МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Воронежский государственный технический университет»

Строительно-политехнический колледж

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к проведению практических занятий,
выполнению контрольной работы и самостоятельному изучению
дисциплины ЕН.01 Математика для студентов
специальности 21.02.05 «Земельно-имущественные отношения»
строительно-политехнического колледжа
1 и 2 курса очной формы обучения

Воронеж 2022

УДК 519.21+519.22(07)
ББК 22.17я7

Составители:
С. Л. Рыбина, Л. А. Чемизова

Теория вероятностей и основы математической статистики: методические указания к проведению практических занятий, выполнению контрольной работы и самостоятельному изучению дисциплины ЕН.01 Математика для студентов специальности 21.02.05 «Земельно-имущественные отношения» строительно-политехнического колледжа 1 и 2 курса очной формы обучения /ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»; сост.: С. Л. Рыбина, Л. А. Чемизова. – Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2022.– 39 с.

Приводятся основные теоретические сведения, связанные с понятиями теории вероятностей и основы математической статистики. Показаны примеры решения практических заданий, представлены варианты контрольной работы.

Предназначены для студентов специальности 21.02.05 «Земельно-имущественные отношения» строительно-политехнического колледжа 1 и 2 курса очной формы обучения.

Методические указания подготовлены в электронном виде и содержатся в файле МУ 1 Теор. вер. ЗИО ЕН 01.Математика.pdf.

Ил. 8. Табл. 1. Библиогр.: 6 назв.

УДК 519.21+519.22(07)
ББК 22.17я7

Рецензент – А. И. Барсуков, канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры прикладной математики и механики ВГТУ

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

ВВЕДЕНИЕ

Математика - это наука, изучающая пространственные формы и количественные отношения действительного мира.

Математика играет важную роль в естественнонаучных, инженерно-технических и гуманитарных исследованиях. В тоже время математика является не только мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки, но также элементом общей культуры. Поэтому основной задачей курса математики в образовательных заведениях среднего профессионального образования является обеспечение обучающихся математическими знаниями и умениями, необходимыми для изучения специальных дисциплин.

Теория вероятностей – раздел математики, который изучает закономерности случайных явлений. Возникновение теории вероятностей относится к середине XVIII века и связано с именами Гюйгенса, Паскаля, Ферма и Якова Бернулли. Современное развитие теории вероятностей характеризуется большим интересом к ней, а также расширением круга ее практических приложений.

Математическая статистика – это раздел математики, который изучает методы сбора, систематизации и обработки статистических данных с целью построения модели случайного явления для получения научных и практических выводов. Исходными в математической статистике являются статистические данные, которые, как правило, носят числовой характер и получаются в результате проведения статистического эксперимента.

Теоретический минимум в данных методических указаниях призван систематизировать и обобщить имеющиеся знания студентов по разделу «Теория вероятностей и основы математической статистики». Разобранные и решённые типовые примеры позволяют учащимся использовать основные приёмы и методы решения того или иного примера, сформировать алгоритм действий при выполнении контрольных заданий.

Методические указания предназначены для студентов 1 и 2 курса специальности 21.02.05 «Земельно-имущественные отношения» строительно-политехнического колледжа. Они способствуют приобретению обучающимися навыков самостоятельного решения различных задач по теории вероятностей и математической статистике, подготовке к изучению спецдисциплин, базирующихся на методах теории вероятностей и математической статистики.

Методические указания разработаны в соответствии с учебной программой дисциплины ЕН.01 «Математика». Контрольная работа может выполняться обучающимися индивидуально или фронтально (два и более вариантов контрольной работы).

Предусмотренная индивидуальность (25 вариантов) контрольной работы поможет определить полноту и прочность знаний каждого учащегося, умения применять полученные знания при решении практических задач, а также навыков самостоятельной работы с учебной литературой, и что немаловажно, позволяют учитывать темп работы у каждого учащегося.

Каждая контрольная работа состоит из пяти заданий. Задания для выполнения индивидуальной контрольной работы отвечают следующим требованиям: охватывают основные вопросы материала (по темам); степень сложности всех вариантов контрольной работы одинакова.

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПРИ ИЗУЧЕНИИ РАЗДЕЛА «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ»

Самостоятельная работа обучающегося

При самостоятельном изучении теоретического и практического материала из списка рекомендуемой литературы необходимо вести конспект. В нем по мере проработки теоретического материала рекомендуется вписывать определения, теоремы, формулы, уравнения и т.п.. Поля конспектов могут послужить для выделения тех вопросов, на которые необходимо получить письменную или устную консультации. Ведение конспекта должно быть аккуратным, расположение текста хорошо продуманным. Конспект поможет при подготовке к выполнению контрольной работы.

Выполнение (решение) практических заданий и примеров

Изучение теории сопровождается выполнением практических заданий и примеров, представленных в практических пособиях (практикумах). Оно должно сопровождаться подробным осмыслением и разбором предлагаемых решенных задач и примеров. Каждый этап решения задачи и примера должен быть обоснован, исходя из теоретических положений курса. Решение задач и примеров следует излагать подробно (четко, ясно и пошагово).

Консультации

При изучении теоретического материала или при выполнении практических заданий у обучающегося могут возникнуть вопросы, разрешить которые самостоятельно может не получиться. В такой ситуации следует обратиться к преподавателю для получения от него письменной или устной консультации, при этом следует указать характер затруднения, привести план решения.

Контрольная работа

В процессе практического изучения раздела «Теория вероятностей и основы математической статистики» обучающийся должен выполнить одну контрольную работу, которая проходит рецензирование у преподавателя. По полученным результатам обучающийся может сделать выводы о степени усвоения им раздела, внести коррективы в процесс последующей самостоятельной работы при изучении данного раздела.

Требования к оформлению и выполнению контрольной работы:

Контрольная работа выполняется на отдельных листах, которые затем сдаются преподавателю на проверку. В нее должны быть включены все задачи, указанные в задании к контрольной работе строго по своему варианту. Выполненные задания не по своему варианту не засчитываются. В заголовке контрольной работы должны быть ясно и разборчиво указаны: фамилия студента, его инициалы, группа, номер варианта (вариант выбирается по номеру студента в списке группы).

К выполнению контрольной работы следует приступать после тщательного разбора имеющихся примеров задач с решениями.

Контрольные работы должны выполняться самостоятельно, так как в противном случае рецензирование работы как диалог общения преподаватель-обучающийся с целью оказания последнему методической помощи не достигнет цели.

СОДЕРЖАНИЕ РАЗДЕЛА «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ»

Тема 1. Элементы комбинаторики: перестановки, сочетания и размещения.

Тема 2. Случайные события. Алгебра событий. Относительная частота. Классическое, геометрическое, статистическое определения вероятности. Схема Бернулли.

Тема 3. Дискретные и непрерывные случайные величины. Графическое изображение распределения ДВС.

Тема 4. Генеральная совокупность и выборка. Полигон частот, гистограмма. Эмпирическая функция распределения.

Тема 1. Элементы комбинаторики: перестановки, сочетания и размещения

В разделе математики, который называется комбинаторикой, решаются некоторые задачи, связанные с рассмотрением множеств и составлением различных комбинаций из элементов этих множеств. Например, если взять 10 различных цифр 0, 1, 2, 3,: , 9 и составлять из них комбинации, то будем получать различные числа, например 143, 431, 5671, 1207, 43 и т.п.

Мы видим, что некоторые из таких комбинаций отличаются только порядком цифр (например, 143 и 431), другие - входящими в них цифрами (например, 5671 и 1207), третьи различаются и числом цифр (например, 143 и 43). Таким образом, полученные комбинации удовлетворяют различным условиям. В зависимости от правил составления можно выделить три типа комбинаций: перестановки, размещения, сочетания.

Предварительно познакомимся с понятием факториала. Произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно называют n-факториалом и пишут n!:

$$\boldsymbol{n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}. \qquad (1)$$

Заметим, что 0!= 1, 1!=1.

Числом размещений A_n^k называется число различных комбинаций, сколькими можно выбрать k различных предметов из n, причем порядок следования элементов важен:

$$\boldsymbol{A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}}. \qquad (2)$$

В частном случае, когда $k = n$, получается *число перестановок*

$$\boldsymbol{P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!}. \qquad (3)$$

Числом сочетаний C_n^k называется количество способов, сколькими можно выбрать k различных предметов из n, если порядок следования элементов несущественен:

$$\boldsymbol{C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}}. \qquad (4)$$

Отметим, что число сочетаний из n по k дает для конечного множества, состоящего из n элементов, количество его подмножеств, содержащих k элементов.

Пример 1. Два раза бросается монета. Какова вероятность того, что хотя бы один раз выпадет «орел» (событие A)?

Решение: Равновозможными несовместными элементарными исходами являются четыре пары исходов (о,о), (о,р), (р,о), (р,р), где буквами «о» и «р» обозначено выпадение, соответственно, орла или решки; общее число элементарных исходов $n = 4$.

Событие A соответствуют первые три пары исходов, поэтому число благоприятных исходов $m = 3$. Следовательно, $p(A)= m/n= 3/4=0{,}75$.

Ответ: $p(A)=0{,}75$.

Пример 2. Студент идет на экзамен, зная 16 вопросов из 25. Найти вероятность того, что из трех вопросов два будут ему известны?

Решение: Множество всех элементарных исходов равно количеству способов, сколькими можно выбрать 3 вопроса из 25, а так как порядок следования вопросов в билете не важен, то это будет число сочетаний n=C_{25}^3.

Определим число исходов, благоприятных событию А (среди трех вопросов два известны). Два известных вопроса можно выбрать C_{16}^2 способами, а один неизвестный из оставшихся 9 невыученных (25-16=9) можно выбрать C_9^1 способами. Общее число благоприятных событию А исходов равно произведению полученных вариантов: m=$C_{16}^2 C_9^1$. Следовательно,

$$p(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{16}^2 C_9^1}{C_{25}^3} = \left| \begin{matrix} C_{16}^2 C_9^1 = \frac{16!\cdot 9}{(16-2)!2!} = \frac{15\cdot 16}{2!}\cdot 9 = 1080 \\ C_{25}^3 = \frac{25!}{(25-3)!3!} = \frac{23\cdot 24\cdot 25}{3!} = 2300 \end{matrix} \right| \approx 0{,}47.$$

Ответ: $p(A)$=0,47.

Пример 3. Сборная конструкция состоит из четырех объемных элементов, которые завозятся на стройку по одному случайным образом. Какова вероятность того, что конструкция будет смонтирована без простоев, связанных с завозом, если 1) все элементы различны; 2) среди них два одинаковых?

Решение: Общее решение различных вариантов очередности завоза для четырех элементов равно числу перестановок $n=P_4=4!=24$.

В первом случае благоприятным исходом m_1 будет один, т.к. задержек не будет только в том случае, если элементы конструкции завозятся в том же порядке, в котором они должны быть смонтированы. Следовательно, $p_1=m_1/n=1/24\approx 0,04$.

Во втором случае число благоприятных исходов m_2 равно двум, т.к. одинаковые элементы можно поменять между собой. Следовательно, $p_2=m_2/n=2/24\approx 0,08$.

Ответ: $p_1\approx 0,04$, $p_2\approx 0,08$.

Тема 2. Случайные события. Алгебра событий. Относительная частота. Классическое, геометрическое, статистическое определения вероятности. Схема Бернулли

Всякий факт, который может наблюдаться при наличии некоторых условий, будем называть *событием*. Условия, при наличии которых может произойти событие, будем называть *опытом* или *испытанием*. В дальнейшем любое событие, которое может появиться в результате опыта, будем называть *исходом опыта*. Если нельзя отдать предпочтение ни одному из исходов в смысле возможности его появления, то исходы называют *равновозможными.*

События бывают *достоверными*, *невозможными* и *случайными*.

