости. Пересечение решений будет являться решением данного задания.

2) $1 < \left| c - 2 - 3j \right| \le 2. \quad c = x + yj;$

$$1 < \left| x + yj - 2 - 3j \right| \le 2,$$

$$1 < \left| (x-2) + (y-3)j \right| \le 2.$$

Под знаком модуля записано комплексное число. По формуле определения модуля комплексного числа получим:

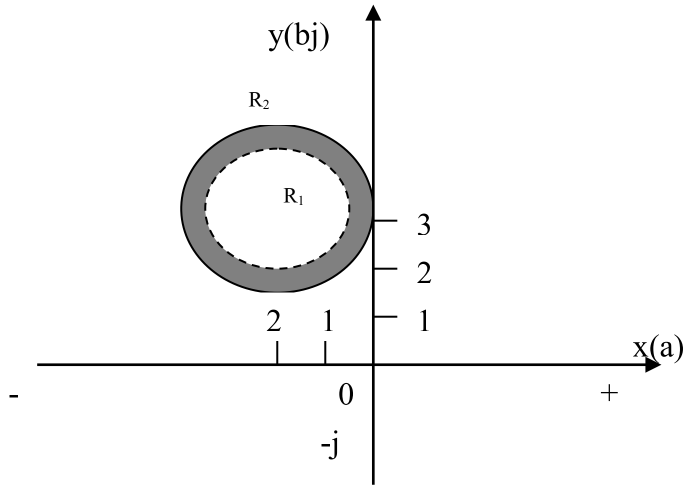
$$\left|(x-2)+(y-3)j\right| = \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}\ ,\qquad \text{т.е.}$$

$1<\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}\le 2.$

Возведём все части двойного неравенства в квадрат:

$1<\left|(x-2)^2+(y-3)^2\right|\le 4.$

Решением данного двойного неравенства будет кольцо между двумя концетрическими окружностями с центром в точке (-2; 3) и радиусами R_1=1; R_2=2.



Задания для самостоятельной работы.

№1. Изобразить на плоскости следующие комплексные числа и отметить угол, который они образуют с положительным направлением действительной оси.

1) -1;	6) $3+j$;
2) j;	7) $-6+2j$;
3) $-3j$;	8) $2+2j$;
4) $2-3j$;	9) $-2+2j$;
5) $-4-2j$;	10) $-2-2j$.

№2. Изобразить графически множество точек плоскости, для которых выполняются следующие условия:

1) $\operatorname{Im} c = 2$

2) $\operatorname{Re} c = -1$

3) $\operatorname{Im}(c + j) = 0$

4) $\operatorname{Re}(c - 3) \geq 3$

5) $\operatorname{Im} c \geq 0$

6) $\begin{cases} \operatorname{Re}(c - 2) \geq 3, \\ \operatorname{Re}(jc) \leq 4. \end{cases}$

7) $\begin{cases} \operatorname{Im} c > 3, \\ \operatorname{Re} c < 2. \end{cases}$

8) $|c| = 1$

9) $|c| \leq 5$

10) $1 \leq |c| < 2$

11) $|c - 2 - j| = 3$

12) $|c - 3 + 2j| \leq 2$

13) $\begin{cases} \operatorname{Im}(1 - c) \geq 4, \\ \operatorname{Re}(c + 4) < 4. \end{cases}$

14) $\operatorname{Re}(j(c - 3 + j)) < 3$

15) $\begin{cases} \operatorname{Re}(1 - c) \leq 3, \\ \operatorname{Re}(jc - 4j + 2) < -1. \end{cases}$

16) $\begin{cases} \operatorname{Im}(2j - c) < -4, \\ \operatorname{Im}(c - 3j) \geq 2. \end{cases}$

17) $\operatorname{Re}(jc) = 1$

18) $1 \leq |3 - c - 2j| < 2$

19) $\begin{cases} \operatorname{Re}(1 - \tilde{n} + 3j) < -1, \\ \operatorname{Im}(c - 5j) \geq 2. \end{cases}$

