ФГБОУ ВПО
«Воронежский государственный технический университет»

Кафедра теоретической и прикладной механики

ПРОГРАММА, МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ

по дисциплине
«Теоретическая механика»
для бакалавров всех направлений
заочной и заочной ускоренной форм обучения

Воронеж 2012

Составители: канд. физ.-мат. наук Н.С. Переславцева, канд. физ.-мат. наук Н.П. Бестужева

УДК 531.8

Программа, методические указания и контрольное задание по дисциплине «Теоретическая механика» для бакалавров всех направлений заочной и заочной ускоренной форм обучения / ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет»; сост. Н.С. Переславцева, Н.П. Бестужева. Воронеж, 2012. 44 с.

Методические указания предназначены для профилей, учебные планы которых предусматривают выполнение одной контрольной работы. Они включают программу курса, содержание заданий, варианты и порядок выполнения заданий, пояснения к текстам задач, вопросы для самостоятельной проверки, список рекомендуемой литературы.

Предназначены для студентов 1–2 курса.

Методические указания подготовлены в электронном виде в текстовом редакторе MS WORD и содержится в файле Теор-Мех-КР-ЗО.document.

Табл. 5. Ил. 47. Библиогр.: 7 назв.

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. М.А. Артёмов

Ответственный за выпуск: зав. кафедрой теоретической и прикладной механики, д-р техн. наук, проф. Д.В. Хван.

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета.

ПРОГРАММА КУРСА

В курсе теоретической механики студенты изучают три ее раздела: статику, кинематику и динамику.

Для изучения курса необходимо иметь соответствующую математическую подготовку. Во всех разделах курса, начиная со статики, широко используется векторная алгебра. Необходимо уметь вычислять проекции векторов на координатные оси, находить геометрически (построением векторного треугольника или многоугольника) и аналитически (по проекциям на координатные оси) сумму векторов, вычислять скалярное и векторное произведения двух векторов и знать свойства этих произведений, а в кинематике и динамике – дифференцировать векторы. Надо также уметь свободно пользоваться системой прямоугольных декартовых координат на плоскости и в пространстве, знать, что такое единичные векторы (орты) этих осей и как выражаются составляющие вектора по координатным осям с помощью ортов.

Для изучения кинематики надо совершенно свободно уметь дифференцировать функции одной переменной, строить графики этих функций, быть знакомым с понятиями о естественном трехграннике, кривизне кривой и радиусе кривизны, знать основы теории кривых 2-го порядка, изучаемой в аналитической геометрии.

Для изучения динамики надо уметь находить интегралы (неопределенные и определенные) от простейших функций, вычислять частные производные и полный дифференциал функций нескольких переменных, а также уметь интегрировать дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными и линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка (однородные и неоднородные) с постоянными коэффициентами.

В программе дается перечень вопросов, которые как основная часть курса должны изучаться студентами всех профилей, и вопросов, которые в зависимости от степени их актуальности для данного профиля и числа часов, отведенных на курс учебным планом, могут по решению кафедры включаться в программу не полностью или не включаться совсем; эти вопросы поставлены в скобках и о включении их в программу кафедра должна сообщить студентам. По решению кафедры для отдельных профилей в программу могут включаться и другие дополнительные вопросы, перечень которых тоже должен быть сообщен студентам.

Введение

Механическое движение как одна из форм движения материи. Предмет механики. Теоретическая механика и ее место среди естественных и технических наук. Механика как теоретическая база ряда областей современной техники. Объективный характер законов механики. Основные исторические этапы развития механики.

Статика

Предмет статики. Основные понятия статики: абсолютно твердое тело, сила, эквивалентные и уравновешенные системы сил, равнодействующая, силы внешние и внутренние. Аксиомы статики. Связи и реакции связей. Основные виды связей: гладкая плоскость или поверхность, гладкая опора, гибкая нить, цилиндрический и сферический шарниры, невесомый стержень; реакции этих связей.

Система сходящихся сил. Геометрический и аналитический способы сложения сил. Сходящиеся силы. Равнодействующая сходящихся сил. Геометрическое и аналитические условия равновесия системы сходящихся сил. Аналитические условия равновесия пространственной и плоской систем сходящихся сил. Теорема о равновесии трех непараллельных сил.

Моменты силы как характеристики вращательного действия силы. Алгебраический момент силы относительно точки на плоскости. Момент силы относительно точки (центра) как вектор. Момент силы относительно оси. Зависимость между моментами силы относительно центра и относительно оси, проходящей через этот центр. Аналитические формулы для вычисления моментов силы относительно трех координатных осей.

Теория пар сил. Пара сил. Вращающий момент пары сил как вектор. Эквивалентность пар. Сложение пар, произвольно расположенных в пространстве. Условия равновесия системы пар. Связи, реакции которых содержат вращающие моменты.

Приведение произвольной системы сил к данному центру. Теорема о параллельном переносе силы. Основная теорема статики о приведении системы сил к данному центру. Главный вектор и главный момент системы сил.

Частные случаи систем сил и условий равновесия. Условия равновесия произвольной системы сил, приложение к твердому телу

Система сил, расположенных на плоскости (плоская система сил). Алгебраическая величина момента силы. Вычисление главного вектора и главного момента плоской системы сил. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей. Равновесие системы тел.

Статически определимые и неопределимые системы.

Равновесие при наличии сил трения.

Система сил, расположенных в пространстве (пространственная система сил). Вычисление главного вектора и главного момента пространственной системы сил. Аналитические условия равновесия произвольной пространственной системы сил. Условия равновесия пространственной системы параллельных сил.

Центр тяжести. Центр тяжести твердого тела и его координаты. Центр тяжести объема, площади и линии. Способы определения положения центров тяжести.

Кинематика

Введение в кинематику. Предмет кинематики. Пространство и время в классической механике. Относительность механического движения. Система отсчета. Задачи кинематики.

Кинематика точки. Векторный способ задания движения точки. Траектория точки. Скорость точки как производная от ее радиуса-вектора по времени. Ускорение точки как производная от вектора скорости по времени. Координатный способ задания движения точки в прямоугольных декартовых координатах. Определение траектории точки. Определение скорости и ускорения точки по их проекциям на координатные оси.

Естественный способ задания движения точки. Оси естественного трехгранника. Алгебраическая величина скорости точки. Определение ускорения точки по его проекциям на оси естественного трехгранника: касательное и нормальное ускорения точки.

Кинематика твердого тела

Поступательное и вращательное движения твердого тела. Поступательное движение твердого тела. Теорема о траекториях, скоростях и ускорениях точек твердого тела при поступательном движении. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Уравнение (закон) вращательного движения твердого тела. Угловая скорость и угловое ускорение тела. Скорость и ускорение точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Вектор угловой скорости тела. (Выражение скорости точки вращающегося тела в виде векторного произведения.)

Плоскопараллельное (плоское) движение твердого тела. Плоское движение твердого тепа и движение плоской фигуры в ее плоскости. Уравнения движения плоской фигуры. Разложение движения плоской фигуры на поступательное вместе с полюсом и вращательное вокруг полюса:

независимость угловой скорости фигуры от выбора полюса. Определение скорости любой точки фигуры как геометрической суммы скорости полюса и скорости этой точки при вращении фигуры вокруг полюса. Теорема о проекциях скоростей двух точек фигуры (тела). Мгновенный центр скоростей. Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью мгновенного центра скоростей. Определение ускорения любой точки плоской фигуры как геометрической суммы ускорения полюса и ускорения этой точки при вращении фигуры вокруг полюса. (Понятие о мгновенном центре ускорений.)

Движение твердого тела вокруг неподвижной точки или сферическое движение. Углы Эйлера. Уравнения движения твердого тела вокруг неподвижной точки. Мгновенная ось вращения тела. Векторы угловой скорости и углового ускорения тела. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела, имеющего одну неподвижную точку.

Общий случай движения свободного твердого тела. Уравнения движения свободного твердого тела. Разложение этого движения на поступательное движение вместе с полюсом и движение вокруг полюса. Определение скоростей и ускорений точек свободного твердого тела.

Сложное движение точки и твердого тела или составное движение. Абсолютное и относительное движения точки; переносное движение. Относительная, переносная и абсолютная скорости и относительное, переносное и абсолютное ускорения точки. Теорема о сложении скоростей. Теорема Кориолиса о сложении ускорений. Модуль и направление кориолисова ускорения. Случай поступательного переносного движения.

Сложное движение твердого тела. Сложение поступательных движений. Сложение мгновенных вращений твердого тела вокруг пересекающихся и параллельных осей. Пара мгновенных вращений. Кинематический винт. Мгновенная винтовая ось.

ДИНАМИКА

Введение в динамику. Предмет динамики. Основные понятия и определения: масса, материальная точка, сила. Силы, зависящие- от времени, от положения точки и от ее скорости. Законы классической механики или законы Галилея-Ньютона. Инерциальная система отсчета. Задачи динамики.

ДИНАМИКА ТОЧКИ

Решение первой и второй задач динамики. Дифференциальные уравнения движения свободной и несвободной материальной точки в декартовых координатах. Уравнения в проекциях на оси естественного трехгранника. Две основные задачи динамики для материальной точки. Решение первой задачи динамики. Решение второй задачи динамики. Начальные условия. Постоянные интегрирования и их определение по начальным условиям. Примеры интегрирования дифференциальных уравнений движения точки.

Несвободное и относительное движения точки. Несвободное движение материальной точки. Дифференциальные уравнения движения точки по заданной гладкой неподвижной кривой. Определение закона движения и реакции связи. Относительное движение материальной точки. Дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки; переносная и кориолисова силы инерции. Принцип относительности классической механики. Случай относительного покоя.