Достоверным называют событие, которое в результате опыта обязательно произойдёт. Например, в условиях земного тяготения подброшенная монета непременно упадёт вниз.

Событие, которое в результате опыта не может произойти, называют *невозможным*. Пример невозможного события: в условиях земного тяготения подброшенная монета улетит вверх.

Событие, называется *случайным*, если в результате опыта оно может появиться или не появиться.

Принципиальный критерий случайности заключается в следующем. Случайное событие – следствие случайных факторов, воздействие которых предугадать невозможно или крайне затруднительно. Пример: в результате броска монеты выпадет «орёл». В рассмотренном случае случайные факторы – это форма и физические характеристики монеты, сила/направление броска, сопротивление воздуха и т.д. Критерий случайности очень важен – так, например, карточный шулер может очень ловко имитировать случайность и давать выигрывать жертве, но ни о каких случайных факторах, влияющих на итоговый результат, речи не идёт.

Любой результат испытания называется *исходом*, который, собственно и представляет собой появление определённого события. В частности, при подбрасывании монеты возможно 2 исхода (случайных события): выпадет орёл, выпадет решка. Естественно, подразумевается, что данное испытание проводится в таких условиях, что монета не может встать на ребро или, скажем, зависнуть в невесомости.

События обозначают большими латинскими буквами $A, B, C, D, E, F, \ldots$ либо теми же буквами с подстрочными индексами, например: $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \ldots$. Исключение составляет буква P, которая зарезервирована под другие нужды.

Основная идея теории вероятности состоит в том, что каждому случайному событию A ставится в соответствие *вероятность* этого события $p(A)$ - неотрицательное число, для краткости обозначаемое p, $0 \le p \le 1$, причем вероятность невозможного события равна нулю, а достоверного события равна единице.

Два события называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление другого в одном и том же опыте. В противном случае эти события называются *совместными*.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называют *полной группой событий*, если в результате опыта появится хотя бы одно из этих событий. Событие $\overline{\boldsymbol{A}}$ называют *противоположным* событию A, если события A и $\overline{\boldsymbol{A}}$ несовместны т образуют полную группу.

Два события называются *независимыми*, если вероятность любого из них не зависит от появления или непоявления другого. В противном случае события называют *зависимыми*.

Пусть A и B – зависимые события. *Условной вероятностью* $\mathrm{P}(A \mid B)$ (или $P_A(B)$) называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже наступило. Если A и B – независимые события, то $P_A(B) = P(B)$.

Суммой событий A и B называется событие $C = A + B$, которое заключается в появлении хотя бы одного из событий A, B.

Произведением событий A и B называется событие $C = A \cdot B$, которое заключается в совместном появлении событий A и B.

Вероятность суммы и произведения событий. Формула полной вероятности

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{p(A+B) = p(A) + p(B) - p(AB)}. \tag{5}$$

Если события A и B несовместны, если в результате опыта они не могут появиться вместе, в этом случае

$$\boldsymbol{p(A+B) = p(A) + p(B)}. \tag{6}$$

В частности, так как противоположные события A и $\overline{\boldsymbol{A}}$ несовместны, а их сумма есть событие достоверное, то

$$\boldsymbol{p(A) + p(\overline{A}) = 1}, \tag{7}$$

то вероятность противоположного события

$$\mathbf{p}(\overline{\mathrm{A}}) = \mathit{1} - \mathbf{p}(\mathrm{A}). \tag{8}$$

Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$\mathbf{p}(\mathbf{AB}) = \boldsymbol{p}(\mathrm{A})\ \boldsymbol{p}(\boldsymbol{B}). \tag{9}$$

В ситуации, когда частота появления события B зависит от того, произошло ли событие A или нет, условная вероятность $P_A(B)$ наступления события B при условии, что событие A уже произошло, равно

$$\boldsymbol{P_A(B)} = \boldsymbol{p(A)\ p_A(B)}. \tag{10}$$

<u>Замечание.</u> Теоремы сложения и умножения вероятностей можно обобщить на большее число слагаемых и сомножителей. Например, для трех совместных событий

$$\boldsymbol{p(A+B+C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(AB) - p(AC) - p(BC) + p(ABC)},$$

$$\boldsymbol{p(ABC) = p(A)\ p_A(B)}. \tag{11}$$

Для нахождения вероятности суммы независимых событий выгодно переходить к противоположным событиям:

$$\mathbf{p}(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \ldots + \mathbf{A}_n) = \mathbf{1} - \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}_1})\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}_2})\ldots\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}_n}). \tag{12}$$

Пусть событие B может наступить при условии появления одного из попарно несовместных событий A_1, A_2,..., A_n , образующих полную группу, т.е. $\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{p}(\boldsymbol{A_k}) = 1$.

Тогда имеет место *формула полной вероятности*:

$$\boldsymbol{p(B) = p(A_1)\ p_{A_1}(B) + p(A_2)\ p_{A_2}(B) + \ldots + p(A_n) p_{A_n}(B)}, \tag{13}$$

По *классическому определению вероятности* события A называется отношение числа m благоприятных этому событию элементарных исходов к общему числу n всех равновозможных несовместных элементарных исходов:

$$\boldsymbol{p(A) = \frac{m}{n}}.$$

Часто число вариантов для m и n простым перебором подсчитать сложно, тогда для их вычисления пользуются формулами комбинаторики (см. тема 1).

<u>Пример 4.</u> Перегорела одна из трех лампочек, включенных последовательно в сеть. Наугад выбранную лампочку заменяют годной, после чего проверяется исправность линии. Если повреждение не устранено, то заменяется другая лампочка. Найти вероятность того, что повреждение будет устранено после второй замены лампочки.

<u>Решение:</u> Пусть событие A – линия исправна после второй замены лампочки. Событие А является произведением события A_1 – линия неисправна после первой замены лампочки (т.е. заменена исправная лампочка) и события A_2 – линия исправна после второй замены лампочки (т.е. заменена неисправная лампочка): А= $A_1 A_2$. Поскольку события A_1 и A_2 зависимы, то $p(A_1 A_2)=p(A_1)p_{A_1}(A_2)$.

Вероятность заменить первый раз годную лампочку, которых две из трех, $p(A_1)=2/3$. Вероятность во второй раз заменить перегоревшую лампочку, которая одна из двух оставшихся непроверенных, $p_{A_1}(A_2)=1/2$, тогда $p(A)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\approx 0,33$.

Ответ: $p(A)\approx 0,33$.

Замечание: Для эффективного решения задач при переводе словесного описания событий на язык алгебры событий полезно помнить, что союзу «и» соответствует произведение событий АВ, союзу «или» - сумма событий А + В, частица «не» - противоположное событие $\overline{A}$.

Пример 5. По мишени стреляют три стрелка. Вероятность попадания в мишень первым стрелком – 0,9, вторым – 0,8 и третьим 0,5. Найти вероятность следующих событий:

1) B_1 – все три стрелка попали в мишень;

2) B_2 – никто не попал в мишень;

3) B_3 – хотя бы один стрелок попал в мишень;

4) B_4 – только один стрелок попал в мишень;

5) B_5 – только два стрелка попали в мишень.

Решение: Очевидно, каждое из событий B_k состоит из нескольких событий, перечислим их:

A_1 – первый стрелок попал в цель, $p(A_1)=0,9$, $p(\overline{A_1})=1-(A_1)=1-0,9=0,1$.

A_2 – второй стрелок попал в цель, $p(A_2)=0,8$, $p(\overline{A_2})=1-(A_2)=1-0,8=0,2$.

A_3 – третий стрелок попал в цель, $p(A_3)=0,5$ $p(\overline{A_{13}})=1-(A_3)=1-0,5=0,5$.

1) Событие B_1 – первый, второй и третий стрелки попали в мишень, следовательно, $B_1=A_1 A_2 A_3$. Так как события A_1, A_2 и A_3 независимы, то по формуле аналогичной (9),

$p(B_1)=p(A_1 A_2 A_3)=p(A_1)\,p(A_2)\,p(A_3)=0,9\cdot 0,8\cdot 0,5=0,36$.

2) Событие B_2 – первый, второй и третий стрелки не попали в мишень, следовательно, $B_2=\overline{A_1}\;\overline{A_2 A_3}$. Так как события $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$ и $\overline{A_3}$ независимы, то по формуле аналогичной (9),

$p(B_2)=p(\overline{A_1}\;\overline{A_2 A_3})=p(\overline{A_1})\,p(\overline{A_2})\,p(\overline{A_3})=0,1\cdot 0,2\cdot 0,5=0,01$.

3) Событие B_3 складывается из большого количества вариантов –или $A_1 A_2 A_3$, или $\overline{A_1} A_2 A_3$, или $A_1 \overline{A_2} A_3$ и т.д. Поэтому выгодно перейти к противоположному событию $\overline{B_3}=B_2$. Так как события $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$ и $\overline{A_3}$ независимы, то по формуле аналогичной (9),

$p(B_3)=1-p(\overline{B_3})=1-p(B_2)=1-0,01=0,99$.

4) Событие B_4 – только одно попадание в мишень – складывается из следующих вариантов: первый стрелок попал, второй и третий не попали; второй попал, первый и третий не попали; третий стрелок попал, а первый и второй не попали. Следовательно, $B_4=A_1\overline{A_2 A_3}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+\overline{A_1 A_2}A_3$. Отметим, что одновременно события $A_1\overline{A_2 A_3}$, $\overline{A_1}A_2\overline{A_3}$, $\overline{A_1 A_2}A_3$ произойти не могут, т.е. являются несовместными. Поэтому

$p(B_4)=p(A_1\overline{A_2 A_3})+p(\overline{A_1}A_2\overline{A_3})+p(\overline{A_1 A_2}A_3)=p(A_1)p(\overline{A_2})\;p(\overline{A_3})+$ $+p(\overline{A_1})p(A_2)p(\overline{A_3})+p(\overline{A_1})\;p(\overline{A_2})p(A_3)=0,9\cdot 0,2\cdot 0,5+0,1\cdot 0,8\cdot 0,5+0,1\cdot 0,2\cdot 0,5=$

0,14.

5) Событие B_5 – только два попадания в мишень – как и в предыдущем пункте, состоит в переборе трех вариантов, когда один из стрелков не попал в мишень, а остальные двое попали: $B_5 = \overline{\boldsymbol{A_1}}\, A_2\, A_3 + A_1 \overline{\boldsymbol{A_2}} A_3 + A_1 A_2 \overline{\boldsymbol{A_3}}$.

$p(B_5) = p(\overline{\boldsymbol{A_1}})\, p(\overline{\boldsymbol{A_2}})\, p(\overline{\boldsymbol{A_3}}) + p(A_1) p(\overline{\boldsymbol{A_2}}) p(A_3) + p(A_1)\, p(A_2)\, p(\overline{\boldsymbol{A_3}}) = 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}5 + 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}5 + 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}5 = 0{,}49$.

<u>Ответ:</u> $p(B_1) = 0{,}36$, $p(B_2) = 0{,}01$, $p(B_3) = 0{,}99$, $p(B_4) = 0{,}14$, $p(B_5) = 0{,}49$.

Замечание: Отметим, что сумма событий B_1, B_2, B_4, B_5 образует достоверное событие D, т.к. B_1, B_2, B_4, B_5 попарно несовместны и являются полной группой исходов, то должно быть выполнено условие $p(D)=p(B_1)+p(B_2)+p(B_4)+p(B_5)=1$. Это условие можно использовать как критерий правильности вычислений: 0,36 + 0,01 + 0,14 + 0,49 = 1. Верно.

<u>Пример 6.</u> В магазине имеются электрические лампочки, изготовленные на трех заводах: 3 ящика с первого завода, 5 – со второго завода и 2 – с третьего. Процент бракованных лампочек (то есть тех, что перегорают раньше положенного срока) составляет на первом заводе – 10 %, на втором – 20 %, на третьем – 25 %. Найти вероятность купить бракованную лампочку при условии, что ящики заносятся в торговый зал случайным образом.