20) $\begin{cases} \operatorname{Im}(j - c) > 3, \\ \operatorname{Im}(2j - c) < -1. \end{cases}$

21) $\begin{cases} \operatorname{Re}(c - 3) > 4, \\ \operatorname{Re}(2 - c) < 3. \end{cases}$

22) $\begin{cases} \operatorname{Re}(c - 2j + 3) \geq 3, \\ \operatorname{Im}(2j - c) < -1. \end{cases}$

23) $|2j - c + 4| > 2$

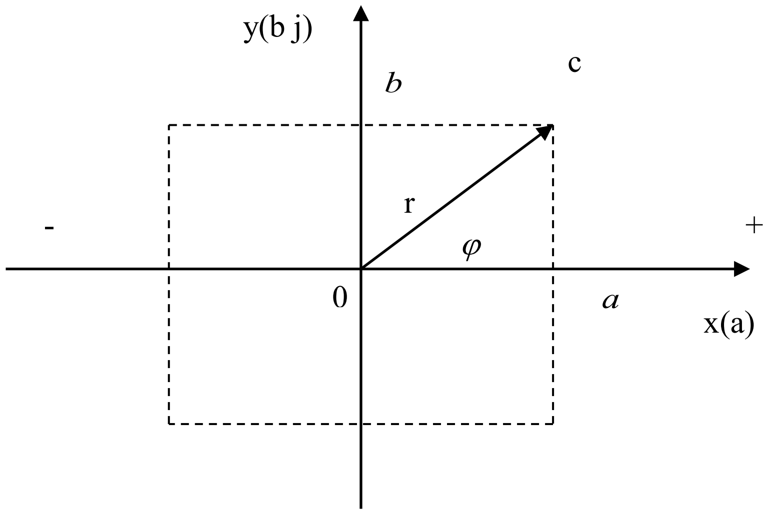
24) $\operatorname{Im}(j(c - 5j + 2)) \geq -3$

3. Формы записи комплексных чисел

Запись комплексного числа в виде $c = a + bj$ называется *алгебраической формой* комплексного числа.

Помимо алгебраической формы комплексного числа существуют ещё две, которые являются наиболее используемыми, в частности, в электротехнике при расчёте электрических цепей.

Запись комплексного числа $c \neq 0$ в виде $c = |c|(\cos\varphi + j\sin\varphi)$ называется *тригонометрической формой* комплексного числа, где |c| - модуль комплексного числа c, φ - его аргумент.



$\mathrm{tg}\,\varphi = \dfrac{b}{a}$, где $a = \mathrm{Re}\,c$, $b = \mathrm{Im}\,c$, $(0 \le \varphi < 360^0)$.

Запись комплексного числа $c \neq 0$ в виде $c = re^{j\varphi}$ называется *показательной формой* комплексного числа, где r – радиус $|r|$ комплексного числа c, φ - аргумент комплексного числа c. В соответствии с формулой Эйлера

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi.$$

В табл.1 отражено в какой форме комплексного числа какие арифметические действия удобнее выполнять

Таблица 1

Форма комплексного числа	Предпочтительнее арифметические действия
$c = a + bj$ – алгебраическая	Сложение, вычитание, умножение, деление.
$c = \|c\|(\cos\varphi + j\sin\varphi)$ – тригонометрическая	Умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня.
c=|c| $e^{j\varphi}$ - показательная	Умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня.

4. Действия с комплексными числами в алгебраической форме

4.1 Комплексное число – c называется противоположным комплексному числу $c = a + bj$, если оно имеет вид $-c = -a - bj$, то есть противоположные комплексные числа отличаются знаком и при действительной, и при мнимой частях.