Прямолинейные колебания точки. Свободные колебания материальной точки под действием восстанавливающей силы, пропорциональной расстоянию от центра колебаний. Амплитуда, начальная фаза, частота и период колебаний. Затухающие колебания материальной точки при сопротивлении, пропорциональном скорости; период этих колебаний, декремент колебаний. Апериодическое движение. Вынужденные колебания материальной точки при действии гармонической возмущающей силы и сопротивлении, пропорциональном скорости; случай отсутствия сопротивления. Амплитуда вынужденных колебаний и сдвиг фаз, их зависимость от отношения частот; коэффициент динамичности. Явление резонанса.

Введение в динамику механической системы. Механическая система. Классификация сил, действующих на механическую систему: силы активные (задаваемые) и реакции связей; силы внешние и внутренние. Свойства внутренних сил. Масса системы. Центр масс; радиус-вектор и координаты центра масс.

Моменты инерции. Момент инерции твердого тела относительно оси; радиус инерции. Моменты инерции тела относительно плоскости и полюса. Теорема о моментах инерции относительно параллельных осей или теорема Гюйгенса. Примеры вычисления моментов инерции: моменты инерции однородного тонкого стержня, тонкого круглого кольца или полого цилиндра и круглого диска или сплошного круглого цилиндра. (Формула для вычисления момента инерции относительно оси любого направления. Центробежные моменты инерции. Главные и главные центральные оси инерции и их свойства.)

Теорема о движении центра масс. Дифференциальные уравнения движения механической системы. Теорема о движении центра масс механической системы. Закон сохранения движения центра масс.

Теорема об изменении количества движения. Количество движения материальной точки. Элементарный импульс силы. Импульс силы за конечный промежуток времени и его проекции на координатные оси. Теорема об изменении количества движения материальной точки в дифференциальной и конечной формах. Количество движения механической системы; его выражение через массу системы и скорость ее центра масс. Теорема об изменении количества движения механической системы в дифференциальной и конечной формах. Закон сохранения количества движения механической системы. (Понятие о теле и точке переменной массы. Уравнение Мещерского. Формула Циолковского.)

Теорема об изменении момента количества движения. Момент количества движения материальной точки относительно центра и относительно оси. Теорема об изменении момента количества движения материальной точки. (Центральная сила. Сохранение момента количества движения материальной точки в случае центральной силы. Понятие о секторной скорости. Закон площадей.) Главный момент количеств движения или кинетический момент механической системы относительно центра и относительно оси. Кинетический момент вращающегося твердого тела относительно оси вращения. Теорема об изменении кинетического момента механической системы. Закон сохранения кинетического момента механической системы. (Теорема об изменении кинетического момента механической системы в относительном движении по отношению к центру масс.)

Теорема об изменении кинетической энергии. Кинетическая энергия материальной точки. Элементарная работа силы; аналитическое выражение элементарной работы. Работа силы на конечном перемещении точки ее приложения. Работа силы тяжести, силы упругости и силы тяготения. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки в дифференциальной и конечной формах. Кинетическая энергия механической системы. Формулы для вычисления кинетической энергии твердого тела при поступательном движении, при вращении вокруг неподвижной оси и в общем случае движения (в частности, при плоскопараллельном движении). Теорема об изменении кинетической энергии механической системы в дифференциальной и конечной формах. (Равенство нулю суммы работ внутренних сил в твердом теле.) Работа и мощность сил, приложенных к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси. Понятие о силовом поле. Потенциальное силовое поле и силовая функция. Выражение проекций силы через силовую функцию. Поверхности равного потенциала. Работа силы на конечном перемещении точки в потенциальном силовом поле. Потенциальная энергия. Примеры потенциальных силовых полей: однородное поле тяжести и поле тяготения. Закон сохранения механической энергии.

Динамика твердого тела. Дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Физический маятник. Дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела.

Принцип Даламбера. Принцип Даламбера для материальной точки; сила инерции. Принцип Даламбера для механической системы. Приведение сил инерции точек твердого тела к центру; главный вектор и главный момент сил инерции. Определение динамических реакций подшипников при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси. Случай, когда ось вращения является главной центральной осью инерции тела.

Принцип возможных перемещений и общее уравнение динамики. Связи, налагаемые на механическую систему. Возможные (или виртуальные) перемещения материальной точки и механической системы. Число степеней свободы системы. Идеальные связи. Принцип возможных перемещений. Общее уравнение динамики.

Уравнения движения системы в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа). Обобщенные координаты системы; обобщенные скорости. Выражение элементарной работы в обобщенных координатах. Обобщенные силы и их вычисление; случай сил, имеющих потенциал. Условия равновесия системы в обобщенных координатах. Дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах или уравнения Лагранжа 2-го рода. Уравнения Лагранжа в случае потенциальных сил; функция Лагранжа (кинетический потенциал). Понятие об устойчивости равновесия. Малые свободные колебания механической системы с одной степенью свободы около положения устойчивого равновесия системы и их свойства.

Элементы теории удара. Явление удара. Ударная сила и ударный импульс. Действие ударной силы на материальную точку. Теорема об изменении количества движения механической системы при ударе. Прямой центральный удар тела о неподвижную поверхность; упругий и неупругий удары. Коэффициент восстановления при ударе и его опытное определение. Прямой центральный удар двух тел. Теорема Карно.

СОДЕРЖАНИЕ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ, ВЫБОР ВАРИАНТОВ, ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТ, ОБЩИЕ ПОЯСНЕНИЯ К ТЕКСТУ ЗАДАЧ

Методические указания предназначены студентам тех профилей, что согласно учебной программе выполняют одну контрольную работу. Она состоит из четырех задач: С1 (статика), К1 (кинематика), Д1 и Д2 (динамика).

К каждой задаче дается 10 рисунков и таблица дополнительных условий. Нумерация рисунков двойная. Например, рис. С1.4 – это рис. 4 к задаче С1 и т.д. Номера условий от 0 до 9 проставлены в 1-м столбце таблицы.

Студент во всех задачах выбирает номер рисунка по предпоследней цифре шифра, а номер условия в таблице – по последней. Например, если шифр оканчивается числом 46, то берется рисунок 4 и условие 6 из таблицы. Шифр студента – это номер его зачетной книжки.

Контрольная работа выполняется в ***тетрадке***. На ***обложке*** указывается: название дисциплины, фамилия и инициалы студента, учебный шифр, специальность и факультет, а также номера решаемых задач, номер и год издания методического указания.

Решение каждой задачи желательно начинать с новой страницы на развороте тетради. Сверху указывается номер задачи, делается чертеж (желательно карандашом) и записывается, что в задаче дано и требуется определить (текст задачи не переписывать). ***Чертеж выполняется с учетом условий решаемого варианта задачи,*** на нем все углы, действующие силы, число тел и их расположение на чертеже должны соответствовать этим условиям.

Решение задачи необходимо сопровождать *краткими пояснениями* (какие формулы и теоремы применяются, откуда получаются те или иные результаты и т.п.) и подробно излагать весь ход расчетов. На каждой странице следует оставлять поля для замечаний. На зачет (экзамен) необходимо представить зачтенную преподавателем работу, в которой все погрешности и замечания должны быть исправлены.

При изучении текста каждой задачи учесть следующее. Большинство рисунков дано без соблюдения масштаба. Без оговорок считается, что все нити являются нерастяжимыми и невесомыми, нити, перекинутые через блок (шкив), по блоку не скользят, катки и колеса катятся по плоскостям без скольжения. Все связи, если не сделано других оговорок, считаются идеальными.

Методические указания по решению задач даются для каждой задачи после изложения ее текста под рубрикой «Указания», затем приводится пример решения задачи. Цель примера разъяснить ход решения, но не воспроизводить его полностью. Поэтому, в ряде случаев, промежуточные расчеты опускаются. Но **при выполнении задания все преобразования и числовые расчеты должны быть обязательно проделаны с необходимыми пояснениями, в конце должны быть даны ответы.**

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Обозначения	Размерность	
$\vec{F}$	Н (ньютон)	- вектор силы;
$F = \left\|\vec{F}\right\|$	Н	- величина (модуль) силы;
F_x, F_y, F_z	Н	- проекции силы на оси;
$M_O(\vec{F})$ или $m_O(\vec{F}) = F \cdot h$	Н $\cdot$ м (м – метр)	- алгебраический момент силы относительно точки O на плоскости;
h	м	- плечо силы (расстояние от моментной точки до линии действия силы)
$\vec{M}_O(\vec{F})$ или $\vec{m}_O(\vec{F})$	Н $\cdot$ м	- векторный момент силы относительно центра O;
$M_{Ox}(\vec{F})$, $M_{Oy}(\vec{F})$, $M_{Oz}(\vec{F})$ или $m_{Ox}(\vec{F})$, $m_{Oy}(\vec{F})$, $m_{Oz}(\vec{F})$	Н $\cdot$ м	- моменты силы относительно координатных осей;
M	Н $\cdot$ м	- момент пары сил,
$\vec{v}$	м/с (с – секунда)	- вектор скорости;
$\vec{a}$	м/с^2	- вектор ускорения;
a_n	м/с^2	- нормальное ускорение;
a_τ	м/с^2	- касательное ускорение;
ρ	м	- радиус кривизны траектории;

		Продолжение таблицы
φ		- угол поворота тела;
$\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$	$с^{-1}$	- угловая скорость;
$\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt}$	$с^{-2}$	- угловое ускорение;
P_v, C_v		- мгновенный центр скоростей;
$v_e, v_{пер}$	м/с	- переносная скорость точки;
$v_r, v_{отн}$	м/с	- относительная скорость точки;
$a_e, a_{пер}$	$м/с^2$	- переносное ускорение;
$a_r, a_{отн}$	$м/с^2$	- относительное ускорение;
$a_{кор}$	$м/с^2$	- кориолисово ускорение;
$P = mg$	Н	- вес;
m	кг (килограмм)	- масса;
C		- центр масс системы;
$\vec{q} = m\vec{v}$	$\dfrac{кг \cdot м}{с}$	- количество движения точки;
$\vec{Q} = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \bar{v}_k$	$\dfrac{кг \cdot м}{с}$	- количество движения системы, состоящей из n материальных точек;
$\vec{k}_O = \bar{r} \times m\vec{v}$	$\dfrac{кг \cdot м^2}{с}$	- кинетический момент точки относительно центра O;