<u>Решение:</u> Рассмотрим события: A_1 – лампочка сделана на первом заводе, A_2– лампочка сделана на втором заводе, A_3 – на третьем заводе. Так как в магазине всего 3 + 5+ 2 = 10 ящиков лампочек, то вероятность, что лампочка изготовлена первым заводом $p(A_1)=3/10$, соответственно, $p(A_2)=0{,}5$, $p(A_3)=0{,}2$.

Если лампочка произведена на первом заводе, то вероятность события В – деталь бракованная – $\boldsymbol{p_{A_1}(B)}$=0,1, так как на первом заводе брак составляет 10 %. Аналогично, $\boldsymbol{p_{A_2}(B)}$=0,2, $\boldsymbol{p_{A_3}(B)}$=0,25.

По формуле полной вероятности (13) при $n=3$:

$p(B) = p(A_1)\, \boldsymbol{p_{A_1}(B)} + p(A_2)\, \boldsymbol{p_{A_2}(B)} + p(A_3) \boldsymbol{p_{A_{n3}}(B)} = 0{,}3 \cdot 0{,}1 + 0{,}5 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}25 = {}$
$= 0{,}18$.

<u>Ответ:</u> $p(B)$ =0,18.

Повторение испытаний: формула Бернулли, локальная и интегральная теоремы Лапласа, формула Пуассона

Повторение испытаний состоит в том, что проводятся n независимых испытаний (результаты последующих испытаний не зависят от предыдущих). Мы рассмотрим схему Бернулли, когда вероятность появления события A в каждом испытании одна и та же: $p(A) = p$. Обозначим через q вероятность появления противоположного события $\overline{\boldsymbol{A}}$:

$$\boldsymbol{q = p(\overline{A}) = 1 - p.}$$

Требуется узнать, какова вероятность $p_n(k)$ того, что в n независимых испытаниях событие A произойдет ровно k раз (и не наступит $(n-k)$ раз). Эта вероятность по *формуле Бернулли* равна

$$p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \tag{14}$$

где коэффициент C_n^k считается по формуле (4).

Пользоваться формулой (14) при больших n затруднительно из-за большого объема счетной работы. В этом случае применяется приближенная формула - *локальная теорема Муавра-Лапласа*:

$$p_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \tag{15}$$

где $\mathbf{x} = \frac{\mathbf{k-np}}{\sqrt{\mathbf{npq}}}$, а значение функции $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbf{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ затабулированы и находятся из таблицы 1 (приложение 1).

<u>*Замечание:*</u> функция φ(x) - четная функция, т.е. выполняется условие φ(x)=φ(–x). При x>5 полагают φ(x)=0.

Вероятность того, что событие A в n испытаниях произойдет от k_1 до k_2 раз (включительно), приближенно считается по *интегральной теореме Муавра-Лапласа*:

$$p_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{16}$$

где $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$ и $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, а значение функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ затабулированы и находятся из таблицы 2 (приложение 1) при $x \in [0;5]$.

<u>*Замечание:*</u> Если x не принадлежит отрезку [0;5], то значения функции Φ(x) находят, используя ее свойства:

1) функция Лапласа Φ(x) - нечетная функция, т.е. выполняется условие Φ(x)= –Φ(x).

2) При x> 5 полагают Φ(x) = 0,5.

В случае же, когда n велико, а p – мало (обычно $p \leq 0{,}1$), вместо формулы Бернулли применяют приближенную *формулу Пуассона*:

$$p_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}. \tag{17}$$

где $\lambda = np$.

Отметим, что очень часто найти вероятность p по классическому определению вероятности невозможно. В этом случае на практике используют *схему Бернулли* при достаточно большом числе испытаний.

При *статистическом определении* в качестве *вероятности* события A принимают его относительную частоту

$$W(A) = \frac{n_A}{n}, \tag{18}$$

где n_A – количество появления события A в n испытаниях.

Например, нужно практически определить вероятность попадания стрелка в мишень. Будем считать, что *p(A)=0,7*, если он попал 7 раз из 10, или 70 раз из 100, или 700 из 1000 и т.д. При этом, чем больше произведено выстрелов, тем ответ достовернее. Чем больше число испытаний, тем численно ближе относительная чистота к неизвестной нам теоретической вероятности события *A*: *W(A)→p(A)→n→∞.*

Пример 7. Прибор состоит из пяти узлов. Вероятность безотказной работы в течении времени *t* для каждого узла равна 0,9. Узлы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что за время *t* откажут два узла.

Решение: Пусть событие *A* есть выход узла из строя за время *t*. Число узлов $n=5$, а число отказавших узлов $k=2$.

Вероятность безотказной работы узла $p(A)=p=0,9$, тогда $q=1-p=1-0,9=0,1$. Вычислим искомую вероятность по формуле Бернулли (14):

$P_5(2) = \mathbf{C_5^2 0,9^2 0,1^{5-2} = \frac{5!}{3!2!} 0,81 \cdot 0,001 = 0,0081}$.

Ответ: $p_5(2)$ =0,0081.

Пример 8. Два шахматиста, первый из которых выигрывает в два раза чаще другого, играют матч из нескольких партий. Считая все партии результативными, найти:

1) вероятность выигрыша матча из трех партий первым игроком;

2) вероятность выигрыша первым игроком 13 партий из 18.

Решение:

1) пусть событие А – матч выигран первым игроком, т.е. первый игрок выиграет две или три партии из трех. Вероятность выиграть одну партию для первого игрока, т.к. он выигрывает в два раза чаще, p = 2/3, тогда q= 1-p=1/3. Матч состоит из трех повторяющихся событий. Вероятность выиграть две партии из трех $P_3(2) = \mathbf{C_3^2 (\frac{2}{3})^2 (\frac{1}{3})^{3-2} = \frac{4}{9}}$, а три партии из трех $P_3(3) = \mathbf{C_3^3 (\frac{2}{3})^3 (\frac{1}{3})^{3-3} = \frac{8}{27}}$. Итак, p(A) = $P_3(2)+P_3(3)=4/9+8/27=20/27\approx 0,74$.

2) В нашем случае n = 18, k= 13, p= 2/3, q=1/3. Вычислим $P_{18}(13)$. Т.к. n = 18 большое число, то воспользуемся локальной теоремой Лапласа (15):

$\boldsymbol{p_{18}(13)} \approx \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{18\cdot\frac{2}{3}\frac{1}{3}}}}\boldsymbol{\varphi(x)}$, где $\mathbf{x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{13-18\cdot 2/3}{\sqrt{18\cdot 2/3\cdot 1/3}} = \frac{1}{2}}$ и найдем (из табл. 1 приложения 1) φ(0,5)≈0,3521, тогда $P_{18}(13)=\frac{1}{\sqrt{4}}\cdot 0,3521 \approx 0,176$.

Ответ: вероятность выиграть матч из трех партий для первого игрока 0,74; $P_{18}(13)\approx 0,176$.

Пример 9. Игральная кость бросается 100 раз, найти вероятность того, что

1) шесть очков выпадут не менее 20 и не более 30 раз;

2) шесть очков выпадут не более 20 раз.

Решение:

1) Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа. В нашем случае n = 100, k_1= 20, k_2= 30, p= 1/6, q=1-1/6=5/6. По формуле (16)

$$\boldsymbol{p_{100}(20,30)} \approx \Phi(\boldsymbol{x_2}) - \Phi(\boldsymbol{x_1}),$$

где $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{20 - 100 \cdot {}^1/_6}{\sqrt{100 \cdot {}^1/_6 \cdot {}^5/_6}} = \mathbf{0,89}$ и $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{30 - 100 \cdot {}^1/_6}{\sqrt{100 \cdot {}^1/_6 \cdot {}^5/_6}} = \mathbf{3,58}$.

Тогда $p_{100}(20,30) \approx \Phi(3,58) - \Phi(0,89) = 0,4998 - 0,3133 = 0,1865$. Значение функции Лапласа Φ(3,58) и Φ(0,89) найдено из таблицы 2 приложения 1.

2) Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа. В нашем случае n = 100, k_1= 0, k_2= 20, p= 1/6, q=1-1/6=5/6. По формуле (16)

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{0 - 100 \cdot {}^1/_6}{\sqrt{100 \cdot {}^1/_6 \cdot {}^5/_6}} = -4,47 \text{ и } x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{20 - 100 \cdot {}^1/_6}{\sqrt{100 \cdot {}^1/_6 \cdot {}^5/_6}} = 0,89.$$

Тогда $p_{100}(0,20) \approx \Phi(0,89) - \Phi(-4,47) = \Phi(0,89) + \Phi(4,47) = 0,3133 - 0,4999 = 0,8132$

Ответ: $p_{100}(20,30) \approx 0,1865$, $p_{100}(0,20) \approx 0,8132$.

Пример 10. Каменщик за смену может уложить 1000 кирпичей. Вероятность того, что он уронит кирпич, равна 0,004. Найти вероятность того, что в течение смены произойдет падение 5 кирпичей.

Решение: Искомую вероятность найдем по формуле Пуассона (17).

По условию задачи k= 5, n = 1000, $\lambda = np = 1000 \cdot 0,004 = 4$. Подставим найденные значения в формулу воспользовавшись табл. 3 из приложения 1, получим

$$p_{1000}(5) \approx \frac{4^5 e^{-4}}{5!} \approx 0,156.$$

Ответ: $p_{1000}(5) \approx 0,156$.

Для самостоятельного изучения: алгебра событий; геометрическое определение вероятности.

Тема 3. Дискретные и непрерывные случайные величины. Графическое изображение распределения ДВС

Одним из основных понятий теории вероятности является *случайная величина*, которая в результате испытания принимает только одно из своих возможных значений, а какое именно, зависит от случайных величин.

Дискретной называют случайную величину, значения которой являются конечной или бесконечной последовательностью.

Случайная величина называется *непрерывной*, если значения данной случайной величины заполняют конечный или бесконечный промежуток *(a, b)* числовой оси *Ox*. Число значений непрерывной случайной величины всегда бесконечно.

Случайные величины принято обозначать заглавными буквами конца латинского алфавита: *X, Y*, ...; значения случайной величины – строчными буквами: *x, y, ...* .

Примеры ДСВ: число очков, выпавших при бросании игральной кости [случайная величина принимает одно из значений — {1,2,3,4,5,6}], количество выпавших «гербов» (или «решек») при бросании *n* монет [случайная величина «число выпадения герба» («число выпадения решки») принимает одно из значений от *0* до *n*], число попаданий в мишень при *n* выстрелах [случайная величина «число выпадения герба» («число выпадения решки») принимает одно из значений от *0* до *n*].

Примеры НСВ: количество выстрелов до первого попадания в цель, количество телефонных звонков, поступивших за минуту в телефонный стол справок, количество бракованных деталей, выпущенных станком-автоматом за смену.

Законом распределения дискретной случайной величины называют перечень ее возможных значений и соответствующих им вероятностей.

X	x_1	x_2	…	p_n
p	p_1	p_2	…	x_n

Очень важный момент: поскольку случайная величина X *обязательно* примет одно из значений $p_1, p_2, \ldots p_n$, то соответствующие события образуют полную группу (система случайных событий такая, что в результате произведённого случайного эксперимента непременно произойдет одно и только одно из них) и сумма вероятностей их наступления равна единице: $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n = 1$ или, если записать свёрнуто:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 . \qquad (19)$$

Это выражение называется *условием нормировки*.

Графически закон распределения задается *многоугольником распределения*, представляющим собой ломаную, соединяющую на плоскости соседние точки A_i (x_i; p_i), где $i = 1, 2, \ldots, n$.