Комплексное число $\bar{c}$ называется сопряженным комплексному числу $c = a + bj$, если оно имеет вид $\bar{c} = a - bj$, то есть сопряженные комплексные числа отличаются знаком только при мнимой части.

Модулем комплексного числа $c = a + bj$ называется неотрицательное действительное число вида |c|=$\sqrt{a^2 + b^2}$.

Пример 2. Для данного комплексного числа c указать его действительную и мнимые части; найти его модуль, а также противоположное и сопряженное ему числа.

1) $c = 2 + 3j$; $\mathrm{Re}\,c = 2$; $\mathrm{Im}\,c = 3$

$|c|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$, $-c=-3-2j$, $\bar{c}=3-2j$.

2) $c=6j$; $\operatorname{Re}c=0$; $\operatorname{Im}c=6$

$|c|=6$, $-c=-6j$, $\bar{c}=-6j$.

3) $c=-3$; $\operatorname{Re}c=-3$; $\operatorname{Im}c=0$

$|c|=\sqrt{(-3)^2}=3, -c=3$, $\bar{c}=-3$.

4.2 Пусть даны два комплексных числа $c_1=a_1+b_1j$ и $c_2=a_2+b_2j$.

Суммой (разностью) двух комплексных чисел c_1 и c_2 называется комплексное число вида $c=c_1\pm c_2=(a_1\pm a_2)+j(b_1\pm b_2)$.

Пример 3. $c_1=2+3j$; $c_2=4-5j$. Найти сумму и разность c_1 и c_2.

$$c_1+c_2=(2+3j)+(4-5j)=2+3j+4-5j=6-2j;$$
$$c_1-c_2=(2+3j)-(4-5j)=2+3j-4+5j=-2+8j.$$

4.3 Произведением двух комплексных чисел c_1 и c_2 называется комплексное число, получающееся следующим образом:

$$c=c_1\cdot c_2=(a_1+b_1j)\cdot(a_2+b_2j)=a_1\cdot a_2+b_1\cdot j\cdot a_2+a_1b_2+$$
$$+b_1\cdot j\cdot b_2\cdot j=a_1\cdot a_2+a_2\cdot b_1\cdot j+b_1\cdot b_2\cdot j^2=a_1\cdot a_2+a_2+b_1\cdot j+$$
$$+a_1\cdot b_2\cdot j+b_1\cdot b_2\cdot(-1)=(a_1\cdot a_2-b_1\cdot b_2)+j\cdot(a_2\cdot b_1+a_1\cdot b_2).$$

При введении данного определения был использован тот факт, что $j^2=-1$, так как в качестве мнимой единицы j мы рассматриваем $\sqrt{-1}$, то есть j=$\sqrt{-1}$, следовательно $j^2=-1$.

Пример 4. Вычислить произведение c_1 и c_2, $c_1=2+3j$; $c_2=-1-j$.

$$c = c_1 \cdot c_2 = (2+3j)\cdot(-1-j) = -2-3j-2j-3j^2 =$$
$$= -2-5j-3(-1) = -2-5j+3 = 1-5j.$$

4.4 Частным от деления двух комплексных с$_1$ и с$_2$ называется комплексное число c, которое получается следующим образом

$$\tilde{n} = \frac{\tilde{n}_1}{\tilde{n}_2} = \frac{c_1 \cdot \bar{c}_2}{c_2 \cdot \bar{c}_2} = \frac{a_1 + b_1 j}{a_2 + b_2 j} = \frac{(a_1 + b_1 j)\cdot(a_2 - b_2 j)}{(a_2 + b_2 j)\cdot(a_2 - b_2 j)} =$$

$$= \frac{a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot b_1 j - a_1 \cdot b_2 j + b_1 \cdot b_2}{a_2{}^2 + b_2{}^2} =$$

$$= \frac{(a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2) + j(a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2)}{a_2{}^2 + b_2{}^2} =$$

$$= \frac{a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2}{a_2{}^2 + b_2{}^2} + \frac{a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2}{a_2{}^2 + b_2{}^2} j \, .$$

Отметим:

1) комплексные числа $a_2 + b_2 j$ и $a_2 - b_2 j$ являются сопряженными, то есть $\bar{c}_2 = a_2 - b_2 j$;

2) произведение $(a_2 + b_2 j)\cdot(a_2 - b_2 j)$ преобразуется по формуле сокращенного умножения: разность квадратов, учитывая, что $j^2 = -1$.

