РГР
Теория вероятностей

Введение

Без преувеличения можно сказать, что нас окружает во многом случайный мир. Рождение мальчика или девочки, окажется данное изделие стандартным или бракованным, совпадут ли номера в спортлото – иначе говоря, произойдет некоторое событие или нет – все это является делом случая. В то же время со школьной скамьи складывается убеждение, что всё в мире происходит по однозначным, строгим законам, и поэтому кажется, что и там, где имеет место случай, нам просто пока не хватает данных и знаний, чтобы объяснить, почему произошло именно это событие, а не другое. Оказалось, что это не так. В микромире, как это следует из законов квантовой механики, все устроено случайным образом. Например, нельзя достоверно утверждать, расположен электрон в данной области пространства или нет, а можно говорить только о его шансах нахождения там. Раздел математики, разработанный для случайных событий, которые не могут быть строго или точно предсказаны, называется **теорией вероятностей**. На ее основе получила развитие **математическая статистика**, используемая для математической обработки информации, контроля качества продукции, анализа различных процессов и т.п.

Каждый вариант типового расчета № 8 содержит 10 заданий, номера n-го варианта идут с интервалом в 25 единиц: $N = n + 25k$, где $k = 0, 1, ..., 9$. Например, для варианта 5 следует выполнять задания под №№ 5, 30, 55, 80, 105 и т.д.

Первая задача на непосредственный подсчет вероятности, а также задач, решаемых с использованием формул комбинаторики. Вторая и третья задачи на формулы вероятностей суммы, произведения вероятностей и полной вероятности. Четвертая задача на схему Бернулли. Пятое задание на нахождение закона распределения дискретной случайной величины и вычисление ее основных числовых характеристик. Шестое и седьмое задания – на непрерывную случайную величину, заданную с помощью функции плотности распределения или функции распределения. Восьмое и девятое задания на нормальный закон и другие основные законы распределения. Наконец, десятое задание – по математической статистике.

Перед вами последний типовой расчет по курсу высшей математики. В отличие от предыдущих типовых расчетов здесь много интересных задач из окружающего нас мира, строительного производства. Применяемый для их решения математический аппарат доступен даже школьнику, однако, существенной трудностью является то, что желательно проникнуться качественно новым, вероятностным взглядом на окружающий мир. Поэтому, если сразу не удается справиться с задачей, посмотрите в соответствующем разделе этой методички (а также в другой учебно-методической литературе) образцы решения различных задач по этой теме, подумайте сами, проконсультируйтесь – и вероятность достигнуть правильного ответа устремится к единице.

Успеха вам!

Решение типового варианта задания

1. Непосредственный подсчет вероятности. Элементы комбинаторики

Основная идея теории вероятности состоит в том, что каждому случайному событию A ставится в соответствие вероятность этого события $p(A)$ – неотрицательное число, для краткости обозначаемое p, $0 \le p \le 1$, причем вероятность невозможного события равна нулю, а достоверного события равна единице.

По классическому определению **вероятностью** события A называется отношение числа m благоприятных этому событию элементарных исходов к общему числу n всех равновозможных несовместных элементарных исходов:

$$p(A) = \frac{m}{n}. \tag{1}$$

Часто число вариантов для m и n простым перебором подсчитать сложно, тогда для их вычисления пользуются формулами комбинаторики.

Числом размещений A_n^k называется число различных комбинаций, сколькими можно выбрать k различных предметов из n, причем порядок следования элементов важен:

$$A_n^k = n(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{2}$$

В частном случае, когда $k = n$, получается **число перестановок**

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!. \tag{3}$$

Заметим, что $0! = 1$.

Числом сочетаний C_n^k называется количество способов, сколькими можно выбрать k различных предметов из n, если порядок следования элементов несущественен:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}. \tag{4}$$

Отметим, что число сочетаний из n по k дает для конечного множества, состоящего из n элементов, количество его подмножеств, содержащих k элементов.