Окончание таблицы

$\vec{K}_O = \sum_{k=1}^{n} \bar{r}_k \times m_k \vec{v}_k$	$\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}$	- кинетический момент системы относительно центра O;
R, r	м	- радиусы шкивов,
f		- коэффициент трения;
$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k v_k^2}{2}$	$\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}$	- кинетическая энергия системы;
J	$\text{кг} \cdot \text{м}^2$	- момент инерции тела;
$A(\vec{F})$	$\text{Н} \cdot \text{м}$	- работа силы $\vec{F}$;
$\sum A_k^{(e)}$	$\text{Н} \cdot \text{м}$	- сумма работ внешних сил;
$\overline{\Phi} = -m\vec{a}$	Н	- сила инерции точки;
$\overline{\Phi}_k, \vec{M}_k^{\Phi}$		- главный вектор и главный момент сил инерции k-го тела механической системы;
p		- число степеней свободы системы;
q_i		- обобщенные координаты системы;
$\dot{q}_i$		- обобщенная скорость;
δq_i		- независимые возможные перемещения системы;
δA_F		- возможная работа силы $\vec{F}$;
Q		- обобщенная сила;

ЗАДАЧИ К КОНТРОЛЬНЫМ ЗАДАНИЯМ

Статика

Задача С1

Конструкция состоит из жесткого угольника и стержня, которые в точке C или соединены друг с другом шарнирно (рис. С1.0–С1.5), или свободно опираются друг о друга (рис. С1.6–С1.9).

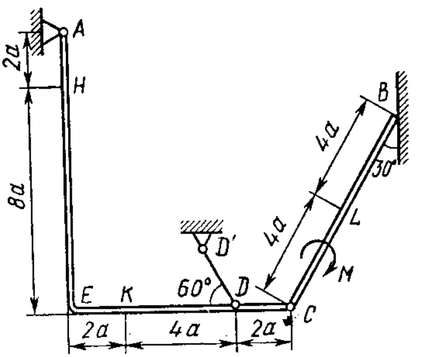


Рис. С1.0

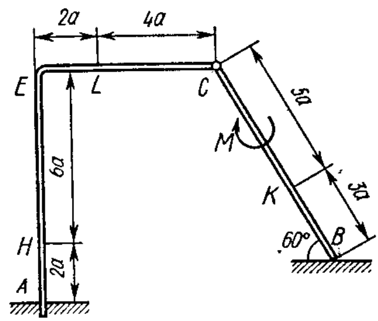


Рис. С1.1

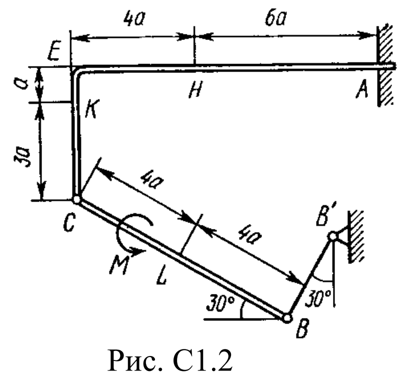


Рис. С1.2

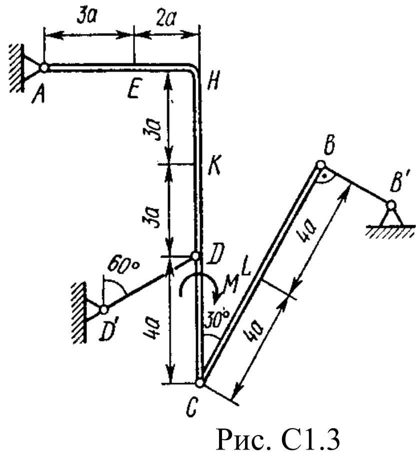


Рис. С1.3

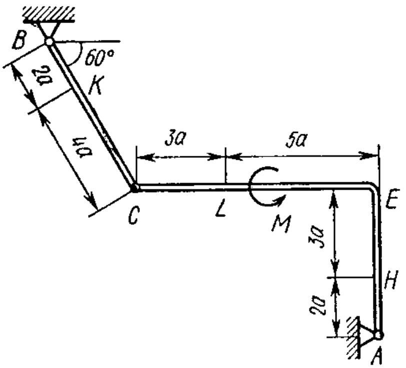


Рис. С1.4

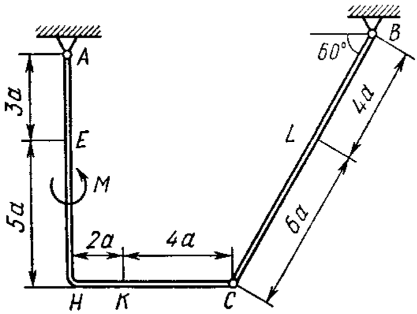


Рис. С1.5

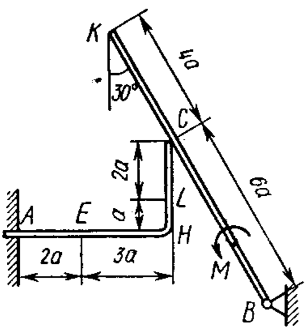


Рис. С1.6

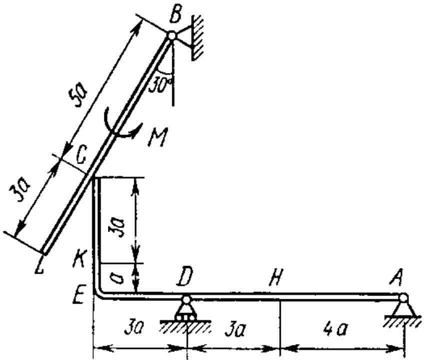


Рис. С1.7

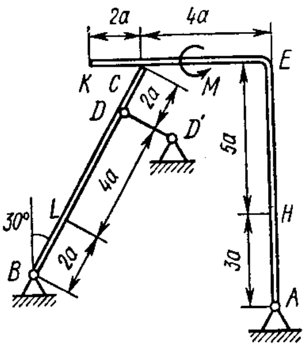


Рис. С1.8

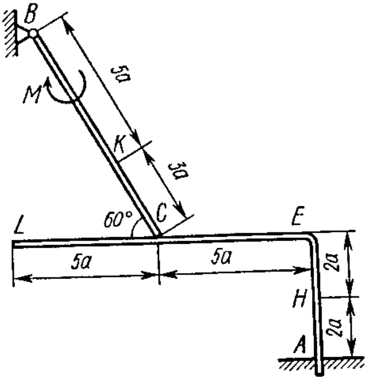


Рис. С1.9

Внешними связями, наложенными на конструкцию, являются в точке A или шарнир, или жесткая заделка; в точке B или гладкая плоскость (рис. С1.0 и С1.1), или невесомый стержень BB' (рис. С1.2 и С1.3), или шарнир (рис. С1.4– С1.9); в точке D или невесомый стержень DD' (рис. С1.0, С1.3, С1.8), или шарнирная опора на катках (рис. С1.7).

На каждую конструкцию действуют: пара сил с моментом $M = 60$ кН$\cdot$м, равномерно распределенная нагрузка интенсивности $q = 20$ кН/м и еще две силы. Эти силы, их направления и точки приложения указаны в табл. С1; там же в столбце «Нагруженный участок» указано, на каком участке действует распределенная нагрузка (например, в условиях № 1 на конструкцию действуют сила $\overline{F}_2$ под углом 60° к горизонтальной оси, приложенная в точке L, сила $\overline{F}_4$ под углом 30° к горизонтальной оси, приложенная в точке E, и нагрузка, распределенная на участке CK).

Определить реакции связей в точках A, B, C (для рис. С1.0, С1.3, С1.7, С1.8 еще и в точке D), вызванные заданными нагрузками.

При окончательных расчетах принять $a = 0{,}2$ м. Направление распределенной нагрузки на различных по расположению участках указано в табл. С1а.

Указания. Задача С1 – на равновесие системы тел, находящихся под действием плоской системы сил. При ее решении можно или рассмотреть сначала равновесие всей системы в целом, а затем равновесие одного из тел системы, изобразив его отдельно, или же сразу расчленить систему и рассмотреть равновесие каждого из тел в отдельности, учтя при этом закон о равенстве действия и противодействия. В задачах, где имеется жесткая заделка, учесть, что ее реакция представляется силой, модуль и направление которой неизвестны, и парой сил, момент которой тоже неизвестен.

Таблица С1

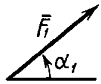
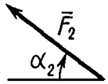
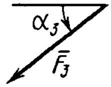
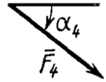
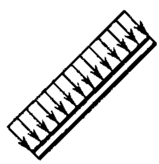
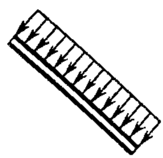
Сила									Нагруженный участок
	$F_1 = 10$ кН		$F_2 = 20$ кН		$F_3 = 30$ кН		$F_4 = 40$ кН		
№ условия	Точка приложения	α, град	Точка приложения	α, град	Точка приложения	α, град	Точка приложения	α, град	
0	K	60	–	–	H	30	–	–	CL
1	–	–	L	60	–	–	E	30	CK
2	L	15	–	–	K	60	–	–	AE
3	–	–	K	30	–	–	H	60	CL
4	L	30	–	–	E	60	–	–	CK
5	–	–	L	75	–	–	K	30	AE
6	E	60	–	–	K	75	–	–	CL
7	–	–	H	60	L	30	–	–	CK
8	–	–	K	30	–	–	E	15	CL
9	H	30	–	–	–	–	L	60	CK

Таблица С1а

Участок на угольнике		Участок на стержне	
горизонтальный	вертикальный	рис. С1.0, С1.3, С1.5, С1.7, С1.8	рис. С1.1, С1.2, С1.4, С1.6, С1.9
			

Пример С1.