Пример 5. Найти частное с$_1$ и с$_2$, $c_1 = 2 - j$; $\quad c_2 = 4 + 3j$.

$$c = \frac{c_1}{c_2} = \frac{2-j}{4+3j} = \frac{(2-j)\cdot(4-3j)}{(4+3j)\cdot(4-3j)} = \frac{8-4j-6j+3j^2}{16-9j^2} =$$

$$= \frac{8-10j-3}{25} = \frac{5-10j}{25} = \frac{5}{25} - \frac{10}{25} j = \frac{1}{5} - \frac{2}{5} j.$$

Задания для самостоятельной работы.

№3. Для данного комплексного числа c указать его действительную и мнимую части; найти модуль, а также противоположные и сопряженные ему числа:

1) $c=-2-j$; 2) $c=-j$; 3) $c=5j$; 4) $c=-15$;

5) $c=4+2j$; 6) $c=1+j$.

№4. Найти сумму, разность, произведение и частное комплексных чисел c_1 и c_2.

1) $c_1=3-2j$; $c_2=5+3j$;

2) $c_1=1+2j$; $c_2=-3-j$;

3) $c_1=2-j$; $c_2=j$;

4) $c_1=4-j$; $c_2=1+2j$;

5) $c_1=6j-3$; $c_2=-5j+2$;

6) $c_1=-3-2j$; $c_2=-8j$;

7) $c_1=3+2j$; $c_2=-9-j$;

8) $c_1=-7+j$; $c_2=-5j$;

9) $c_1=-7-3j$; $c_2=2+j$.

№5. Записать действительную и мнимую части комплексных чисел.

1) $c=x+2yj-4y-xj$,

2) $c=-3x+4yj-2xj-y$,

3) $c=2-xj-yj-x$,

4) $c=t+mj-2m-4tj$.

№6. Найти сумму, произведение, разность и частное комплексных чисел c_1 и c_2. Изобразить геометрически результаты операций.

1) $c_1=1-2j$, $c_2=-1-2j$.

$c_1=-3$, $c_2=4j$.

5. Степени мнимой единицы

При решении некоторых заданий требуется вычислять степени мнимой единицы. Рассмотрим правило, которое при этом используется:

$$j^m = j^{4n+r} = j^r = \begin{Bmatrix} 1, \text{åñëè } r = 0 \\ j, \text{åñëè } r = 1 \\ -1, \text{åñëè } r = 2 \\ -r, \text{åñëè } r = 3 \end{Bmatrix}$$

$j^{-m} = \dfrac{1}{j^m} = \dfrac{1}{j^r}$, $\text{ãäå}\, m, n, r \in N$, r – остаток от деления m на n.

Равенство степеней $j^{4n+r} = j^r$ доказать несложно, поэтому попытайтесь это сделать самостоятельно.

Проиллюстрируем использование этого правила на примере:

Пример 6. Вычислить:

1) $j^{10} = j^{4*2+2} = j^2 = -1$.

2) $j^{67} = j^{4*16+3} = j^3 = -j$.

3) $j^{-67} = \dfrac{1}{j^{67}} = \dfrac{1}{-j} = \dfrac{1 \cdot j}{-j \cdot j} = \dfrac{j}{-j^2} = \dfrac{j}{-(-1)} = j$.