Другим способом описания случайной величины является *функция распределения P* (*X*), значения которой в точке *X* равно вероятности того, что случайная величина *X* примет значение меньшее данного значения аргумента:

$$\mathbf{F(x)} = \mathbf{p}(X < x) \; (-\infty < \mathbf{x} < \infty). \qquad (20)$$

У дискретной случайной величины функция распределения (20) – неубывающая ступенчатая функция, значения которой меняются от нуля до единицы. У непрерывной случайной величины функция распределения является неубывающей непрерывной функцией с такой же областью значений.

Для непрерывной случайной величины имеет смысл ставить вопрос о вероятности попадания ее значений в некоторый интервал *(a, b)*, которая в силу определения функции распределения равна

$$\mathbf{p(a < x < b) = F(b) - F(a)}. \qquad (21)$$

Задать непрерывную случайную величину удобно *функцией плотности распределения* вероятностей, являющуюся производной от функции распределения *F(x):*

$$f(x)=F'(x). \qquad (22)$$

В силу формулы Ньютона-Лейбница

$$p(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx. \qquad (23)$$

Отсюда и из определения функции распределения следует, что

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt. \qquad (24)$$

В частности, при x= ∞ получается вероятность достоверного события

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1. \qquad (25)$$

Ниже укажем формулы основных числовых характеристик дискретной и непрерывной случайных величин (таблица).

Таблица

Числовые характеристики	Дискретные случайные Величины	Непрерывные случайные величины
Математическое ожидание – характеризует среднее значение случайной величины	$M(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$	$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$
Дисперсия – характеризует средний квадрат отклонений значений случайной величины от среднего значения	$D(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(x_i))^2 p_i = M(X^2) - (M(X))^2$, где $M(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 p_i$	$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - M(X)\right)^2 f(x)dx = M(X^2) - (M(X))^2$, где $M(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx$
Среднее квадратическое отклонение указывает разброс значений случайной величины относительно среднего	$\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$	$\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$

Замечание: Существуют и другие показатели вариации значений случайной величины (лимиты, размах вариации).

Пример 11. По мишени стреляют три стрелка. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0,9; вторым – 0,8; третьим – 0,5. Для случайной величины X, равной числу промахов, требуется:

1) составить закон распределения;

2) построить многоугольник распределения;

3) построить функцию распределения F(x);

4) вычислить числовые характеристики – математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение. Случайная величина X – число промахов, может принимать четыре значения: X=0, если все попали в сеть, X=1, если кто-то один из трех промахнулся и т.д.

1) Вычисление вероятности для каждого значения случайной величины было проведено в примере 5: $p(X=0)=p(B_1)=0,36$; $p(X=1)=p(B_5)=0,49$; $p(X=2)=p(B_4)=0,14$; $p(X=3)=p(B_2)=0,01$.

Составим таблицу.

X	0	1	2	3
P	0,36	0,49	0,14	0,01

Проверка: 0,36+0,49+0,14+0,01=1.

Следовательно, мы нашли закон распределения данной случайной величины.

2) Чтобы построить многоугольник распределения, укажем на плоскости XOP 4 точки: A_1 (0; 0,36), A_2 (1; 0,49), A_3(2; 0,14), A_4(3; 0,01) и соединим их ломаной (рис. 1).

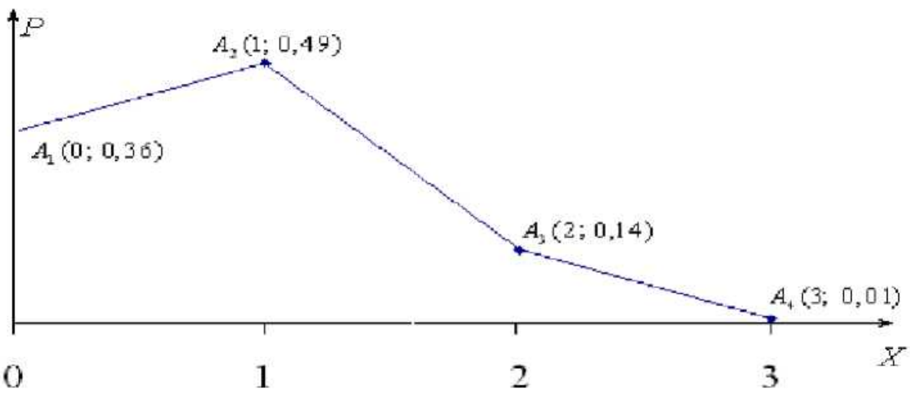

Рис.1

3) Для построения функции распределения $F(x)$ отметим, что ее значения могут меняться только при переходе через точки $X = 0,1, 2, 3$, точнее, должны увеличиваться на соответствующие вероятности.

Например, $F(x = 0) = 0$, т.к. левее нет значений случайной величины. Если $0 < X \leq 1$, то для любого x их этого полуинтервала $F(x) = p(X < x) = p(X = 0) = 0,36$, т.к. левее $X = x$ только одно значение $X = 0$.

Если $1 < X \leq 2$, то для любого x их этого полуинтервала $F(x) = p(X < x) = p(X = 0) + p(X = 1) = 0,36+0,49=0,85$.

Если $2 < X \leq 3$, то для любого x их этого полуинтервала $F(x) = p(X < x) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) = 0,36+0,49+0,14=0,99$.

Если $3 < X$, то для любого x их этого бесконечного промежутка $F(x) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) = 0,36+0,49+0,14+0,01=1$.

Итак, функция $F(x)$ является неубывающей, непрерывной слева функцией, а ее график поднимается “лесенкой” (рис. 2):

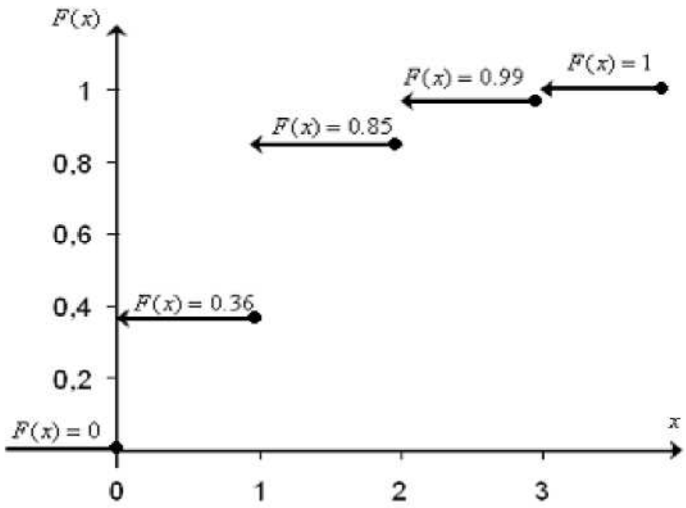

Рис. 2

4) Вычислим числовые характеристики:

Математическое ожидание дискретной случайной величины $\boldsymbol{M(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 0 \cdot 0,36 + 1 \cdot 0,49 + 2 \cdot 0,14 + 3 \cdot 0,01 = 0,8}$.

Дисперсия дискретной случайной величины $\boldsymbol{M(X^2) = M(X^2) - (M(X))^2}$, где $\boldsymbol{M(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 p_i = 0^2 \cdot 0,36 + 1^2 \cdot 0,49 + 2^2 \cdot 0,14 + 3^2 \cdot 0,01 = 1,14}$, тогда

$D(x)=1,14-(0,8)^2= 0,5$.

Среднее квадратическое отклонение $\boldsymbol{\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{0,5} \approx 0,71}$.

<u>Пример 12.</u> Задана функция распределения непрерывной случайной величины

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ Ax^4, & 0 < x \le 2 \\ 1, & 2 < x \end{cases}$$

Требуется:

1) найти параметр A ;
2) построить функцию распределения $F(x)$;
3) найти функцию плотности $f(x)$ и построить ее график;
4) вычислить числовые характеристики - математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение;
5) найти вероятность попадания случайной величины в интервал (0;1).

<u>Решение.</u> 1) В силу непрерывности функции распределения $F(x)$ (слева она, очевидно, непрерывна) она должна быть непрерывна и справа при x = 2 : $Ax^4 \big|_{x=2}=1$, тогда $16A = 1$ и $A = 1/16$.

2) Поскольку $A = 1/16$, то функция распределения имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{x^4}{16}, & 0 < x \le 2 \\ 1, & 2 < x \end{cases}$$

График этой функции укажем ниже.

3) Дифференцируя P(x), получим функцию плотности распределения f(x):

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{x^3}{4}, & 0 < x \le 2 \\ 0, & 2 < x \end{cases}$$

Укажем графики функций F(x) и f(x) (рис. 3).

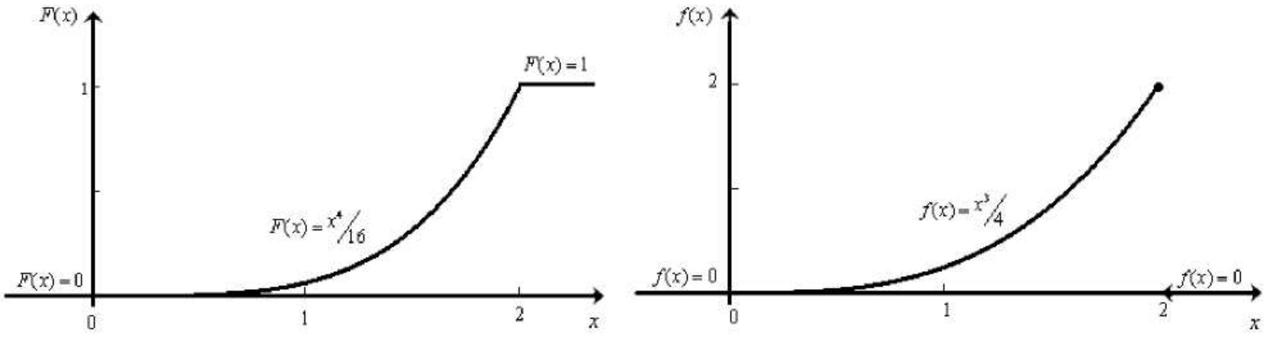

Рис. 3

4) Вычислим числовые характеристики

Математическое ожидание дискретной случайной величины

$$\boldsymbol{M(x)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_{-\infty}^{0} x\cdot 0dx+\int_{2}^{\infty} x\cdot 0dx=\int_{0}^{2}\frac{x^4}{4}dx=\frac{x^5}{20}\Big|_0^2=\ \frac{8}{5}}.$$

Дисперсия непрерывной случайной величины $\boldsymbol{M(X^2)=M(X^2)-(M(X))^2}$, где $\boldsymbol{M(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} x^2\cdot 0dx++\int_{2}^{\infty} x^2\cdot 0dx=\int_{0}^{2}\frac{x^5}{4}dx=\frac{x^6}{24}\Big|_0^2=\frac{64}{24}=\frac{8}{3}}$, тогда

$$\boldsymbol{D(x)=\frac{8}{3}-\frac{8^2}{5}\ =\ \frac{8}{75}}.$$

Среднее квадратическое отклонение $\boldsymbol{\sigma(x)=\sqrt{D(x)}=\sqrt{\frac{8}{75}}\approx 0,33}$.

5) Вероятность попадания случайной величины в интервал (0,1) определяется формулой $\boldsymbol{p(0<X<}1\boldsymbol{)=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{x^3}{4}dx=\frac{x^4}{16}\Big|_0^1=\frac{1}{16}}$.

Ответ: A=1/16, M(X)=8/5, D(X)=8/75, σ(x)≈0,33, $\boldsymbol{p(0<X<}1\boldsymbol{)=\frac{1}{16}}$.