Пример 1. Два раза бросается монета. Какова вероятность того, что хотя бы один раз выпадет “орел” (событие A)?

Решение. Равновозможными несовместными элементарными исходами являются четыре пары исходов (о,о), (о,р), (р,о) и (р,р), где буквами “о” и “р” обозначены выпадение, соответственно, орла или решки; общее число элементарных исходов $n = 4$. Событию A соответствуют первые три пары исходов, поэтому число благоприятных исходов $m = 3$. Следовательно,

$$p(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{4}.$$

Ответ: $p(A) = 0{,}75$.

Пример 2. Студент идет на экзамен, зная 16 вопросов из 25. Найти вероятность того, что из трех вопросов два будут ему известны?

Решение. Множество всех элементарных исходов равно количеству способов, сколькими можно выбрать 3 вопроса из 25, а так как порядок следования вопросов в билете не важен, то это будет число сочетаний $n = C_{25}^{3}$.

Определим число исходов, благоприятных событию A (среди трех вопросов два известны). Два известных вопроса можно выбрать C_{16}^{2} способами, а один неизвестный из оставшихся 9 невыученных (25–16=9) можно выбрать C_{9}^{1} способами. Общее число благоприятных событию A исходов равно произведению полученных вариантов: $m = C_{16}^{2} C_{9}^{1}$. Следовательно,

$$p(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{16}^{2} C_{9}^{1}}{C_{25}^{3}} = \left| \begin{array}{l} C_{16}^{2} C_{9}^{1} = \dfrac{16! \cdot 9}{(16-2)!2!} = \dfrac{15 \cdot 16}{2!} \cdot 9 = 1080 \\ C_{25}^{3} = \dfrac{25!}{(25-3)!3!} = \dfrac{23 \cdot 24 \cdot 25}{3!} = 2300 \end{array} \right| \approx 0{,}47.$$

Ответ: $p(A) = 0{,}47$.

Пример 3. Сборная конструкция состоит из четырех объемных элементов, которые завозятся на стройку по одному случайным образом. Какова вероятность того, что конструкция будет смонтирована без простоев, связанных с завозом, если 1) все элементы различны; 2) среди них два одинаковых?

Решение. Общее решение различных вариантов очередности завоза для четырех элементов равно числу перестановок $n = P_4 = 4! = 24$.

В первом случае благоприятным исходом m_1 будет один, т.к. задержек не будет только в том случае, если элементы конструкции завозятся в том же порядке, в котором они должны быть смонтированы. Следовательно, $p_1 = \dfrac{m_1}{n} = \dfrac{1}{24} \approx 0{,}04$.

Во втором случае число благоприятных исходов m_2 равно двум, так как одинаковые элементы можно поменять между собой. Следовательно, $p_2 = \dfrac{m_2}{n} = \dfrac{2}{24} \approx 0{,}08$.

Ответ: $p_1 \approx 0{,}04$, $p_2 \approx 0{,}08$.

2. Вероятность суммы и произведения событий. Формула полной вероятности

Вероятность появления **хотя бы одного** из двух совместных событий вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{p(A+B) = p(A) + p(B) - p(AB)}. \tag{5}$$

События $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ **несовместны**, если в результате опыта они не могут появиться вместе, в этом случае

$$\boldsymbol{p(A+B) = p(A) + p(B)}. \tag{6}$$

В частности, так как противоположные события $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{\overline{A}}$ несовместны, а их сумма есть **событие достоверное**, т.е.

$$\boldsymbol{p(A) + p(\overline{A}) = 1}, \tag{7}$$

то вероятность **противоположного события**

$$\boldsymbol{p(\overline{A}) = 1 - p(A)}. \tag{8}$$

Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$\boldsymbol{p(AB)=p(A)p(B)}. \tag{9}$$