Задания для самостоятельной работы

Вычислить:

№ 7. Вычислить:

1) j^{32}, 2) j^7, 3) j^{65}, 4) j^{125}, 5) j^8, 6) j^{219}, 7) j^{193}, 8) j^{26}, 9) j^{-9}, 10) j^{-172}, 11) j^{-1015}, 12) j^{-503}, 13) j^{345}, 14) j^{-100}, 15) j^{-1021}, 16) j^{-246}, 17) j^{183}, 18) j^{31}, 19) j^{-63}, 20) j^{232}.

6. Решение уравнений

Пример 7. Решить уравнение.

$(1+j)x+(2+j)y=5+3j$.

Раскроем скобки и приведём подобные слагаемые:

$x+xj+2y+yj=5+3j$, $(x+2y)+j(x+y)=5+3j$.

Выражения, стоящие слева и справа в данном уравнении, являются комплексными числами. Пусть

$c_1=(x+2y)+j(x+y)$, $\quad c_2=5+3j$.

$\operatorname{Re}c_1=x+2y$, $\quad \operatorname{Re}c_2=5$,

$\operatorname{Im}c_1=x+y$, $\quad \operatorname{Im}c_2=3$.

$$c_1=c_2 \Rightarrow \begin{cases}\operatorname{Re}\mathrm{c}_1=\operatorname{Re}c_2,\\ \operatorname{Im}c_1=\operatorname{Im}c_2,\end{cases}$$

по определению равных комплексных чисел.

Следовательно, данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}x+2y=5,\\ x+y=3.\end{cases}$$

Решая систему получим:

$$\begin{cases}x=1,\\ y=2.\end{cases}$$

Ответ: (1; 2).

Задания для самостоятельной работы.

№8. $(2-j)x+(5+6j)y=1-3j$. Ответ: $\left(\frac{21}{17};\frac{5}{17}\right)$.

№9. $(1-j)x(1+2j)y=2j+1$. Ответ: (0; -1).

№10. $(2j-1)x+(1+j)y=4j-3$. Ответ: $\left(\frac{7}{3};\frac{2}{3}\right)$.

№11. $2x+(1+j)(x+y)=7+j$. Ответ: (3; -2).

№12. $(1+j)x-(3j-1)y=3-j$. Ответ: (2; 1).

№13. $(3-4j)x+(3j+2)y=5+2j$. Ответ: $\left(\dfrac{11}{17};\dfrac{26}{17}\right)$.

№14. $(4-j)x+(1+2j)y=2-j$. Ответ: $\left(\dfrac{5}{9};\dfrac{2}{9}\right)$.

№15. $3xj-(6j-1)y=1+2j$. Ответ: $\left(\dfrac{8}{3};1\right)$.

Пример 8.

$$(1-j)^{20}=((1-j)^2)^{10}=(1-2j-1)^{10}=(-2j)^{10}=2^{10}\cdot j=$$
$$=2^{10}\cdot j^{4\cdot 2+2}=2^{10}\cdot j^2=-2^{10}.$$

Задания для самостоятельной работы.

Вычислить:

№16. $\left(\dfrac{1}{2-j}\right)^2$. Ответ: $\dfrac{3}{25}+\dfrac{4}{25}j$

№17. $\dfrac{2}{3-j}$. Ответ: $\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{5}j$.

№18. $\dfrac{2j-3}{1+j}$. Ответ: $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2}j$.

№19. $(3-j)^2$.

№20. $(1-2j)^3$.

№21. $(1+j\sqrt{3})^3$.

№22. $\dfrac{1+j\sqrt{3}}{1-j\sqrt{3}}-(1-j)^2$. Ответ: $-\dfrac{1}{2}+j\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+2\right)$.

№23. $\dfrac{(1+2j)^2-(1-j)^3}{(3+2j)^3-(2+j)^2}$. Ответ: $\dfrac{22}{159}+\dfrac{5}{318}j$.