Пример 13. Дана функция плотности распределения непрерывной случайной величины

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \le 1 \\ (x-1)/2, & 1 < x \le 3 \\ 0, & 3 < x \end{cases}$$

Требуется:

1) найти функцию распределения F(x);

2) построить графики функций плотности f(x) и распределения F(x);

3) найти вероятность того, что случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (2, 4).

Решение. 1) найдем функцию распределения F(x):

Если $X \le 1$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)dz = \int_{-\infty}^{x} 0dz = 0.$

Если $1 < X \le 3$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{1} 0dz + \int_{1}^{2} \frac{z-1}{2} dz = 0 + \int_{1}^{x} (\frac{z}{2} - \frac{1}{2})dz = (\frac{z^2}{4} - \frac{z}{2})\Big|_1^x = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}.$

Если $3 < X$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{1} 0dz + \int_{1}^{3} \frac{z-1}{2} dz + \int_{3}^{+\infty} 0dz = 0 + \int_{1}^{3} (\frac{z}{2} - \frac{1}{2})dz = (\frac{z^2}{4} - \frac{z}{2})\Big|_1^3 = 1.$

Итак, искомая функция распределения имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 1 \\ \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}, & 1 < x \le 3. \\ 1, & 3 < x \end{cases}$$

Графики функций f(x) и F(x) приведены на рисунке 4.

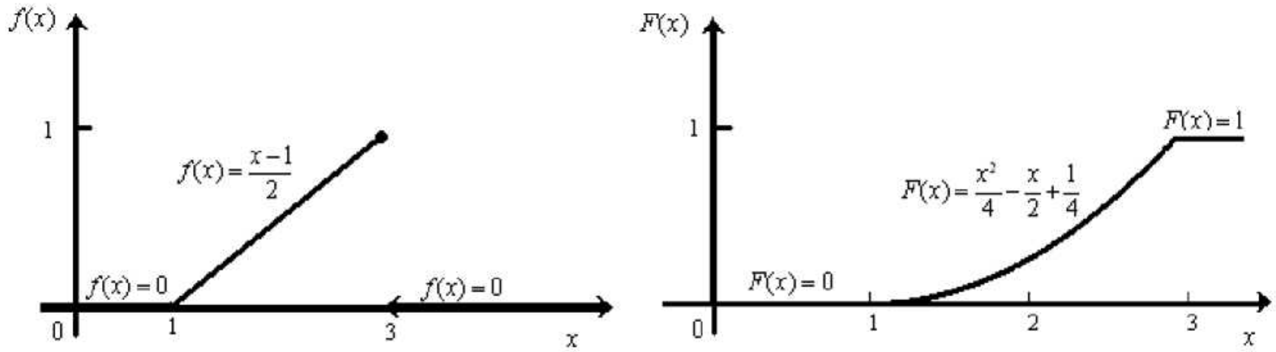

Рис. 4

3) Вероятность попадания СВ в интервал (2,4) определяется формулой $\boldsymbol{p(2 < X <} 4) = \int_2^4 \boldsymbol{f(x)dx} = \int_2^3 \boldsymbol{\frac{x-1}{2}dx} + \int_3^4 \boldsymbol{0dx} = \boldsymbol{\frac{(x-1)^2}{164}}\Big|_2^3 = \boldsymbol{\frac{3}{4}}.$

Ответ: $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 1 \\ \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}, & 1 < x \le 3, \\ 1, & 3 < x \end{cases}$ $p(2 < X < 4) = \frac{3}{4}$.

Для самостоятельного изучения: свойства функции распределения дискретной и непрерывной случайных величин, свойства плотности распределения вероятностей, свойства математического ожидания и дисперсии, моменты случайных величин, основные законы распределения случайных величин.

Тема 4. Генеральная совокупность и выборка. Полигон частот, гистограмма. Эмпирическая функция распределения

Математическая статистика опирается на теорию вероятностей и в свою очередь служит основой для разработки методов обработки и анализа статистических результатов в конкретных областях человеческой деятельности.

Рассмотрим некоторое социальное явление, мнение о котором можно составить по опросу населения. Пусть дано большое множество объектов (листов опроса населения) - данное множество объектов называется *генеральной совокупностью.* Нет возможности изначально перечислить все ответы в листах-опросах, т.е. составить полную группу исходов, но возможно одинаковым ответам присвоить одинаковые номера, таким образом, перевести все ответы на язык цифр. Далее необходимо работать с генеральной совокупностью как со случайной величиной, принимающей численные значения, которые называют *вариантами*. Поскольку листов опроса очень большое количество, берется сравнительно небольшая часть генеральной совокупности. Часть генеральной совокупности называется *выборкой* (количество элементов в ней есть *объем выборки n*), по которой делается вывод обо всей генеральной совокупности: по какому закону она распределена, каковы числовые характеристики распределения. При этом важно, чтобы полученные результаты обладали достаточной достоверностью.

Обычно статистическое распределение задается с помощью таблицы:

X	x_1	x_2	…	x_k
n	n_1	n_2	…	n_k

Графическое изображение статистических данных

Статистическое распределение изображается графически с помощью полигона и гистограммы.

Полигоном частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки с координатами (x_i, n_i); *полигоном частостей* – с координатами (x_i, p_i^*), где $p_i^* = \dfrac{n_i}{n}$, $i = \overline{1,m}$.

Полигон служит для изображения дискретного статистического ряда. Полигон частостей является аналогом многоугольника распределения дискретной случайной величины в теории вероятностей.

Гистограммой частот (частостей) называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основания которых расположены на оси Ox и длины их равны длинам частичных интервалов (h), а высоты равны отношению:

$\dfrac{n_i}{h}$ - для гистограммы частот; $\dfrac{n_i}{n \cdot h}$ - для гистограммы частостей.

Гистограмма является графическим изображением интервального ряда. Площадь гистограммы частот равна n, а гистограммы частостей равна 1.

Можно построить полигон для интервального ряда, если его преобразовать в дискретный ряд. В этом случае интервалы заменяют их серединными значениями и ставят в соответствие интервальные частоты (частости). Полигон получим, соединив отрезками середины верхних оснований прямоугольников гистограммы.

Эмпирическая функция распределения

Пусть получено статистическое распределение выборки и каждому варианту из этой выборки поставлена в соответствие его частость.

Эмпирической функцией (функцией распределения выборки) называется функция $F^*(x)$, определяющая для каждого значения x частость события $\{X < x\}$,

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

- где n - объем выборки, n_x - число наблюдений, меньших x $(x \in R)$.

При увеличении объема выборки частость события $\{X < x\}$ приближается к вероятности этого события. Эмпирическая функция $F^*(x)$ является оценкой интегральной функции $F(x)$ в теории вероятностей.

Функция $F^*(x)$ обладает теми же свойствами, что и функция $F(x)$:

1. $0 \le F^*(x) \le 1$;

2. $F^*(x)$ -неубывающая функция;

3. $F^*(-\infty)=0$, $F^*(+\infty)=1$.

Характеристика параметров распределения	Совокупность	
	генеральная	выборочная
Объем выборки	**N**	n
Альтернативный признак		
Численность единиц совокупности, обладающих признаком x	N_x	n_x
Доля единиц, обладающих изучаемым признаком x	$p = \dfrac{N_x}{N}$	$w = \dfrac{n_x}{n}$
Дисперсия	$\sigma^2 = p(1-p)$	$\sigma^2 = w(1-w)$
Среднее квадратическое отклонение	$\sigma = \sqrt{p(1-p)}$	$\sigma = \sqrt{w(1-w)}$
Количественный признак		
Среднее значение признака	$\mu = \dfrac{\sum x_i}{N}$	$\bar{x} = \dfrac{\sum x_i}{n}$
Дисперсия	$\sigma^2 = \dfrac{\sum (x_i-\mu)^2}{N-1}$	$s^2 = \dfrac{\sum (x_i-\bar{x})^2}{n-1}$
Среднее квадратическое отклонение	$\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum (x_i-\mu)^2}{N-1}}$	$s = \sqrt{\dfrac{\sum (x_i-\bar{x})^2}{n-1}}$

Для самостоятельного изучения: способы получения выборки

Пример 14. Задано интервальное распределение выборки:

$(y_i; y_{i+1}]$	12-15	15-18	18-21	21-24	24-27	27-30
n_i	2	6	12	19	7	4

Требуется:

1) построить гистограмму относительных частот;
2) перейти к вариантам, записать эмпирическую функцию распределения и построить ее график.

Решение: 1) Объем выборки $n = \sum_{i=1}^{6} n_i = 2 + 6 + 12 + 19 + 7 + 4 = 50$. Найдем относительные частоты и выпишем таблицу с относительными частотами:

$(y_i; y_{i+1}]$	12-15	15-18	18-21	21-24	24-27	27-30
w_i	0,04	0,12	0,24	0,38	0,14	0,08

Для построения гистограммы относительных частот на оси абсцисс отложим частичные интервалы длины $h = 3$, высота ступенчатой функции на каждом из интервалов равна $h_i = w_i/h$. Для лучшей наглядности выберем разный масш

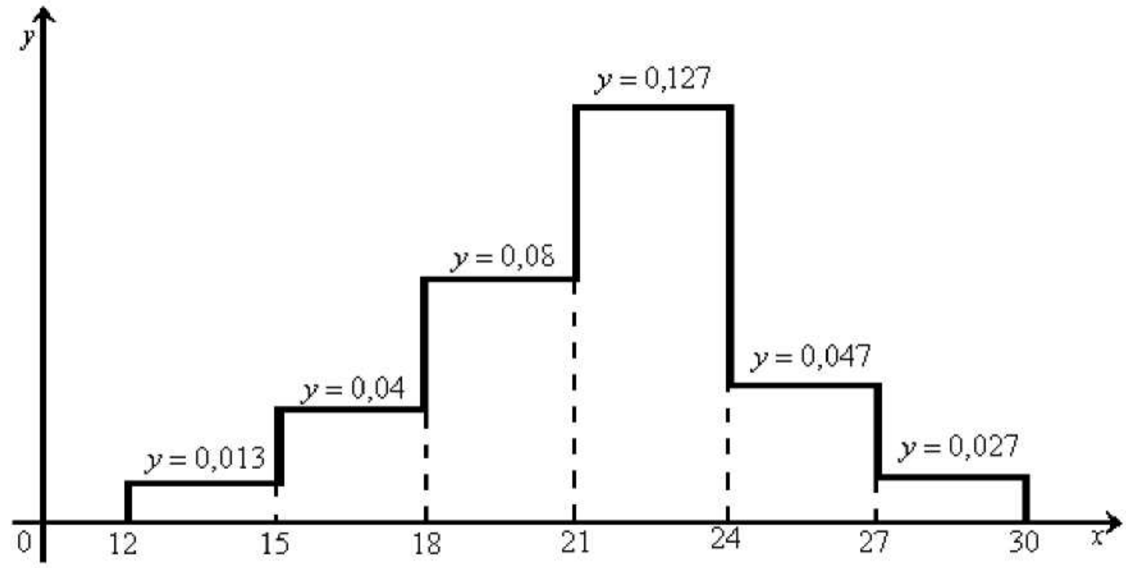

Рис. 5

2) Перейдем к вариантам (50), тогда данному в условии интервальному распределению выборки, будет соответствовать вариационный ряд

$(y_i; y_{i+1}]$	12-15	15-18	18-21	21-24	24-27	27-30
n_i	2	6	12	19	7	4
w_i	0,04	0,12	0,24	0,38	0,14	0,08

Аналогично тому, как находилась функция распределения $P($x) в примере 11, легко написать эмпирическую функцию P^*(x), прибавляя к предыдущему ее значению следующее значение относительной частоты (аналог вероятности p):

$F^*(x)$ = 0, если $X \le 13{,}5$;

F^*(x) = 0,04, если 13,5 < X ≤16,5 ;

$F^*(x)$ = 0,04 + 0,12 = 0,16, если 16,5 < X ≤19,5;

$F^*(x)$ = 0,16 + 0,24 = 0,4, если 19,5 < X ≤ 22,5;

$F^*(x)$ = 0,4 + 0,38 = 0,78, если 22,5 < X ≤25,5 ;

$F^*(x)$ = 0,78 + 0,14 = 0,92, если 25,5 < X ≤ 28,5;

$F^*(x)$ = 0,92 + 0,08 = 1, если 28,5 < X .