Бывают ситуации, когда частота появления события $\boldsymbol{B}$ зависит от того, произошло ли событие $\boldsymbol{A}$ или нет. В этом случае вводят **условную вероятность** $\boldsymbol{p_A(B)}$ наступления события $\boldsymbol{B}$ при условии, что событие $\boldsymbol{A}$ уже произошло, тогда

$$\boldsymbol{p(AB)=p(A)p_A(B)}. \tag{10}$$

Замечание. Теоремы сложения и умножения вероятностей можно обобщить на большее число слагаемых и сомножителей. Например, для трех совместных событий

$$\boldsymbol{p(A+B+C)=p(A)+p(B)+p(C)-p(AB)-p(AC)-p(BC)+p(ABC)},$$

$$\boldsymbol{p(ABC)=p(A)p_A(B)p_{AB}(C)}. \tag{11}$$

Для нахождения вероятности суммы **независимых** событий выгодно переходить к противоположным событиям:

$$\boldsymbol{p(A_1+A_2+...+A_n)=1-p(\overline{A}_1)p(\overline{A}_2)...p(\overline{A}_n)}. \tag{12}$$

Пусть событие $\boldsymbol{B}$ может наступить при условии появления одного из попарно несовместных событий $\boldsymbol{A_1, A_2, ..., A_n}$, образующих **полную группу,** т.е. $\sum\limits_{k=1}^{n}\boldsymbol{p(A_k)=1}$. Тогда имеет место **формула полной вероятности**:

$$\boldsymbol{p(B)=p(A_1)p_{A_1}(B)+p(A_2)p_{A_2}(B)+...+p(A_n)p_{A_n}(B)}. \tag{13}$$

Пример 4. Перегорела одна из трех лампочек, включенных в сеть последовательно. Наудачу выбранную лампочку заменяют годной, после чего проверяется исправность линии. Если повреждение не устранено, то заменяется другая лампочка. Найти вероятность того, что повреждение будет устранено после второй замены лампочки.

Решение. Пусть событие A – линия исправна после второй замены лампочки. Событие A является произведением события A_1 – линия неисправна после первой замены лампочки (т.е. заменена исправная лампочка) и события A_2 – линия исправна после второй замены лампочки (т.е. заменена неисправная лампочка): $A=A_1A_2$. Поскольку события A_1 и A_2 зависимы, то $p(A_1A_2)=p(A_1)p_{A_1}(A_2)$.

Вероятность заменить первый раз годную лампочку, которых две из трех, $p(A_1)=2/3$. Вероятность во второй раз заменить перегоревшую лампочку, которая одна из двух оставшихся непроверенных, $p_{A_1}(A_2)=1/2$, тогда $p(A)=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\approx 0{,}33$.

Ответ: $p(A)\approx 0{,}33$.

Замечание. Для эффективного решения задач при переводе словесного описания событий на язык алгебры событий полезно помнить, что союзу “и” соответствует произведение событий AB, союзу “или” – сумма событий $A+B$, частице “не” – противоположное событие $\overline{A}$.

Пример 5. По мишени стреляют три стрелка. Вероятность попадания в мишень первым стрелком – 0,9, вторым – 0,8 и третьим – 0,5. Найти вероятность следующих событий:

1) B_1 - все три стрелка попали в мишень;
2) B_2 - никто не попал в мишень;
3) B_3 - хотя бы один стрелок попал в мишень;

4) B_4 - только один стрелок попал в мишень;

5) B_5 - только два стрелка попали в мишень.

Решение. Очевидно, каждое из событий B_k состоит из нескольких событий, перечислим их:

A_1 - первый стрелок попал в цель, $p(A_1)=0{,}9$, $p(\overline{A_1})=1-p(A_1)=1-0{,}9=0{,}1$;

A_2 - второй стрелок попал в цель, $p(A_2)=0{,}8$, $p(\overline{A_2})=1-p(A_2)=1-0{,}8=0{,}2$;

A_3 - третий стрелок попал в цель, $p(A_3)=0{,}5$, $p(\overline{A_3})=1-p(A_3)=1-0{,}5=0{,}5$.