На угольник ABC ($\angle ABC = 90°$), конец A которого жестко заделан, в точке C опирается стержень DE (рис. С1,а). Стержень имеет в точке D неподвижную шарнирную опору и к нему приложена сила $\overline{F}$, а к угольнику – равномерно распределенная на участке KB нагрузка интенсивности q и пара с моментом M.

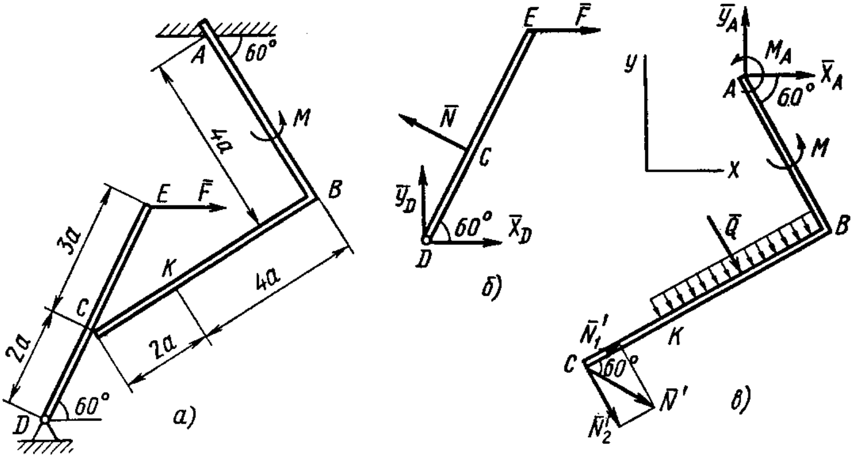


Рис. С1

Д а н о : $F = 10$ кН, $M = 5$ кН$\cdot$м, $q = 20$ кН/м, $a = 0{,}2$ м.

О п р е д е л и т ь : реакции в точках A, C, D.

Решение:

1. Для определения реакций расчленим систему и рассмотрим сначала равновесие стержня DE (рис. С1,б). Проведем координатные оси xy и изобразим действующие на стержень силы: силу $\overline{F}$, реакцию $\overline{N}$, направленную перпендикулярно стержню, и составляющие $\overline{X}_D$ и $\overline{Y}_D$ реакции шарнира D. Для полученной плоской системы сил составляем три уравнения равновесия:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad X_D + F - N\sin 60° = 0; \qquad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad Y_D + N\cos 60^\circ = 0; \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_D(\bar{F}_k) = 0, \quad N \cdot 2a - F \cdot 5a\sin 60^\circ = 0. \tag{3}$$

2. Теперь рассмотрим равновесие угольника (рис. С1,в). На него действуют сила давления стержня $\bar{N}'$, направленная противоположно реакции $\bar{N}$, равномерно распределенная нагрузка, которую заменяем силой $\bar{Q}$, приложенной в середине участка KB (численно $Q = q \cdot 4a = 16$ кН), пара сил с моментом M и реакция жесткой заделки, слагающаяся из силы, которую представим составляющими $\bar{X}_A$ и $\bar{Y}_A$, и пары с моментом M_A. Для этой плоской системы сил тоже составляем три уравнения равновесия:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad X_A + Q\cos 60^\circ + N'\sin 60^\circ = 0; \tag{4}$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad Y_A - Q\sin 60^\circ - N'\cos 60^\circ = 0; \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_A(\bar{F}_k) = 0, \quad M_A + M + Q \cdot 2a + N'\cos 60^\circ \cdot 4a + $$

$$+ N'\sin 60^\circ \cdot 6a = 0. \tag{6}$$

При вычислении момента силы $\bar{N}'$ разлагаем ее на составляющие $\bar{N}_1'$ и $\bar{N}_2'$ и применяем теорему Вариньона. Подставив в составленные уравнения числовые значения заданных величин и решив систему уравнений (1)–(6), найдем искомые реакции. При решении учитываем, что $\bar{N}' = -\bar{N}$ в силу равенства действия и противодействия.

Ответ: $N = 21{,}7$ кН, $X_D = 8{,}8$ кН, $Y_D = -10{,}8$ кН, $X_A = -26{,}8$ кН, $Y_A = 24{,}7$ кН, $M_A = -42{,}6$ кН·м. Знаки «–» указывают, что силы $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_D$ и момент M_A направлены противоположно показанным на рисунках.

Кинематика

Задача К1

Плоский механизм (рис. К1.0 – К1.9) состоит из стержней 1–4 и ползуна B, соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами. Точка D находится в середине стержня AB. Длины стержней равны соответственно $l_1 = 0{,}4$ м, $l_2 = 1{,}2$ м, $l_3 = 1{,}4$ м, $l_4 = 0{,}8$ м. Положение механизма определяется углами $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \theta$. Значения этих углов и других заданных величин указаны в табл. К2. Точка D на всех рисунках и точка K на рис. К1.7 – К1.9 в середине соответствующего стержня. Угловое ускорение стержня 1 $\varepsilon_1 = 10$ с$^{-1}$.

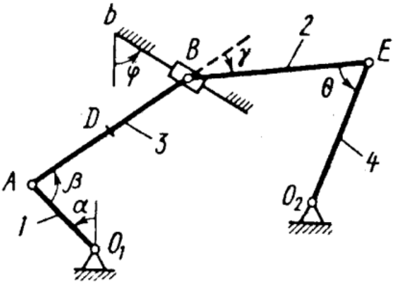


Рис. К1.0

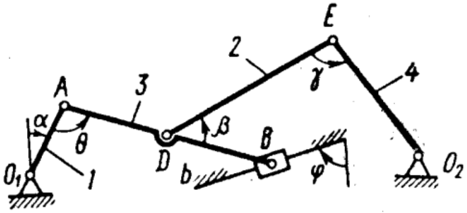


Рис. К1.1

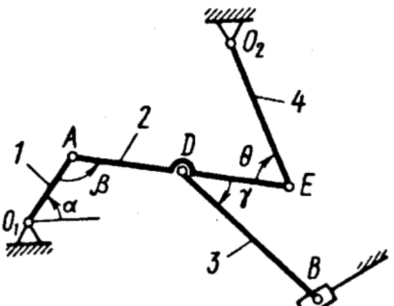


Рис. К1.2

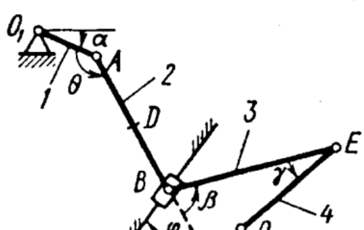


Рис. К1.3

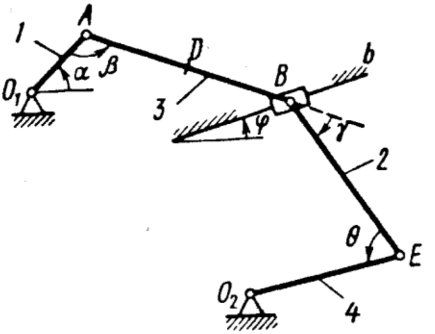


Рис. К1.4

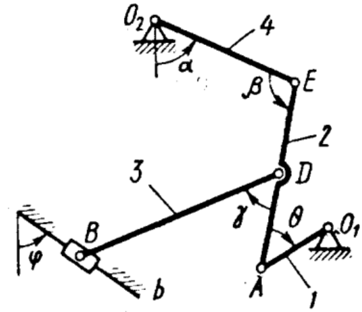


Рис. К1.5

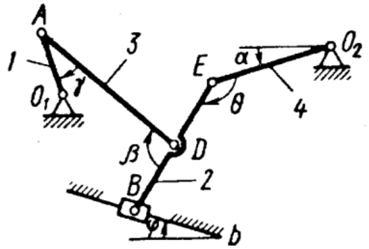


Рис. К1.6

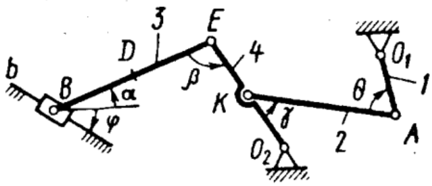


Рис. К1.7

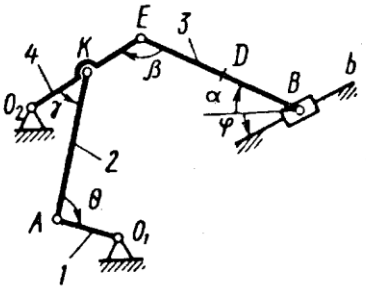


Рис. К1.8

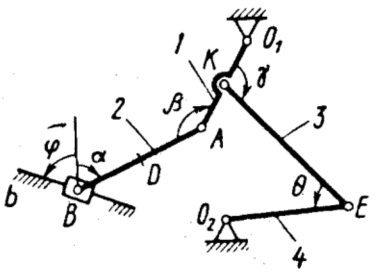


Рис. К1.9

Дуговые стрелки на рисунках показывают, как при построении чертежа механизма должны откладываться соответствующие углы: по ходу или против хода часовой стрелки (например, угол γ на рис. К1.8 отложить от O_2K против хода часовой стрелки, а на рис. К1.9 – по ходу часовой стрелки и т.д.).

Определить ускорение точки A звена 1 и величины, указанные в таблице в столбце «Найти».

Построение чертежа начинать со стержня, направление которого определяется углом α; ползун с направляющими для большей наглядности изобразить так, как в примере К1 (см. рис. К1б).

Заданные угловую скорость и угловое ускорение считать направленными против часовой стрелки, а заданную скорость $\bar{v}_B$ – от точки B к b (на рис. К1.5 – К1.9).

Указания. Задача К1 – на исследование плоскопараллельного движения твердого тела. При ее решении для определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев следует воспользоваться теоремой о проекциях скоростей двух точек тела и понятием о мгновенном центре скоростей, применяя эту теорему (или это понятие) к каждому звену механизма в отдельности.