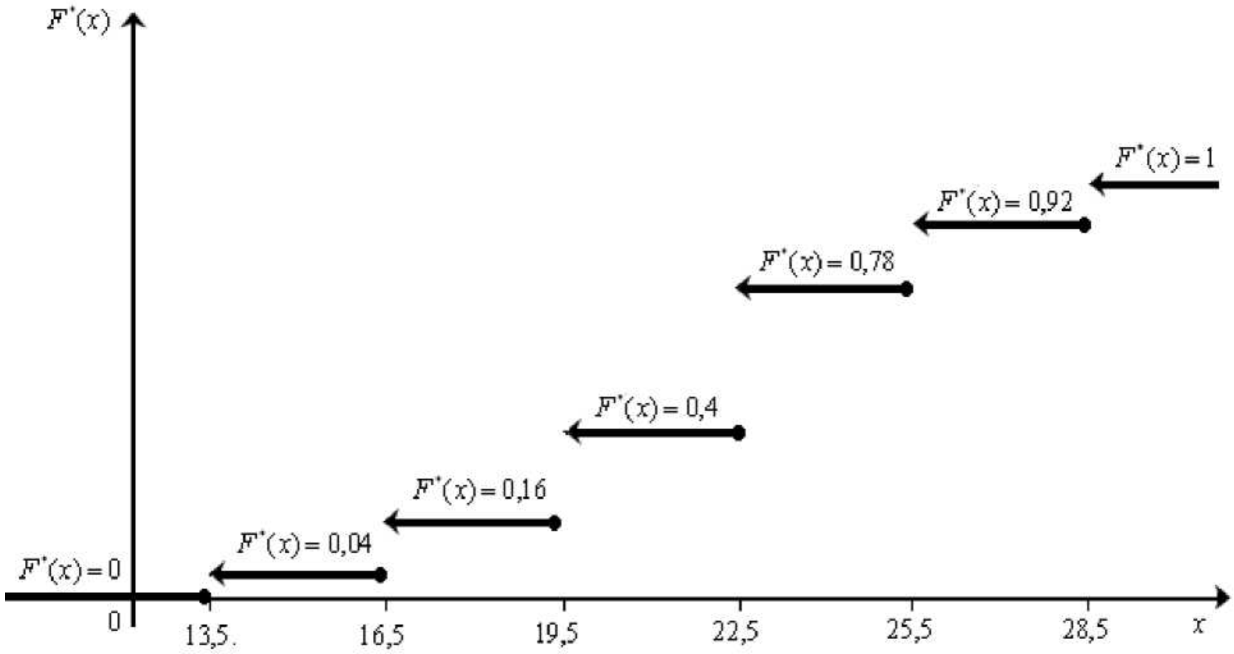

Рис. 6

Наконец, построим график функции F^*(x).

ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Номер варианта	Номера задач в варианте
1	1; 26; 51; 76; 101
2	2; 27; 52; 77; 102
3	3; 28; 53; 78; 103
4	4; 29; 54; 79; 104
5	5; 30; 55; 80; 105
6	6; 31; 56; 81; 106
7	7; 32; 57; 82; 107
8	8; 33; 58; 83; 108
9	9; 34; 59; 84; 109
10	10; 35; 60; 85; 110
11	11; 36; 61; 86; 111
12	12; 37; 62; 87; 112
13	13; 38; 63; 88; 113
14	14; 39; 64; 89; 114
15	15; 40; 65; 90; 115
16	16; 41; 66; 91; 116
17	17; 42; 67; 92; 117
18	18; 43; 68; 93; 118
19	19; 44; 69; 94; 119
20	20; 45; 70; 95; 120
21	21; 46; 71; 96; 121
22	22; 47; 72; 97; 122
23	23; 48; 73; 98; 123
24	24; 49; 74; 99; 124
25	25; 50; 75; 100; 125

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Классическое определение вероятности

1. Сборная конструкция состоит из шести элементов, два из которых одинаковы. Элементы конструкции завозятся на стройку в произвольном порядке. Какова вероятность того, что элементы будут завезены в том порядке, в котором они должны быть смонтированы?
2. В аудитории 8 двухместных парт. Какова вероятность того, что при случайном рассаживании два данных студента из группы в 16 человек окажутся за одной партой?
3. Студент идет на экзамен, выучив 25 вопросов из 36. Какова вероятность ответить на три вопроса, задаваемых преподавателем поочередно?

4. На подмостках лежат три белых и два красных кирпича. Каменщик случайным образом выкладывает их в один ряд. Какова вероятность того, что кирпичи будут чередоваться?
5. Куратор назначает трех наугад выбранных студентов из своей группы делегатами на профсоюзную конференцию. Какова вероятность того, что делегация будет состоять
из одного студента и двух студенток, если в группе 15 студентов и 5 студенток?
6. Бросают три игральных кубика. Какова вероятность того, что сумма выпавших на них очков будет равна трем?
7. Игроку сдают 6 карт из 36. Какова вероятность того, что среди них два туза?
8. Управляющий проверяет наугад 4 СМУ. Какова вероятность того, что номера этих СМУ будут идти в порядке возрастания?
9. На складе имеется 30 мешков цемента марки 300, 50 – марки 400 и 20 – марки 500. Наугад берется один мешок цемента и привозится на стройку. Какова вероятность того, что его придется обменивать на складе на другой мешок, если цемент марки 300 не подходит для планируемой работы?
10. Какова вероятность того, что из группы в 20 студентов при случайном выборе старостой станет студент Иванов, а профоргом – Петров, если в группе есть два студента по фамилии Иванов и один по фамилии Петров?
11. Бросают два игральных кубика. Какова вероятность того, что сумма выпавших на них очков окажется равной шести?
12. Из двух бригад по 10 человек наугад выбирают по одному человеку. Два брата входят в состав различных бригад. Найти вероятность того, что оба брата окажутся выбранными?
13. Бросают два игральных кубика. Какова вероятность того, что произведение выпавших на них очков окажется равным тридцати шести?
14. На строительных лесах лежат 12 красных и 8 белых кирпичей. Наугад берут 3 кирпича. Какова вероятность того, что два из них красные, а один белый?
15. Бросаются две игральные кости. Какова вероятность того, что на них выпадет одинаковое число очков?
16. Из шести карточек с буквами сложено слово “КАРЕТА”. Ребенок перемешивает карточки и снова раскладывает их в ряд. Какова вероятность того, что получится слово “РАКЕТА”?
17. В бригаде каменщиков 6 мужчин и 4 женщины. Случайным образом отбирают бригаду из 7 человек. Какова вероятность того, что среди отобранных окажется 5 мужчин?
18. Бросаются две игральные кости. Какова вероятность того, что выпадет дубль (одинаковое число очков)?
19. Ребенок на компьютере случайно нажимает подряд три разные клавиши. Какова вероятность, что будет напечатано слово “МИР”, если имеется всего 106 клавиш?

20. В аудитории 12 двухместных парт. Какова вероятность того, что при случайном рассаживании два данных студента из группы в 24 человека окажутся за одной партой?
21. Игрок в “Спортлото” зачеркивает 5 чисел из 36. Какова вероятность угадать все 5 номеров?
22. Человек забыл две последние цифры телефона, но помнит, что среди них есть одна цифра “5”. Какова вероятность набрать правильный номер с одной попытки?
23. В партии из 40 смесителей 5 бракованных. Наудачу берут 6 смесителей. Какова вероятность того, что из выбранных есть один бракованный?
24. Ребенок играет с 33 карточками разрезной азбуки, на которых написаны разные буквы русского алфавита. Какова вероятность того, что из наугад сложенных в ряд четырех карточек азбуки получится слово “НЕБО”?
25. Какова вероятность, что при бросании двух игральных костей произведение выпавших на них очков равно 12?

Вероятность суммы и произведения событий

26. Вероятность при одиночном выстреле поразить цель равна 0,4. Сколько нужно провести выстрелов, чтобы с вероятностью не менее 0,9 цель была поражена?
27. Вероятность отказа первого узла прибора – 1/8, а второго – 1/7. Найти вероятность безотказной работы прибора, состоящего из этих двух узлов.
28. При заезде на стройку вероятность прокола шины самосвала равна 0,005. Какова вероятность, что прокола шины не будет при трехкратном заезде на стройку?
29. Стрелок набирает не менее 9 очков в 75% случаев, а вероятность попадания в десятку равна 0,4. Какова вероятность попадания в девятку?
30. Вероятность заболеть во время эпидемии гриппа равна 0,1. Какова вероятность того, что в бригаде из восьми человек никто не заболел?
31. Какова вероятность для студента быть отличником, если вероятность сдать на отлично первый экзамен – 80%, второй – 90% и третий – 95%?
32. Вероятность разрушения у двух конкретных домов при 6-бальном землетрясении равны соответственно 1/10 и 1/15. Найти вероятность того, что оба дома при землетрясении устоят.
33. Баскетболист выполняет два штрафных броска, при этом вероятность попасть в первый раз равна 0,8, а во второй – 0,9. Найти вероятность получить только одно очко из двух.
34. Прибор состоит из трех жизненно важных узлов, отказ каждого из них выводит из строя весь прибор. Какова вероятность безотказной работы всего прибора, если вероятности отказа узлов равны 0,3; 0,2 и 0,1?
35. На стройке работают два крана. Один из них занят 70% всего рабочего времени, а другой – 80%. Какова вероятность того, что в данный момент работает только один кран?

36. Два стрелка стреляют по одной мишени, делая по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле первым стрелком равна 0,8 и вторым – 0,7. Какова вероятность того, что в цель попадет только один стрелок?
37. 90% продукции завода составляют стандартные изделия, из них 70% – высшего сорта. Какова вероятность, что взятое наугад изделие высшего сорта?
38. Вероятность отказа насоса на атомной станции равна 0,001, что приводит к аварии. Сколько надо поставить запасных насосов, чтобы вероятность аварии по вине насосов была 0,000000001?
39.Три орудия стреляют по цели с вероятностями попаданий 0,5, 0,8 и 0,9 соответственно. Цель поражена, если есть хотя бы одно попадание. Найти вероятность поражения цели.
40. Вероятность того, что в течение одной смены возникнет неполадка башенного крана, равна 0,05. Какова вероятность безаварийной работы крана в течение трех смен?
41. По статистическим данным из 100000 десятилетних детей до 40 лет доживают 82277 человек, а до 70 лет – 37965 человек. Найти вероятность для сорокалетних дожить до 70 лет.
42. Стрелок попадает в десятку в 15% случаев и в девятку в 25%. Найти вероятность набора не более 8 очков.
43. Два стрелка стреляют по одной мишени, делая по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле первым стрелком равна 0,7 и вторым – 0,8. Какова вероятность того, что оба попадут в цель?
44. При изготовлении детали заготовка должна пройти 4 операции. Предполагая появление брака на отдельных операциях событиями независимыми, найти вероятность изготовления стандартной детали, если вероятность брака на первой операции 0,02; на второй – 0,01; на третьей – 0,03 и на четвертой – 0,04.
45. Брошены две игральные кости. Чему равна вероятность того, что хотя бы на одной из них выпадет 6 очков?
46. Вероятность завести двигатель автомобиля зимой с одной попытки равна 0,6. Какова вероятность того, что двигатель заведется со второй попытки?
47. Какова вероятность того, что две сданные карты окажутся одной масти, если в колоде 36 карт?
48.У двоих работающих вместе строителей простои составляют соответственно 20% и 30% от всего рабочего времени. Найти вероятность того, что в данный момент работает хотя бы один из них.
49. Сколько раз нужно бросить игральную кость, чтобы с вероятностью не меньшей 0,3 хотя бы один раз выпала шестерка?
50. Экзаменационный билет содержит три вопроса. Вероятности по отдельности ответить на каждый из этих вопросов равна – 0,7, 0,8 и 0,9, соответственно. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необходимо ответить на все три вопроса?