7. Действия с комплексными числами в тригонометрической и показательной формах

Таблица 2

Правила действия с комплексными числами в тригонометрической и показательной формах

Тригонометрическая форма	Показательная форма
Пусть даны два комплексных числа:	
$c_1 = \lvert c_1 \rvert(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1)$, $c_2 = \lvert c_2 \rvert(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2)$.	$c_1 = \lvert c_1 \rvert e^{j\varphi_1}$, $c_2 = \lvert c_2 \rvert e^{j\varphi_2}$.
1. Умножение	
$c_1 \cdot c_2 = \lvert c_1 \rvert \cdot \lvert c_2 \rvert(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) +$ $+ j\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$	$c_1 \cdot c_2 = \lvert c_1 \rvert \cdot \lvert c_2 \rvert e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$
2. Деление	
$\frac{\tilde{n}_1}{\tilde{n}_2} = \frac{\lvert c_1 \rvert}{\lvert c_2 \rvert}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$	$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\lvert c_1 \rvert}{\lvert c_2 \rvert} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$
Пусть дано комплексное число:	
$c = \lvert c \rvert(\cos\varphi + j\sin\varphi)$	$c = \lvert c \rvert e^{j\varphi}$
3. Возведение в степень	
$c^n = \lvert c \rvert^n (\cos n\varphi + j\sin n\varphi)$	$c^n = \lvert c \rvert^n e^{jn\varphi}$
4. Извлечение из корня Количество корней из комплексного числа равно показателю степени корня	
$\sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{\lvert c \rvert} \cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n}$ $+ j\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n} =$ $= \begin{cases} k_1 = 0 \backslash\backslash\backslash c_1 = \ldots, \\ k_2 = 1 \backslash\backslash\backslash c_2 = \ldots, \\ \ldots\ldots. \backslash\backslash\backslash \ldots\ldots. \\ k_n = 0 \backslash\backslash\backslash c_n = \ldots \end{cases}$ - всего n корней.	$\sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{\lvert c \rvert}\ e^{j\frac{\varphi + 2\pi k}{n}}$ $= \begin{cases} k_1 = 0 \backslash\backslash\backslash c_1 = \ldots, \\ k_2 = 1 \backslash\backslash\backslash c_2 = \ldots, \\ \ldots\ldots. \backslash\backslash\backslash \ldots\ldots., \\ k_n = 0 \backslash\backslash\backslash c_n = \ldots \end{cases}$ - всего n корней.

Пример 9. Провести вычисления, используя правила из таблицы 2.

1) Провести умножение и деление комплексных чисел $c_1 = 3\left(\cos 60^0 + j\sin 60^0\right)$; $c_2 = 2\left(\cos 45^0 + j\sin 45^0\right)$;

$$c_1 \cdot c_2 = 6(\cos 105^0 + j\sin 105^0)$$

$$\frac{c_1}{c_2} = 1{,}5(\cos 15^0 + j\sin 15^0)\,.$$

2) Возвести в шестую степень комплексное число

$$c = 8(\cos 30^0 + j\sin 30^0).$$

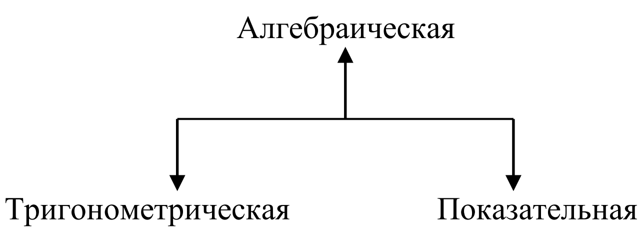
$$c^6 = 8^6(\cos 180^0 + j\sin 180^0).$$

3) Найти корни комплексного числа

$$\sqrt[3]{c} = 2\left(\cos\frac{30^0 + 2\pi k}{3} + j\sin\frac{30^0 + 2\pi k}{3}\right) =$$

$$= \begin{cases} k_1 = \dfrac{0}{z_1} = 2\,(\cos 10^0 + j\sin 10^0), \\ k_2 = \dfrac{0}{z_2} = 2\,(\cos 130^0 + j\sin 130^0), \\ k_3 = \dfrac{2}{z_3} = 2\,(\cos 250^0 + j\sin 250^0). \end{cases}$$