Таблица К1

№ условия	Углы, град					Дано			Найти	
	α	β	γ	φ	θ	ω_1, 1/с	ω_4, 1/с	v_B, м/с	ω звена	v точки
0	30	150	120	0	60	2	–	–	2	*B, E*
1	60	60	60	90	120	–	3	–	3	*A ,D*
2	0	120	120	0	60	–	–	10	2	*A, E*
3	90	120	90	90	60	3	–	–	2	*D, E*
4	0	150	30	0	60	–	4	–	2	*A, B*
5	60	150	120	90	30	–	–	8	3	*A, E*
6	30	120	30	0	60	5	–	–	3	*B, E*
7	90	150	120	90	30	–	5	–	3	*A, D*
8	0	60	30	0	120	–	–	6	2	*A, E*
9	30	120	120	0	60	4	–	–	3	*B,E*

Пример К1.

Механизм (рис. К1,а) состоит из стержней 1, 2, 3, 4 и ползуна B, соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами.

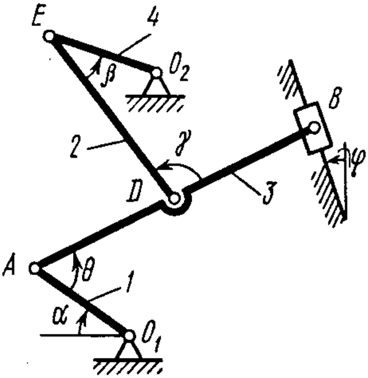


Рис. К1,а

Д а н о : $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 150^\circ$, $\gamma = 90^\circ$, $\varphi = 30^\circ$, $\theta = 30^\circ$, $AD = DB$, $l_1 = 0{,}4$ м, $l_2 = 1{,}2$ м, $l_3 = 1{,}4$ м, $\omega_1 = 2$ с$^{-1}$, $\varepsilon_1 = 7$ с$^{-2}$ (направления ω_1 и ε_1 – против хода часовой стрелки).

О п р е д е л и т ь : v_B, v_E, a_A, ω_2.

Решение:

1. Строим положение механизма в соответствии с заданными углами и выбранным масштабом длин (рис. К1,б; на этом рисунке изображаем все векторы скоростей).

2. Определяем v_B. Точка B принадлежит стержню AB. Чтобы найти v_B, надо знать скорость какой-нибудь другой точки этого стержня и направление $\bar{v}_B$. По данным задачи, учитывая направление ω_1,

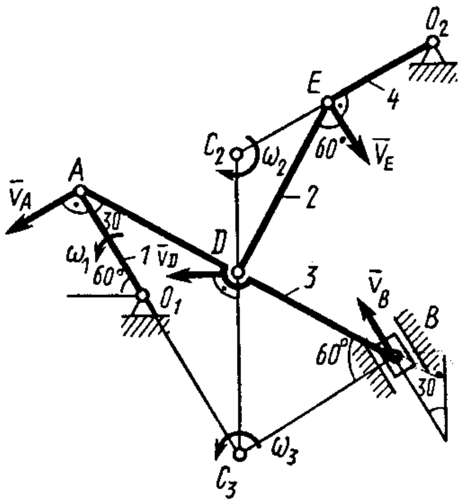


Рис. К1,б

можем определить $\bar{v}_A$. Численно:

$$v_A = \omega_1 l_1 = 0{,}8 \text{ м/с}, \ \bar{v}_A \perp O_1A. \qquad (1)$$

Направление $\bar{v}_B$ найдем, учтя, что точка B принадлежит одновременно ползуну, движущемуся вдоль направляющих поступательно. Теперь, зная $\bar{v}_A$ и направление $\bar{v}_B$, воспользуемся теоремой о проекциях скоростей двух точек тела (стержня AB) на прямую, соединяющую эти точки (прямая AB). Сначала по этой теореме устанавливаем, в какую сторону направлен вектор $\bar{v}_B$ (проекции скоростей должны иметь одинаковые знаки). Затем, вычисляя эти проекции, находим

$$v_B \cos 30^\circ = v_A \cos 60^\circ, \qquad v_B = 0{,}46 \text{ м/с}. \qquad (2)$$

3. Определяем $\bar{v}_E$. Точка E принадлежит стержню DE. Следовательно, по аналогии с предыдущим, чтобы определить $\bar{v}_E$, надо сначала найти скорость точки D, принадлежащей одновременно стержню AB. Для этого, зная $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$, строим мгновенный центр скоростей (МЦС) стержня AB. Это точка C_3, лежащая на пересечении перпендикуляров к $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$, восставленных из точек A и B (к $\bar{v}_A$ перпендикулярен стержень 1). По направлению вектора $\bar{v}_A$ определяем направление поворота стержня AB вокруг МЦС C_3. Вектор $\bar{v}_D$ перпендикулярен отрезку C_3D, соединяющему точки D и C_3, и направлен в сторону поворота. Величину v_D найдем из пропорции:

$$\frac{v_D}{C_3D} = \omega_3 = \frac{v_B}{C_3B}. \qquad (3)$$

Чтобы вычислить C_3D и C_3B, заметим, что ΔAC_3B – прямоугольный, так как острые углы в нем равны 30° и 60°, и что $C_3B = AB \sin 30^\circ = 0{,}5AB = BD$. Тогда ΔBC_3D является равносторонним и $C_3D = C_3B$. В результате равенство (3) дает

$$v_D = v_B = 0{,}46 \text{ м/с}, \qquad \bar{v}_D \perp C_3D. \tag{4}$$

Так как точка E принадлежит одновременно стержню O_2E, вращающемуся вокруг O_2, то $\bar{v}_E \perp O_2E$. Тогда, восставляя из точек E и D перпендикуляры к скоростям $\bar{v}_E$ и $\bar{v}_D$, построим МЦС C_2 стержня DE. По направлению вектора $\bar{v}_D$ определяем направление поворота стержня DE вокруг центра C_2. Вектор $\bar{v}_E$ направлен в сторону поворота этого стержня. Из рис. К2,б видно, что $\angle C_2ED = \angle C_2DE = 30^\circ$, откуда $C_2E = C_2D$. Составив теперь пропорцию, найдем, что

$$\frac{v_E}{C_2E} = \omega_2 = \frac{v_D}{C_2D}, \qquad v_E = v_D = 0{,}46 \text{ м/с}. \tag{5}$$

4. Определяем ω_2. Так как МЦС стержня 2 известен (точка C_2) и $C_2D = l/(2\cos 30^\circ) = 0{,}69$ м, то

$$\omega_2 = \frac{v_D}{C_2D} = 0{,}67 \text{ с}^{-1}. \tag{6}$$

5. Определяем $\bar{a}_A$ (рис. К1,в, на котором изображаем все векторы ускорений). Точка A принадлежит стержню 1. Полное ускорение точки A разложим на тангенциальную и нормальную составляющие:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n,$$

где численно

$$a_A^\tau = \varepsilon_1 l_1 = 2{,}8 \text{ м/с}^2,$$

$$a_A^n = \omega_1^2 l_1 = 1{,}6 \text{ м/с}^2.$$

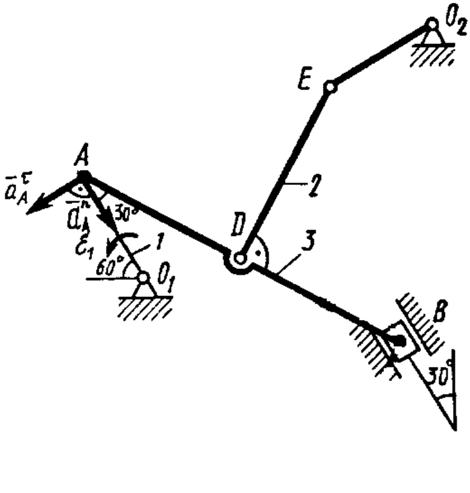


Рис. К1,в.

Вектор $\overline{a}_A^n$ направлен вдоль AO_1, а $\overline{a}_A^\tau$ – перпендикулярно AO_1. Изображаем эти векторы на чертеже (см. рис. К1в). Вычисляем

$$a_A = \sqrt{(a_A^\tau)^2 + (a_A^n)^2} = 3{,}23 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $v_B = 0{,}46$ м/с, $v_E = 0{,}46$ м/с, $\omega_2 = 0{,}67$ с^{-1}, $a_A = 3{,}23$ м/с^2.

Динамика

Задача Д1

Механическая система (рис. Д1.0 – Д1.9) состоит из грузов 1 и 2, цилиндрического сплошного однородного катка 3 и ступенчатых шкивов 4 и 5 с радиусами ступеней $R_4 = 0{,}3$ м, $r_4 = 0{,}1$ м, $R_5 = 0{,}2$ м и $r_5 = 0{,}1$ м. Массу шкивов считать равномерно распределенной по внешнему ободу. Коэффициент трения грузов о плоскость $f = 0{,}1$.

Тела системы соединены друг с другом нитями, намотанными на шкивы; участки нитей параллельны соответствующим плоскостям.

Под действием силы $F = f(s)$, зависящей от перемещения s точки ее приложения, система приходит в движение из состояния покоя. При движении на шкивы действуют постоянные моменты M_4 или M_5 сил сопротивления (от трения в подшипниках).