Формула полной вероятности

51. Стреляющий первым во время дуэли может попасть в противника с вероятностью 0,8. При ответном выстреле второй дуэлянт может попасть в первого с вероятность 0,9, если первый промахнулся, и с вероятностью 0,3, если первый попал в него. Найти вероятность второму дуэлянту попасть в первого при ответном выстреле?

52. Вероятности сдать или не сдать экзамен без дополнительных вопросов равны соответственно 0,3 и 0,2. В остальных случаях студенту задаются дополнительные вопросы, вероятность ответить на которые равна 0,6. Какова вероятность того, что студент сдаст экзамен?

53. Пассажир электрички вышел на платформу в пункте А и знает, в каком направлении находится пункт В. Какова вероятность того, что он прибудет в пункт В, если в каждой развилке путник выбирает дорогу в нужном направлении случайным образом? (Схема дорог указана на рис. 7).

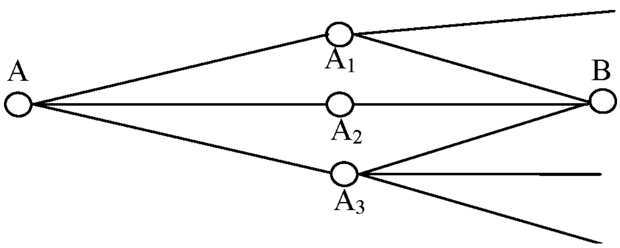

Рис. 7

54. Вероятность обнаружить брак в цехе равна 0,3. Вероятность того, что в дальнейшем брак будет обнаружен в ОТК завода, равна 0,6. Какова вероятность того, что брак будет обнаружен?

55. На стройку поступают плиты с трех железобетонных заводов: 200 плит с первого завода, 400 плит со второго и 900 с третьего. Процент брака изделий этих железобетонных заводов равен соответственно 1,5%, 2% и 2,5%. Найти вероятность того, что плита, поднимаемая краном, стандартная.

56.При оценке остаточных знаний процент справившихся с заданиями составляет 80% у отличников, 60% у хорошистов и 20% у остальных. В потоке из 96 человек 12 отличников и 24 хорошиста по тестируемому предмету. Какова вероятность для наугад выбранного студента справиться с заданием?

57.Нормальный режим работы прибора наблюдается в 90% случаев. Вероятность выхода прибора из строя за время Т в нормальном режиме составляет 0,1, а в противном случае – 0,7. Найти вероятность выхода прибора из строя за время Т.

58. У передвижной бетономешалки остановилось вращение барабана. Есть возможность довести бетон, прежде чем он успеет схватиться, до любой из двух ближайших строек с вероятностями 0,9 и 0,8 соответственно. Кроме того, к первой стройке ведет одна дорога, а ко второй – две. Какова вероятность успешно довезти бетон, если дорога выбрана случайно?

59. На сборку попадают детали с трех станков. Известно, что брак с первого станка составляет 0,3%, со второго – 0,2% с третьего – 0,4%. Найти вероят-

ность попадания на сборку бракованной детали, если с первого и третьего станков поступило по 2000 деталей, а со второго – 1000 деталей.

60. Нормальный режим работы прибора наблюдается в 80% случаев. Вероятность выхода прибора из строя за время Т в нормальном режиме составляет 0,2, а в противном случае – 0,7. Найти вероятность безотказной работы прибора за время Т.

61. В группе из 20 человек 3 отличника и 7 хорошистов. Отличник наверняка сдаст экзамен на отлично или хорошо; хорошист в 10% случаев сдаст на отлично и в 60% случаев сдаст хорошо; а остальные только в 20% случаев получат хорошую оценку. Какова вероятность наугад выбранному студенту этой группы сдать экзамен на “хорошо” или “отлично”?

62. У передвижной бетономешалки остановилось вращение барабана. Есть возможность довести бетон, прежде чем он успеет схватиться, до любой из трех ближайших строек с вероятностями 0,9; 0,7 и 0,8 соответственно. Кроме того, к первой стройке ведет одна дорога, а ко второй и третьей стройкам по две дороги. Какова вероятность успешно довезти бетон, если дорога выбрана случайно?

63. На столе лежит 25 билетов, из них 16 “счастливых” для данного студента. Изменится ли вероятность вытащить “счастливый” билет, если студент идет сдавать экзамен не первым, а вторым?

64. В первой коробке лежит 20 дюбелей, из которых 15 стандартных. Из первой коробки во вторую, содержащую 24 дюбеля (из них 19 стандартных), переложен один дюбель. Какова вероятность после этого достать из второй коробки стандартный дюбель?

65. На стройку поставляют партии кирпичей с трех заводов: с первого – 25000, со второго – 35000 и с третьего – 40000 штук. Процент брака у партий кирпича с этих заводов составляет соответственно 2%, 3% и 4%. Какова вероятность того, что каменщик возьмет из пакета стандартный кирпич, если крановщик поднимает ближайший к нему в данный момент пакет кирпичей?

66. На столе лежит 30 билетов, из них 25 “счастливых” для данного студента. Изменится ли вероятность вытащить “счастливый” билет, если студент идет сдавать экзамен не первым, а вторым?

67. При оценке остаточных знаний процент справившихся с заданиями составляет 70% у отличников, 50% у хорошистов и 10% у остальных. В потоке из 150 человек 16 отличников и 36 хорошиста по тестируемому предмету. Какова вероятность для наугад выбранного студента справиться с заданием?

68. На стройку поступают плиты с трех железобетонных заводов: 100 плит с первого завода, 200 плит со второго и 500 – с третьего. Процент брака изделий железобетонных заводов составляет соответственно 3%, 4% и 2%. Найти вероятность того, что плита, поднимаемая краном, стандартная.

69. Вероятность обнаружить брак в цехе равна 0,6. Вероятность того, что в дальнейшем брак будет обнаружен в ОТК завода, равна 0,85. Какова вероятность того, что брак будет обнаружен?

70.Пассажир электрички вышел на платформу в пункте А и знает, в каком направлении находится пункт В. Какова вероятность того, что он прибудет в пункт В, если после отдыха в одном из пунктов A_1, A_2 или A_3 он может поехать в любом направлении, в том числе и в обратном? (Схема дорог указана на рис. 7)

71. Вероятности сдать или не сдать экзамен без дополнительных вопросов равны соответственно 0,4 и 0,05. В остальных случаях студенту задаются дополнительные вопросы, вероятность ответить на которые равна 0,7. Какова вероятность того, что студент сдаст экзамен?

72. Стреляющий первым во время дуэли может попасть в противника с вероятностью 0,9. При ответном выстреле второй дуэлянт может попасть в первого с вероятность 0,7, если первый промахнулся и с вероятностью 0,2, если первый попал в него. Найти вероятность второму дуэлянту попасть в первого при ответном выстреле.

73. На столе лежит 20 билетов, из них 12 "счастливых" для данного студента. Изменится ли вероятность вытащить "счастливый" билет, если студент идет сдавать экзамен не первым, а вторым?

74. В первой коробке лежит 36 дюбелей, из которых 20 стандартных. Из первой коробки во вторую, содержащую 19 дюбеля (из них 14 стандартных), переложен один дюбель. Какова вероятность после этого достать из второй коробки стандартный дюбель?

75. Пассажир электрички вышел на платформу в пункте А и знает, в каком направлении находится пункт В. Какова вероятность того, что он прибудет в пункт В, если в каждой развилке путник выбирает дорогу в нужном направлении случайным образом? (Схема дорог указана на рис. 8)

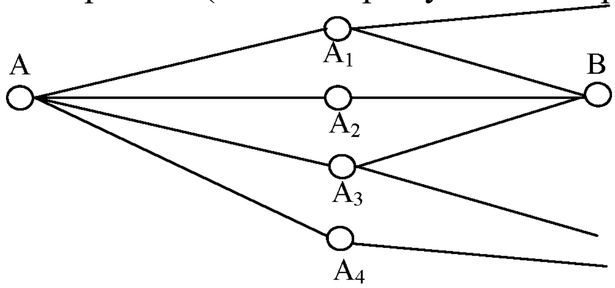

Рис. 8

Повторение испытаний (схема Бернулли)

Задачи №№76-100. Производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие А происходит с вероятностью p. Найти вероятность того, что:

а) событие А произойдет ровно k раз;

б) событие А произойдет не менее k и не более k раз.

№	n	p	k	k1	k2
76.	390	0,6	240	230	235
77.	7	0,7	5	4	6
78.	9	0,4	3	2	4
79.	290	0,7	200	205	216

80.	6	0,7	4	3	6
81.	110	0,03	4	3	5
82.	180	0,7	125	130	140
83.	8	0,6	5	4	7
84.	195	0,6	115	120	130
85.	142	0,02	3	4	5
86.	6	0,4	2	3	5
87.	625	0,6	380	360	370
88.	250	0,01	3	1	4
89.	8	0,7	5	4	6
90.	120	0,04	5	4	6
91.	540	0,4	200	245	260
92.	6	0,9	4	5	6
93.	7	0,3	3	2	4
94.	350	0,6	170	175	190
95.	7	0,4	3	4	6
96.	200	0,8	165	155	170
97.	170	0,03	5	3	5
98.	240	0,7	160	165	175
99.	9	0,8	7	5	7
100.	150	0,02	2	2	4

Дискретные случайные величины

Задачи №№101-125. Три плотника сделали по одному экземпляру одного и того же изделия. Вероятность предоставить готовое изделие без брака для них соответственно равны p_1, p_2, p_3. Составить закон распределения случайной величины X - числа готовых изделий без брака, найти ее математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

№	p_1	p_2	p3
101.	0,9	0,6	0,4
102.	0,6	0,7	0,5
103.	0,7	0,4	0,6
104.	0,4	0,7	0,8
105.	0,9	0,7	0,5
106.	0,6	0,3	0,8
107.	0,9	0,7	0,1
108.	0,8	0,6	0,5
109.	0,5	0,4	0,8
110.	0,9	0,2	0,8
111.	0,6	0,3	0,7
112.	0,3	0,6	0,9
113.	0,8	0,1	0,6
114.	0,6	0,3	0,9
115.	0,9	0,4	0,7
116.	0,7	0,1	0,8
117.	0,2	0,9	0,7

118.	0,8	0,3	0,9
119.	0,5	0,9	0,2
120.	0,2	0,4	0,9
121.	0,2	0,8	0,7
122.	0,4	0,3	0,8
123.	0,7	0,9	0,3
124.	0,9	0,8	0,4
125.	0,8	0,5	0,7

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основные источники:

1. Математика. Практикум : Учебное пособие Для СПО / под общ. ред. Татарникова О. В. - Москва : Юрайт, 2021. - 285 с. - (Профессиональное образование).-ISBN978-5-534-03146-1: 649.00. URL: https://urait.ru/bcode/470068
2. Седых, Ирина Юрьевна. Математика : Учебник и практикум Для СПО / Седых И. Ю., Гребенщиков Ю. Б., Шевелев А. Ю. - Москва : Юрайт, 2021. - 443 с. - (Профессиональное образование). - ISBN 978-5-9916-5914-7 : 1189.00. URL: https://urait.ru/bcode/469860
3. Шипачев, Виктор Семенович. Математика : Учебник и практикум Для СПО / Шипачев В. С. ; под ред. Тихонова А. Н. - 8-е изд. ; пер. и доп. - Москва : Юрайт, 2021. - 447 с. - (Профессиональное образование). - ISBN 978-5-534-13405-6 : 959.00. URL: https://urait.ru/bcode/469417