8. Алгоритмы перевода комплексного числа из одной формы записи в другую



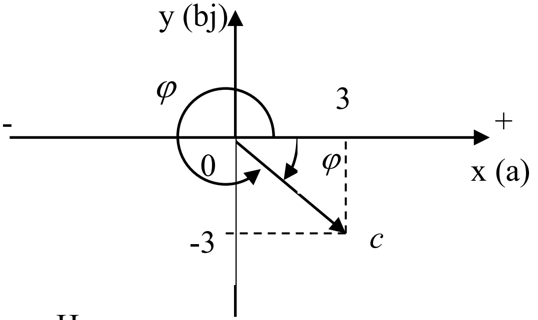
Для осуществления перехода из алгебраической формы комплексного числа в тригонометрическую или показательную, необходимо, зная действительную и мнимую части комплексного числа (т.е. a и b), найти его модуль (|c|) и аргумент (φ). Алгоритм такого перехода удобно рассмотреть на конкретном примере.

Алгоритм 1. Алгебраическая $\rightarrow$ Тригонометрическая $\rightarrow$ Показательная.

Пусть $c = 3 - 3j$.

1. Комплексное число изображают на комплексной плоскости, отмечают аргумент (φ).

φ



2. Находим аргумент.

$$\left.\begin{matrix} tg\varphi = \dfrac{b}{a} = -1 \\ c \in IV \text{ ÷åòâåðòè} \end{matrix}\right\}\text{значит } \varphi = 315^0 \text{ (или } \varphi = -45^0\text{).}$$

Замечание: если $c = a$ или $c = bj$, то п.2 алгоритма не нужен.

3. Вычислить модуль комплексного числа |c|$= \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

4. Записываем тригонометрическую форму:

$3 - 3j = 3\sqrt{2}\,.\,(\cos 315^0 + j\sin 315^0)$ или

$3 - 3j = 3\sqrt{2}\,.\,(\cos(-45^0) + j\sin(-45^0))$

5. Записываем показательную форму:

$3-3j=3\sqrt{2}\ e^{j315^0}$ или $3-3j=3\sqrt{2}\ e^{j-45^0}$.

Алгоритм 2. Тригонометрическая $\to$ Алгебраическая.

$|c|(\cos\varphi+j\sin\varphi)\to a+bj$.

Табличные значения $\cos\varphi$, $\sin\varphi$.

Алгоритм 3. Показательная $\to$ Алгебраическая.

$\mathrm{re}^{j\varphi}\to(\cos\varphi+j\sin\varphi)\to a+bj$.

Табличные значения $\cos\varphi$, $\sin\varphi$.

Пример 10. Найти алгебраическую форму числа $c=2e^{j135^0}$.

$c=2;\ \varphi=135^0$.

$c=2(\cos135^0+j\sin135^0)$,

$$\cos135^0=-\frac{\sqrt{2}}{2};\ \sin135^0=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Значит: $2e^{j135^0}=2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}j\right);2e^{j135^0}=-\sqrt{2}+\sqrt{2}j$.

Задания для самостоятельной работы.

№ 24. Представить следующие комплексные числа в тригонометрической и показательной формах.

1) $1;-1;\ j;-j$.

2) $c=2-2j$.

3) $c=4$.

4) $c=-5$.

11) $c=1+j$.

12) $c=\frac{1}{2}$.

13) $c=-7j$.

14) $c=7-7\sqrt{3}j$.

5) $c=-\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}j$.

6) $c=2-2\sqrt{3}j$.

7) $c=-\sqrt{3}-j$.

8) $c=1+\sqrt{3}j$.

9) $c=-1+j$.

10) $c=-\sqrt{3}+j$.