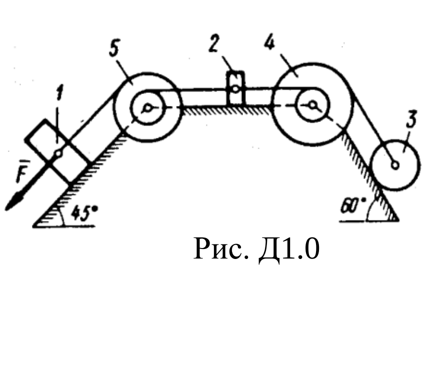


Рис. Д1.0

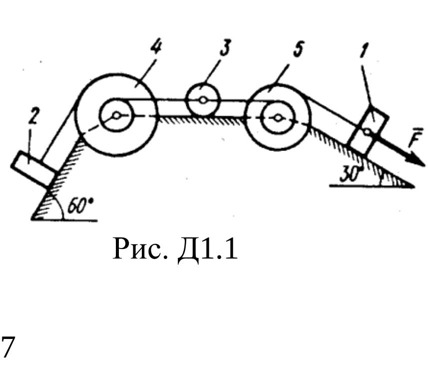


Рис. Д1.1

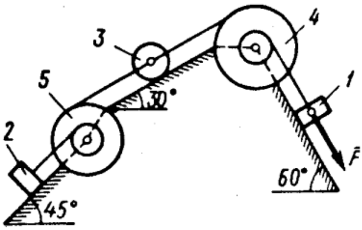


Рис. Д1.2

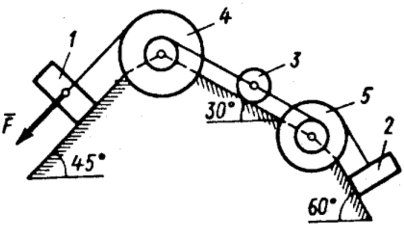


Рис. Д1.3

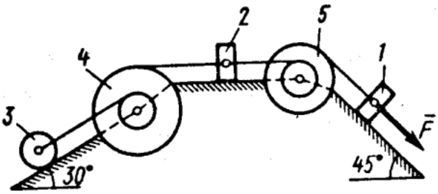


Рис. Д1.4

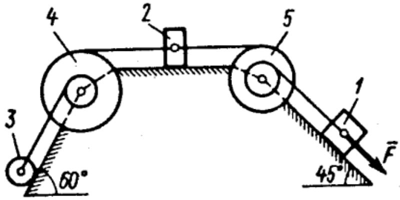


Рис. Д1.5

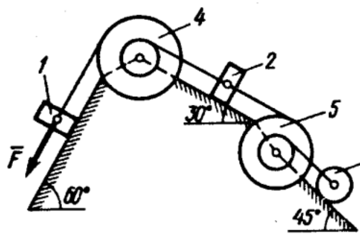


Рис. Д1.6

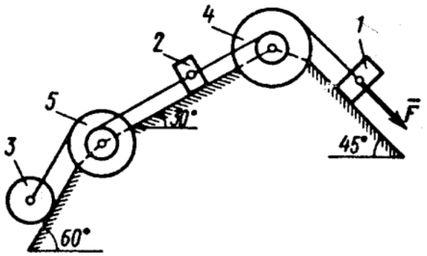


Рис. Д1.7

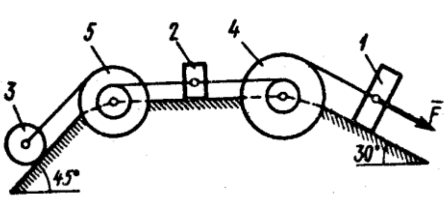


Рис. Д1.8

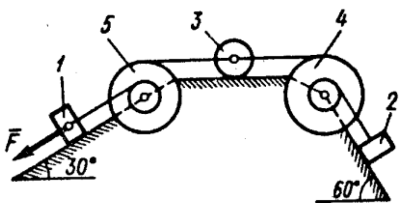


Рис. Д1.9

Определить значение искомой величины в тот момент времени, когда перемещение s станет равным s_1. Искомая величина указана в столбце «Найти» таблицы Д1, где обозначено: v_1, v_2 и v_{C3} – скорости грузов 1, 2 и центра масс тела 3 соответственно, ω_4 и ω_5 – угловые скорости тел 4 и 5.

Каток катится по плоскости без скольжения. На всех рисунках можно не изображать груз 2, если $m_2 = 0$; остальные тела должны изображаться и тогда, когда их масса равна нулю.

Таблица Д1

Номер условия	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	m_4, кг	m_5, кг	M_4, Н·м	M_5, Н·м	s_1, м	$F = f(s)$, Н	Найти
0	2	0	4	6	0	0	0,8	1	$50(2+3s)$	v_1
1	6	0	2	0	8	0,6	0	1,2	$20(6+2s)$	ω_5
2	0	4	6	8	0	0	04,	0,8	$80(3+4s)$	v_{C3}
3	0	2	4	0	9	0,3	0	0,6	$40(4+5s)$	v_2
4	8	0	2	6	0	0	0,6	1,4	$30(3+2s)$	ω_4
5	8	0	4	0	6	0,9	0	1,6	$40(3+5s)$	v_1
6	0	6	2	8	0	0	0,8	1	$60(2+5s)$	ω_4
7	0	4	6	0	9	0,6	0	0,8	$30(3+3s)$	ω_5
8	6	0	4	0	8	0,3	0	1,6	$40(2+5s)$	v_{C3}
9	0	4	6	9	0	0	0,4	1,4	$50(3+2s)$	v_2

Указания. Задача Д1 – на применение теоремы об изменении кинетической энергии системы. При решении задачи учесть, что кинетическая энергия T системы равна сумме кинетических энергий всех входящих в систему тел; эту энергию нужно выразить через ту скорость (линейную или угловую), которую в задаче надо определить. При вычислении

T для установления зависимости между скоростями точек тела, движущегося плоскопараллельно, или между его угловой скоростью и скоростью центра масс воспользоваться мгновенным центром скоростей (кинематика). При вычислении работы надо все перемещения выразить через заданное перемещение s_1, учтя, что зависимость между перемещениями здесь будет такой же, как между соответствующими скоростями.

Пример Д1.

Механическая система (рис. Д1,а) состоит из сплошного однородного цилиндрического катка 1, подвижного блока 2, ступенчатого шкива 3 с радиусами ступеней R_3 и r_3 и радиусом инерции относительно оси вращения ρ_3, блока 4 и груза 5 (коэффициент трения груза о плоскость равен f). Тела системы соединены нитями, намотанными на шкив 3. К центру E блока 2 прикреплена пружина с коэффициентом жесткости c; ее начальная деформация равна нулю. Система приходит в движение из состояния покоя под действием силы $F = f(s)$, зависящей от перемещения s точки ее приложения. На шкив 3 при движении действует постоянный момент M сил сопротивления.

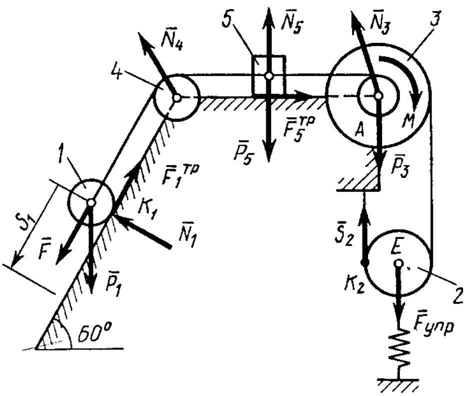


Рис. Д1,а

Д а н о: $m_1 = 8$ кг, $m_2 = 0$ кг, $m_3 = 4$ кг, $m_4 = 0$ кг, $m_5 = 10$ кг, $R_3 = 0{,}3$ м, $r_3 = 0{,}1$ м, $\rho_3 = 0{,}2$ м, $f = 0{,}1$, $c = 240$ Н/м, $M = 0{,}6$ Н·м, $F = 20(3 + 2s)$ Н, $s_1 = 0{,}2$ м.

О п р е д е л и т ь : ω_3 в тот момент времени, когда $s = s_1$.

Решение:

1. Рассмотрим движение неизменяемой механической системы, состоящей из весомых тел 1, 3, 5 и невесомых тел 2, 4, соединенных нитями. Изобразим действующие на систему внешние силы: активные $\overline{F}$, $\overline{F}_{упр}$, $\overline{P}_1$, $\overline{P}_3$, $\overline{P}_5$, реакции $\overline{N}_1$, $\overline{N}_3$, $\overline{N}_4$, $\overline{N}_5$, натяжение нити $\overline{S}_2$, силы трения $\overline{F}_1^{тр}$, $\overline{F}_5^{тр}$ и момент M.

Для определения ω_3 воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии:

$$T - T_0 = \sum A_k^{e}. \qquad (1)$$

2. Определяем T_0 и T. Так как в начальный момент система находилась в покое, то $T_0 = 0$. Величина T равна сумме энергий всех тел системы:

$$T = T_1 + T_3 + T_5. \qquad (2)$$

Учитывая, что тело 1 движется плоскопараллельно, тело 5 – поступательно, а тело 3 вращается вокруг неподвижной оси, получим

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_{C1}^2 + \frac{1}{2} I_{C1} \omega_1^2,$$

$$T_3 = \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2,$$

$$T_5 = \frac{1}{2} m_5 v_5^2, \qquad (3)$$

Все входящие сюда скорости надо выразить через искомую ω_3. Для этого предварительно заметим, что $v_{C1} = v_5 = v_A$, где A – любая точка обода радиуса r_3 шкива 3 и что точка K_1 – мгновенный центр скоростей катка 1, радиус которого обозначим r_1. Тогда

$$v_{C1} = v_5 = v_A = \omega_3 r_3, \quad \omega_1 = \frac{v_{C1}}{K_1 C_1} = \frac{v_{C1}}{r_1} = \omega_3 \frac{r_3}{r_1}. \qquad (4)$$

Кроме того, входящие в (3) моменты инерции имеют значения

$$I_{C1} = \frac{1}{2} m_1 r_1^2, \qquad I_3 = m_3 \rho_3^2. \tag{5}$$

Подставив все величины (4) и (5) в равенства (3), а затем, используя равенство (2), получим окончательно

$$T = \left(\frac{3}{4} m_1 r_3^2 + \frac{1}{2} m_3 \rho_3^2 + \frac{1}{2} m_5 r_3^2 \right) \omega_3^2. \tag{6}$$

3. Найдем сумму работ всех действующих внешних сил при перемещении, которое будет иметь система, когда центр катка 1 пройдет путь s_1. Введя обозначения: s_5 – перемещение груза 5 ($s_5 = s_1$), φ_3 – угол поворота шкива 3, λ_0 и λ_1 – начальное и конечное удлинения пружины, получим

$$A(\overline{F}) = \int_0^{s_1} 20(3 + 2s)\,ds = 20(3s_1 + s_1^2),$$

$$A(\overline{P}_1) = P_1 s_1 \sin 60^\circ,$$

$$A(\overline{F}_5^{mp}) = -F_5^{mp} s_5 \sin 60^\circ = -f P_5 s_1,$$

$$A(M) = -M\varphi_3,$$

$$A(\overline{F}_{ynp}) = \frac{c}{2}(\lambda_0^2 - \lambda_1^2).$$

Работы остальных сил равны нулю, т.к. точки K_1 и K_2, где приложены силы $\overline{N}_1$, $\overline{F}_1^{mp}$ и $\overline{S}_2$ – мгновенные центры скоростей; точки, где приложены силы $\overline{P}_3$, $\overline{P}_5$ и $\overline{N}_3$ – неподвижны; а сила $\overline{N}_5$ – перпендикулярна перемещению груза.