Дополнительные источники:

1. Далингер, Виктор Алексеевич. Математика: задачи с параметрами в 2 ч. Часть 1 : Учебное пособие Для СПО / Далингер В. А. - 2-е изд. ; испр. и доп. - Москва : Юрайт, 2021. - 466 с. - (Профессиональное образование). - ISBN 978-5-534-04755-4 : 999.00. URL: https://urait.ru/bcode/472773
2. Далингер, Виктор Алексеевич. Математика: задачи с параметрами в 2 ч. Часть 2 : Учебное пособие Для СПО / Далингер В. А. - 2-е изд. ; испр. и доп. - Москва : Юрайт, 2021. - 501 с. - (Профессиональное образование). - ISBN 978-5-534-04757-8 : 1069.00. URL: https://urait.ru/bcode/473040
3. Богомолов, Николай Васильевич. Математика : Учебник Для СПО / Богомолов Н. В., Самойленко П. И. - 5-е изд. ; пер. и доп. - Москва : Юрайт, 2021. - 401 с. - (Профессиональное образование). - ISBN 978-5-534-07878-7 : 1089.00. URL: https://urait.ru/bcode/469433

<u>**Интернет-ресурсы**</u>*:*

1. www.edu.ru
2. www.mathtest.ru
3. www.allmatematika.ru
4. www.ega-math.narod.ru

Приложение

Таблица П. 1

Значения локальной функции Лапласа

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3698
0,4	0,3683	0,3668	0,3652	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0395	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0353	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001

Таблица П. 2

Значения интегральной функции Лапласа

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,0000	**0,50**	0,1915	**1,00**	0,3413	**1,50**	0,4332	**2,00**	0,4772	**3,00**	0,49865
0,01	0,0040	**0,51**	0,1950	**1,01**	0,3438	**1,51**	0,4345	**2,02**	0,4783	**3,20**	0,49931
0,02	0,0080	**0,52**	0,1985	**1,02**	0,3461	**1,52**	0,4357	**2,04**	0,4793	**3,40**	0,49966
0,03	0,0120	**0,53**	0,2019	**1,03**	0,3485	**1,53**	0,4370	**2,06**	0,4803	**3,60**	0,499841
0,04	0,0160	**0,54**	0,2054	**1,04**	0,3508	**1,54**	0,4382	**2,08**	0,4812	**3,80**	0,499928
0,05	0,0199	**0,55**	0,2088	**1,05**	0,3531	**1,55**	0,4394	**2,10**	0,4821	**4,00**	0,499968
0,06	0,0239	**0,56**	0,2123	**1,06**	0,3554	**1,56**	0,4406	**2,12**	0,4830	**4,50**	0,499997
0,07	0,0279	**0,57**	0,2157	**1,07**	0,3577	**1,57**	0,4418	**2,14**	0,4838	**5,00**	0,499997
0,08	0,0319	**0,58**	0,2190	**1,08**	0,3599	**1,58**	0,4429	**2,16**	0,4846		
0,09	0,0359	**0,59**	0,2224	**1,09**	0,3621	**1,59**	0,4441	**2,18**	0,4854		
0,10	0,0398	**0,60**	0,2257	**1,10**	0,3643	**1,60**	0,4452	**2,20**	0,4861		
0,11	0,0438	**0,61**	0,2291	**1,11**	0,3665	**1,61**	0,4463	**2,22**	0,4868		
0,12	0,0478	**0,62**	0,2324	**1,12**	0,3686	**1,62**	0,4474	**2,24**	0,4875		
0,13	0,0517	**0,63**	0,2357	**1,13**	0,3708	**1,63**	0,4484	**2,26**	0,4881		
0,14	0,0557	**0,64**	0,2389	**1,14**	0,3729	**1,64**	0,4495	**2,28**	0,4887		
0,15	0,0596	**0,65**	0,2422	**1,15**	0,3749	**1,65**	0,4505	**2,30**	0,4893		
0,16	0,0636	**0,66**	0,2454	**1,16**	0,3770	**1,66**	0,4515	**2,32**	0,4898		
0,17	0,0675	**0,67**	0,2486	**1,17**	0,3790	**1,67**	0,4525	**2,34**	0,4904		
0,18	0,0714	**0,68**	0,2517	**1,18**	0,3810	**1,68**	0,4535	**2,36**	0,4909		
0,19	0,0753	**0,69**	0,2549	**1,19**	0,3830	**1,69**	0,4545	**2,38**	0,4913		
0,20	0,0793	**0,70**	0,2580	**1,20**	0,3849	**1,70**	0,4554	**2,40**	0,4918		
0,21	0,0832	**0,71**	0,2611	**1,21**	0,3869	**1,71**	0,4564	**2,42**	0,4922		
0,22	0,0871	**0,72**	0,2642	**1,22**	0,3883	**1,72**	0,4573	**2,44**	0,4927		
0,23	0,0910	**0,73**	0,2673	**1,23**	0,3907	**1,73**	0,4582	**2,46**	0,4931		
0,24	0,0948	**0,74**	0,2703	**1,24**	0,3925	**1,74**	0,4591	**2,48**	0,4934		
0,25	0,0987	**0,75**	0,2734	**1,25**	0,3944	**1,75**	0,4599	**2,50**	0,4938		
0,26	0,1026	**0,76**	0,2764	**1,26**	0,3962	**1,76**	0,4608	**2,52**	0,4941		
0,27	0,1064	**0,77**	0,2794	**1,27**	0,3980	**1,77**	0,4616	**2,54**	0,4945		
0,28	0,1103	**0,78**	0,2823	**1,28**	0,3997	**1,78**	0,4625	**2,56**	0,4948		
0,29	0,1141	**0,79**	0,2852	**1,29**	0,4015	**1,79**	0,4633	**2,58**	0,4951		
0,30	0,1179	**0,80**	0,2881	**1,30**	0,4032	**1,80**	0,4641	**2,60**	0,4953		
0,31	0,1217	**0,81**	0,2910	**1,31**	0,4049	**1,81**	0,4649	**2,62**	0,4956		
0,32	0,1255	**0,82**	0,2939	**1,32**	0,4066	**1,82**	0,4656	**2,64**	0,4959		
0,33	0,1293	**0,83**	0,2967	**1,33**	0,4082	**1,83**	0,4664	**2,66**	0,4961		
0,34	0,1331	**0,84**	0,2995	**1,34**	0,4099	**1,84**	0,4671	**2,68**	0,4963		
0,35	0,1368	**0,85**	0,3023	**1,35**	0,4115	**1,85**	0,4678	**2,70**	0,4965		
0,36	0,1406	**0,86**	0,3051	**1,36**	0,4131	**1,86**	0,4686	**2,72**	0,4967		
0,37	0,1443	**0,87**	0,3078	**1,37**	0,4147	**1,87**	0,4693	**2,74**	0,4969		
0,38	0,1480	**0,88**	0,3106	**1,38**	0,4162	**1,88**	0,4699	**2,76**	0,4971		
0,39	0,1517	**0,89**	0,3133	**1,39**	0,4177	**1,89**	0,4706	**2,78**	0,4973		
0,40	0,1554	**0,90**	0,3159	**1,40**	0,4192	**1,90**	0,4713	**2,80**	0,4974		
0,41	0,1591	**0,91**	0,3186	**1,41**	0,4207	**1,91**	0,4719	**2,82**	0,4976		
0,42	0,1628	**0,92**	0,3212	**1,42**	0,4222	**1,92**	0,4726	**2,84**	0,4977		
0,43	0,1664	**0,93**	0,3238	**1,43**	0,4236	**1,93**	0,4732	**2,86**	0,4979		
0,44	0,1700	**0,94**	0,3264	**1,44**	0,4251	**1,94**	0,4738	**2,88**	0,4980		
0,45	0,1736	**0,95**	0,3289	**1,45**	0,4265	**1,95**	0,4744	**2,90**	0,4981		
0,46	0,1772	**0,96**	0,3315	**1,46**	0,4279	**1,96**	0,4750	**2,92**	0,4982		
0,47	0,1808	**0,97**	0,3340	**1,47**	0,4292	**1,97**	0,4756	**2,94**	0,4984		
0,48	0,1844	**0,98**	0,3365	**1,48**	0,4306	**1,98**	0,4761	**2,96**	0,4985		

0,49	0,1879	**0,99**	0,3389	**1,49**	0,4319	**1,99**	0,4767	**2,98**	0,4986		

Таблица П. 3

Значения функции Пуассона

k / λ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679
1	0.0905	0.1637	0.2223	0.2681	0.3033	0.3293	0.3476	0.3595	0.3659	0.3679
2	0.0045	0.0164	0.0333	0.0536	0.0758	0.0988	0.1216	0.1438	0.1647	0.1839
3	0.0002	0.0011	0.0033	0.0072	0.0126	0.0198	0.0284	0.0383	0.0494	0.0613
4	0.0000	0.0001	0.0003	0.0007	0.0016	0.0030	0.0050	0.0077	0.0111	0.0153
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003	0.0007	0.0012	0.0020	0.0031
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

k / λ	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
0	0.1353	0.0498	0.0183	0.0067	0.0025	0.0009	0.0003	0.0001	0.0001
1	0.2707	0.1494	0.0733	0.0337	0.0149	0.0064	0.0027	0.0011	0.0005
2	0.2707	0.2240	0.1465	0.0842	0.0446	0.0223	0.0107	0.0050	0.0023
3	0.1805	0.2240	0.1954	0.1404	0.0892	0.0521	0.0286	0.0150	0.0076
4	0.0902	0.1681	0.1954	0.1755	0.1339	0.0912	0.0572	0.0337	0.0189
5	0.0361	0.1008	0.1563	0.1755	0.1606	0.1277	0.0916	0.0607	0.0378
6	0.0120	0.0504	0.1042	0.1462	0.1606	0.1490	0.1221	0.0911	0.0631
7	0.0034	0.0216	0.0595	0.1045	0.1377	0.1490	0.1396	0.1171	0.0901
8	0.0009	0.0081	0.0298	0.0653	0.1033	0.1304	0.1396	0.1318	0.1126
9	0.0002	0.0027	0.0132	0.0363	0.0689	0.1014	0.1241	0.1318	0.1251
10	0.0000	0.0008	0.0053	0.0181	0.0413	0.0710	0.0993	0.1186	0.1251
11	0.0000	0.0002	0.0019	0.0082	0.0225	0.0452	0.0722	0.0970	0.1137
12	0.0000	0.0001	0.0006	0.0034	0.0113	0.0264	0.0481	0.0728	0.0948
13	0.0000	0.0000	0.0002	0.0013	0.0052	0.0142	0.0296	0.0504	0.0729
14	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0022	0.0071	0.0169	0.0324	0.0521
15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0009	0.0033	0.0090	0.0194	0.0347
16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0015	0.0045	0.0109	0.0217
17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0021	0.0058	0.0128
18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0009	0.0029	0.0071
19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0014	0.0037
20	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0006	0.0019
21	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0009
22	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004
23	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002
24	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
25	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

ОГЛАВЛЕНИЕ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к проведению практических занятий,
выполнению контрольной работы и самостоятельному изучению
дисциплины ЕН.01 Математика для студентов
специальности 21.02.05 «Земельно-имущественные отношения»
строительно-политехнического колледжа
1 и 2 курса очной формы обучения

Составители:
Рыбина Светлана Леонидовна
Чемизова Людмила Александровна

Издается в авторской редакции

Подписано к изданию 04.05.2022.
Уч.-изд. л. 2,4.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»
394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84