15) $c=16j$.

16) $c=-2\sqrt{3}+2j$.

17) $c=10+10j$.

18) $c=-3\sqrt{2}-3\sqrt{2}\,j$.

19) $c=-\sqrt{3}$.

20) $c=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j$.

№25. Найти алгебраическую форму следующих комплексных чисел.

1) с=2 e^{j60^0},

2) с=3 e^{j120^0},

3) с=5 e^{j180^0},

4) с= e^{j630^0},

5) с=6 e^{j30^0},

6) с=3 e^{j-30^0},

7) с=3 e^{j45^0},

8) с= e^{j310^0},

9) с=5 e^{j300^0},

10) с= e^{j210^0}.

№26. Вычислить произведение и частное комплексных чисел с $_1$ и с $_2$. Ответ записать в алгебраической форме.

1) $\frac{(1-j\sqrt{3})\cdot(-\sqrt{3}+j)}{1+j}$. Ответ: $2+2j$.

2) $\frac{(1-j\sqrt{3})^{12}\cdot(-\sqrt{3}+j)^{6}}{(1+j)^{12}}$. Ответ: -63.

2) $\left(\frac{1+j}{\sqrt{3}-j}\right)^5$. Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{8}(\cos 15^0+j\sin 15^0)$.

4) $(1-j)^7$. Ответ: $8+8j$.

5) $\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$. Ответ: 1.

6) $\left(\frac{1+j\sqrt{3}}{1-j}\right)^{20}$. Ответ: 512-512$\sqrt{3}$j.

7) $(1+j)^{25}$. Ответ: 4096+4096j.

8) $\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{-16-16j}\right)^{24}$. Ответ: $\frac{1}{2^{108}}$.

9) $\frac{(1-j\sqrt{3})^{15}}{(-j-1)^7}$. Ответ: $2^{11}+2^{11}$j.

№27. Вычислить (ответ по возможности записать в алгебраической форме).

1) $\sqrt[4]{j}$,
2) $\sqrt[4]{-4}$,
3) $\sqrt[3]{-1}$,
4) $\sqrt[3]{18}$,
5) $\sqrt[5]{1}$,
6) $\sqrt[3]{-8j}$,
7) $\sqrt[3]{\sqrt{3}-j}$,
8) $\sqrt{2-2j}$,
9) $\sqrt[4]{-3j}$,
10) $\sqrt[4]{16}$,
11) $\sqrt[3]{1+j}$,
12) $\sqrt[3]{12-12\sqrt{3}j}$.

№28. Вычислить в показательной форме. Ответ записать в алгебраической форме.

1) $(-\sqrt{3}-j)^{12}$. Ответ: 2^{12}.

2) $(-1-j\sqrt{3})^{14}$. Ответ: $-2^{13}+2^{13}\sqrt{3}j$.

3) $(1-j\sqrt{3})^9$. Ответ: -2^9.

4) $(2-2j)^{23}$. Ответ: $2^{31}-2^{31}j$.

5) $\left(j-1\right)^{35}$. Ответ: $2^{17}+2^{17}$j.

6) $\sqrt[3]{-\sqrt{3}}-j$.

7) $(7-7\sqrt{3}j)^{19}$. Ответ: $\dfrac{14^{19}}{2}-\dfrac{14^{19}\sqrt{3}}{2}j$.

8) $\dfrac{(-\sqrt{3}+j)^{12}}{(16+16j)^{5}}$. Ответ: $-\dfrac{1}{2^{11}}+\dfrac{1}{2^{11}}j$.

9) $\left(\dfrac{\dfrac{-\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}j}{-5+5j}\right)^{30}$. Ответ: $\dfrac{1}{5^{30}\cdot 2^{15}}j$.

Библиографический список:

1. Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. – М.: Наука, 1990.
2. Дадаян А.А. Математика. – М.: Форум: Инфа –М., 2005.

Содержание