По условиям задачи, $\lambda_0 = 0$. Тогда $\lambda_1 = s_E$, где s_E – перемещение точки E (конца пружины). Величины s_E и φ_3 надо выразить через заданное перемещение s_1. Для этого учтем, что зависимость между перемещениями здесь такая же, как и между соответствующими скоростями. Тогда, так как

$\omega_3 = \dfrac{v_A}{r_3} = \dfrac{v_{C1}}{r_3}$ (равенство $v_{C1} = v_A$ уже отмечалось), то и $\varphi_3 = \dfrac{s_1}{r_3}$.

Из рис. Д1,б видно, что $v_D = v_B = \omega_3 R_3$, а так как точка K_2 является мгновенным центром скоростей для блока 2 (он как бы «катится» по участку нити $K_2 L$), то $v_E = \dfrac{1}{2} v_D = \dfrac{1}{2}\omega_3 R_3$; следовательно, и

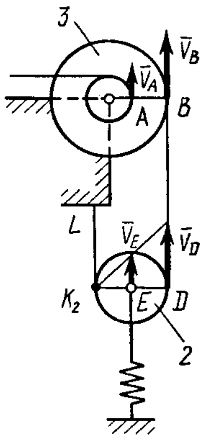


Рис. Д1,б

$\lambda_1 = s_E = \dfrac{1}{2}\varphi_3 R_3 = \dfrac{s_1 R_3}{2 r_3}$. При найденных значениях φ_3 и λ_1 для суммы вычисленных работ получим

$$\sum A_k^{(e)} = 20\left(s_1 + s_1^2\right) + P_1 s_1 \sin 60^\circ - f P_5 s_1 -$$
$$- M\frac{s_1}{r_3} - \frac{c}{8}\frac{R_3^2}{r_3^2} s_1^2. \qquad (7)$$

Подставляя выражения (6) и (7) в уравнение (1) и учитывая, что $T_0 = 0$, придем к равенству

$$\left(\frac{3}{4} m_1 r_3^2 + \frac{1}{2} m_3 \rho_3^2 + \frac{1}{2} m_5 r_3^2\right)\omega_3^2 = 20\left(s_1 + s_1^2\right) +$$
$$+ P_1 s_1 \sin 60^\circ - f P_5 s_1 - M\frac{s_1}{r_3} - \frac{c}{8}\frac{R_3^2}{r_3^2} s_1^2. \qquad (8)$$

Из равенства (8), подставив в него числовые значения заданных величин, найдем искомую угловую скорость ω_3.

О т в е т : $\omega_3 = 8{,}1$ с$^{-1}$.

Задача Д2

Механическая система состоит из однородных ступенчатых шкивов 1 и 2, обмотанных нитями, грузов 3–6, прикрепленных к этим нитям, и невесомого блока (рис. Д2.0 – Д2.9, табл. Д2).

Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и пары сил с моментом M, приложенной к одному из шкивов. Радиусы ступеней шкива 1 равны: $R_1 = 0{,}2$ м, $r_1 = 0{,}1$ м, шкива 2 – $R_2 = 0{,}3$ м, $r_2 = 0{,}15$ м; их радиусы инерции относительно осей вращения равны соответственно $\rho_1 = 0{,}1$ м и $\rho_2 = 0{,}2$ м.

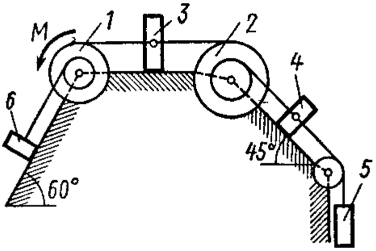


Рис. Д2.0

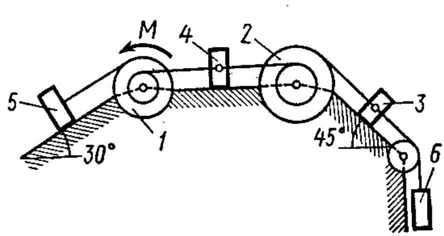


Рис. Д2.1

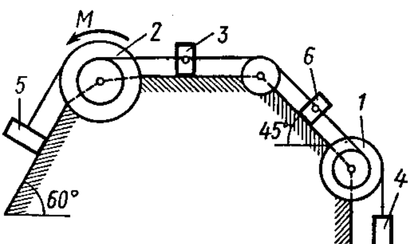


Рис. Д2.2

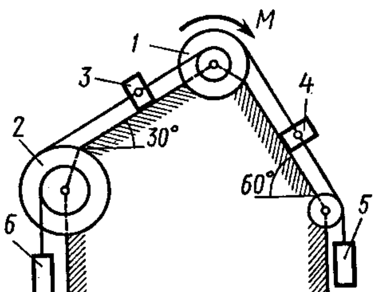


Рис. Д2.3

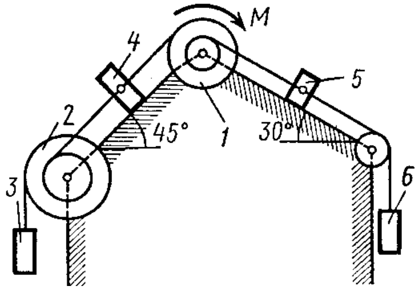


Рис. Д2.4

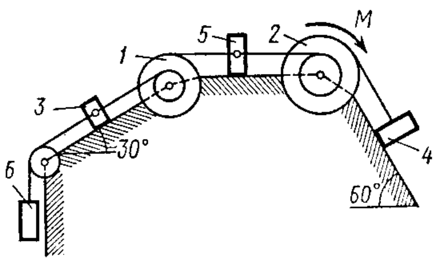


Рис. Д2.5

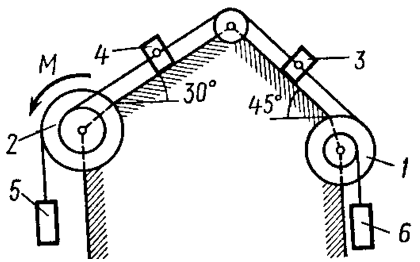


Рис. Д2.6

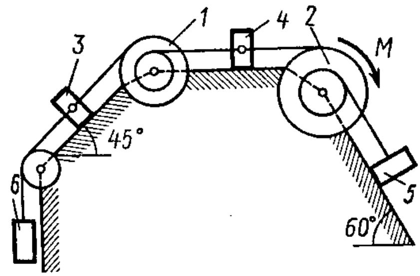


Рис. Д2.7

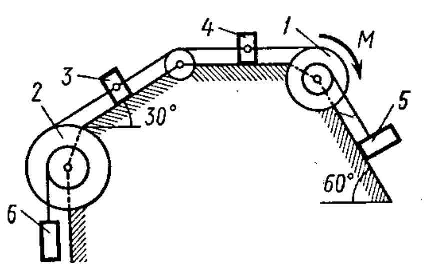


Рис. Д2.8

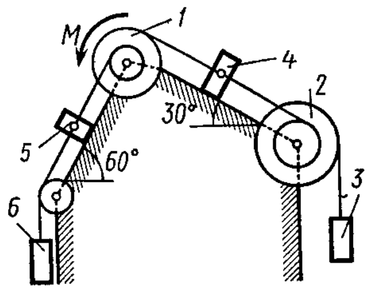


Рис. Д2.9

Пренебрегая трением, найти ускорение тела, имеющего больший вес; веса $P_1,\ldots,P_6$ шкивов и грузов заданы в таблице. Грузы, веса которых равны нулю, на чертеже можно не изображать (шкивы 1, 2 изображать всегда как части системы).

Таблица Д2

Номер условия	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	M, Н · м
0	10	0	20	30	40	0	10
1	0	40	0	10	20	30	12
2	20	30	40	0	10	0	16
3	0	20	10	30	0	40	18
4	30	0	20	0	40	10	12
5	0	10	30	40	20	0	16
6	40	0	0	20	30	10	10
7	10	20	0	40	0	30	18
8	0	40	10	0	30	20	12
9	30	0	40	20	10	0	16

Указания. Задача Д2 – на применение к изучению движения системы уравнений Лагранжа. В задаче система имеет одну степень свободы, ее положение определяется одной обобщенной координатой и для нее должно быть составлено одно уравнение движения. В задачах, где требуется найти ускорение груза 3 (4, 5 или 6), за обобщенную координату удобно принять координату x, характеризующую перемещение этого груза. Для составления уравнения Лагранжа необходимо найти кинетическую энергию T системы и выразить все входящие в нее скорости через обобщенную скорость $\dot{x}$, а затем вычислить обобщенную силу Q. Для этого надо сообщить системе возможное (малое) перемещение, при котором выбранная координата x получит приращение δx, и составить уравнение работ всех сил на этом перемещении. Коэффициент при δx в выражении элементарной работы и будет искомой обобщенной силой. Дальнейший ход решения задачи разъяснен в примере Д2.

Пример Д2.

Механическая система (рис. Д2) состоит из обмотанных нитями блока 1 радиуса R_1 и ступенчатого шкива 2 (радиусы ступеней R_2 и r_2, радиус инерции относительно оси вращения ρ_2), и из грузов 3 и 4, прикрепленных к этим нитям. Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и пары сил с моментом M, приложенной к блоку 1.

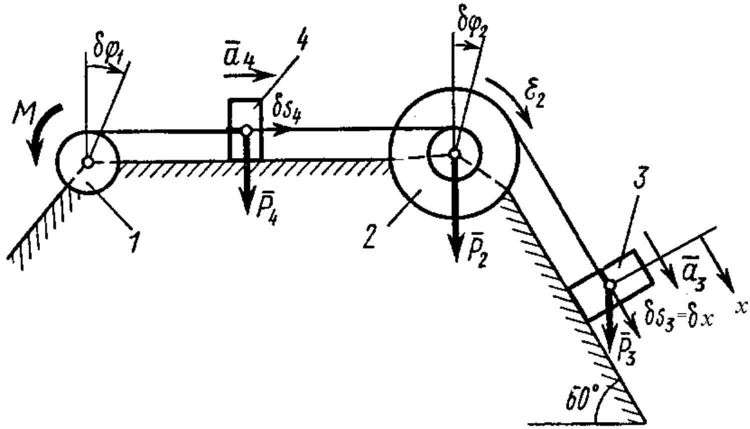


Рис. Д.2

Д а н о : $P_1 = 0$ Н, $P_2 = 30$ Н, $P_3 = 40$ Н, $P_4 = 20$ Н, $M = 16$ Н·м, $R_1 = 0{,}2$ м, $R_2 = 0{,}3$ м, $r_2 = 0{,}15$ м; $\rho_2 = 0{,}2$ м.

О п р е д е л и т ь : ускорение груза 3, пренебрегая трением.

Решение:

1. Рассмотрим движение механической системы, состоящей из тел 1, 2, 3, 4, соединенных нитями. Система имеет одну степень свободы. Связи, наложенные на эту систему, – идеальные. Выберем в качестве обобщенной координаты перемещение x груза 3, полагая, что он движется вниз и отсчитывая x в сторону движения (рис. Д2). Составим уравнение Лагранжа:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=Q\,. \qquad (1)$$

2. Определим кинетическую энергию всей системы, равную сумме кинетических энергий всех тел:

$$T=T_2+T_3+T_4\,. \qquad (2)$$

Грузы 3 и 4 движутся поступательно, поэтому шкив 2 вращается вокруг неподвижной оси, следовательно

$$T_2=\frac{1}{2}I_2\omega_2^2=\frac{1}{2}m_2\rho_2^2\omega_2^2\,,\quad T_3=\frac{1}{2}m_3v_3^2\,,\quad T_4=\frac{1}{2}m_4v_4^2\,. \quad (3)$$

Скорости ω_2, v_3 и v_4 выразим через обобщенную скорость $\dot{x}$:

$$\omega_2=\frac{\dot{x}}{r_2}\,,\quad v_3=\dot{x}\,,\quad v_4=\dot{x}\frac{r_2}{R_2}\,. \qquad (4)$$

Подставляя значения величин (4) в равенства (3), а затем значения T_2, T_3 и T_4 в соотношение (2), получим:

$$T=\frac{1}{2g}\left(P_3+P_4\,\frac{r_2^2}{R_2^2}+P_2\,\frac{\rho_2^2}{R_2^2}\right)\dot{x}^2\,. \qquad (5)$$

Так как кинетическая энергия зависит только от $\dot{x}$, производные левой части уравнения (1) примут вид:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=\frac{1}{g}\left(P_3+P_4\,\frac{r_2^2}{R_2^2}+P_2\,\frac{\rho_2^2}{R_2^2}\right)\dot{x}\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)=\frac{1}{g}\left(P_3+P_4\,\frac{r_2^2}{R_2^2}+P_2\,\frac{\rho_2^2}{R_2^2}\right)\ddot{x}\,,\quad \frac{\partial T}{\partial x}=0\,. \qquad (6)$$

3. Найдем обобщенную силу Q. Для этого составим уравнение работ активных сил на перемещении δx. Изобразим на чертеже активные силы $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$, $\overline{P}_4$ и пару сил с моментом M. Сообщим системе возможное перемещение $\delta x=\delta s_3$ и составим выражение для суммы работ:

$$\delta A=\sum \delta A_k^a=P_3\sin 60^\circ\,\delta s_3-M\delta\varphi_1\,.$$

Выразим $\delta\varphi_1$ через δx:

$$\delta\varphi_1 = \frac{r_2}{R_1 R_2}\delta x .$$

В результате получим

$$\delta A = \sum \delta A_k^a = \left(P_3 \sin 60^\circ - \frac{M r_2}{R_1 R_2} \right)\delta x . \qquad (7)$$

$$\delta A = Q\delta x .$$

Коэффициент при δx в (7) и будет обобщенной силой:

$$Q = P_3 \sin 60^\circ - \frac{M r_2}{R_1 R_2} . \qquad (8)$$

Подставляя (6) и (8) в уравнение (1), получим

$$\frac{1}{g}\left(P_3 + P_4 \frac{r_2^2}{R_2^2} + P_2 \frac{\rho_2^2}{R_2^2} \right)\ddot{x} = P_3 \sin 60^\circ - \frac{M r_2}{R_1 R_2} .$$

Отсюда находим

$$a_3 = \frac{P_3 \sin 60^\circ - \dfrac{M r_2}{R_1 R_2}}{P_3 + P_4 \dfrac{r_2^2}{R_2^2} + P_2 \dfrac{\rho_2^2}{R_2^2}} g = -0{,}9 \text{ м/с}^2.$$

О т в е т : $a_3 = -0{,}9$ м/с^2, знак минус указывает, что ускорение груза 3 и ускорения других тел направлены противоположно показанным на рисунке.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

Задача С1

1) Основные виды силовых воздействий и их свойства:

– сосредоточенная сила (проекции силы на оси; момент силы относительно точки как характеристика вращательного действия силы; величина и знак алгебраического момента;

– вращающий момент (пара сил), изображение пары на плоскости, момент пары;

– распределенные силы с постоянной интенсивностью (эпюра распределенных сил, приведение к равнодействующей).

2) Силы активные и реакции связей. Внешние закрепления конструкции (подвижный и неподвижный цилиндрические шарниры, скользящая заделка – втулка, жесткая заделка, невесомый стержень, нить, идеальная поверхность). Как направлены реакции этих связей? Сколько неизвестных составляющих реакции имеет каждая из перечисленных связей? В каком случае реакция связи содержит вращающий момент?

3) Виды представленных в конструкциях соединений тел между собой. Метод разбиения. Внутренние двусторонние и односторонние связи.

4) Каковы аналитические условия равновесия произвольной плоской системы сил?

5) Статическая определимость и неопределимость конструкции. Какие дополнительные условия представлены в задаче, которые делают конструкцию статически определимой? Как определяется статическая определимость в сочлененных конструкциях?

Задача К1

1) Виды движений различных звеньев плоского механизма задачи К1.

2) Поступательное движение.

3) Вращательное движение вокруг неподвижной оси (центра O). Угловая скорость и угловое ускорение вращающихся звеньев. Как направлены и чему равны скорости точек вращающегося тела?

4) Плоскопараллельное движение. Мгновенный центр скоростей и его свойства. Как найдены МЦС звеньев механизма задачи?

5) Как формулируется теорема о проекциях скоростей двух точек тела? Как она используется для нахождения скоростей различных точек механизма?

Задача Д1

1) Как формулируется теорема об изменении кинетической энергии? Использование этой теоремы для изучения движения механических систем с одной степенью свободы.

2) Способы вычисления кинетической энергии твердого тела в случаях поступательного, вращательного и плоскопараллельного движения.

3) Работа силы как характеристика действия силы на перемещении точки приложения силы. Как вычисляется работа постоянной силы, силы, зависящей от смещения, силы упругости?

Задача Д2

1) Что такое возможное перемещение точки и системы?

2) Обобщенные координаты, обобщенные скорости и обобщенные силы механической системы.

3) Как записываются уравнения Лагранжа в случае системы, число степеней которой равно n?

4) Уравнение Лагранжа как алгоритм получения уравнений движения механической системы. Как с помощью этих уравнений могут быть получены дифференциальные уравнения относительно обобщенных координат?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики: учебник для машиностроит. и приборостроит. спец. вузов / Н.Н. Никитин. – М.: Высш. шк., 1990. 607 с.
2. Бутенин Н.В. Курс теоретической механики: в 2х т. / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – СПб.: Лань, 2002. 736 с.
3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики / С.М. Тарг. – М: Высш. шк., 2008. 416 с.
4. Цывильский В.Л. Теоретическая механика / В.Л. Цывильский. – М: Высш. шк., 2008. 368 с.
5. Переславцева Н.С. Теоретическая механика: учеб. пособие / Н.С. Переславцева, Н.П. Бестужева. – Воронеж: ВГТУ, 2009. – 157 с.
6. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике / И.В. Мещерский. – СПб.: Лань, 2001. 448 с.
7. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: учеб. пособие для техн. вузов / под ред. А.А. Яблонского. – М.: Интеграл-Пресс, 2006. 384 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Программа курса 1
Статика 2
Кинематика. 4
Кинематика твердого тела. 4
Динамика. 6
Динамика точки. 64
Содержание контрольных заданий, выбор вариантов, порядок выполнения работ, общие пояснения к тексту задач. 10
Принятые обозначения 12
Задачи к контрольным заданиям. 15
Статика. Задача С1. 15
Кинематика. Задача К1. 21
Динамика. Задача Д1. 27
Задача Д2. 34
Контрольные вопросы. 40
Библиографический список. 42

ПРОГРАММА, МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
И КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ
по дисциплине
«Теоретическая механика»
для бакалавров всех направлений
заочной и заочной ускоренной форм обучения

Составители:
Переславцева Наталья Сергеевна
Бестужева Наталья Петровна

В авторской редакции

Компьютерный набор Н.С. Переславцевой

Подписано к изданию 30.10.2012.
Уч.-изд. л. 2,6.

ФГБОУ ВПО
«Воронежский государственный технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14