1) Событие B_1 состоит в том, что и первый стрелок попал в цель, и второй попал, и третий попал, следовательно, $B_1=A_1A_2A_3$. Так как события A_1, A_2 и A_3 независимы, то по формуле, аналогичной (9),

$$p(B_1)=p(A_1A_2A_3)=p(A_1)p(A_2)p(A_3)=0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}5=0{,}36.$$

2) Событие B_2 состоит в том, что и первый стрелок не попал в цель, и второй не попал, и третий не попал, следовательно, $B_2=\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$. Так как события $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$ и $\overline{A_3}$ независимы, то по формуле, аналогичной (9),

$$p(B_2)=p(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})=p(\overline{A_1})p(\overline{A_2})p(\overline{A_3})=0{,}1\cdot 0{,}2\cdot 0{,}5=0{,}01.$$

3) Событие B_3 складывается из большого количества вариантов – или $A_1\,A_2\,A_3$, или $\overline{A_1}\,A_2\,A_3$, или $A_1\,\overline{A_2}\,A_3$ и т.д. Поэтому выгодно перейти к противоположному событию $\overline{B_3}$ – никто не попал, в наших обозначениях $\overline{B_3}=B_2$:

$p(B_3)=1-p(\overline{B_3})=1-p(B_2)=1-0{,}01=0{,}99$.

4) Событие B_4 – только одно попадание – складывается из следующих вариантов: первый стрелок попал, а второй и третий не попали, или второй стрелок попал, а первый и третий не попали, или третий стрелок попал, а первый и третий не попали. Следовательно, $B_4=A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$. Отметим, что одновременно события $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$, $\overline{A_1}A_2\overline{A_3}$ и $\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$ произойти не могут, т.е. являются несовместными. Поэтому

$$\begin{aligned}
p(B_4)&=p(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3})+p(\overline{A_1}A_2\overline{A_3})+p(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)=\\
&=p(A_1)p(\overline{A_2})p(\overline{A_3})+p(\overline{A_1})p(A_2)p(\overline{A_3})+p(\overline{A_1})p(\overline{A_2})p(A_3)=\\
&=0{,}9\cdot 0{,}2\cdot 0{,}5+0{,}1\cdot 0{,}8\cdot 0{,}5+0{,}1\cdot 0{,}2\cdot 0{,}5=0{,}14.
\end{aligned}$$

5) Событие B_5 – только два попадания – как и в предыдущем пункте, состоит в переборе трех вариантов, когда один из стрелков не попал в мишень, а остальные двое попали: $B_5=\overline{A_1}A_2A_3+A_1\overline{A_2}A_3+A_1A_2\overline{A_3}$;

$$\begin{aligned}
p(B_5)&=p(\overline{A_1}A_2A_3)+p(A_1\overline{A_2}A_3)+p(A_1A_2\overline{A_3})=\\
&=p(\overline{A_1})p(A_2)p(A_3)+p(A_1)p(\overline{A_2})p(A_3)+p(A_1)p(A_2)p(\overline{A_3})=\\
&=0{,}1\cdot 0{,}8\cdot 0{,}5+0{,}9\cdot 0{,}2\cdot 0{,}5+0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}5=0{,}49.
\end{aligned}$$

Ответ: $p(B_1)=0{,}36$, $p(B_2)=0{,}01$, $p(B_3)=0{,}99$, $p(B_4)=0{,}14$, $p(B_5)=0{,}49$.

Замечание. Отметим, что сумма событий $B_1+B_2+B_4+B_5$ образует достоверное событие D, т.к. B_1, B_2, B_4 и B_5 попарно несовместны и являются полной группой исходов, то должно быть выполнено условие $p(D)=p(B_1)+p(B_2)+p(B_4)+p(B_5)=1$.

Это условие можно использовать как критерий правильности вычислений: $0{,}36+0{,}01+0{,}14+0{,}49=1$. Действительно верно.

Пример 6. В магазине имеются электрические лампочки, изготовленные на трех заводах: 3 ящика с первого завода, 5 – со второго завода и 2 – с третьего. Процент бракованных лампочек (то есть тех, что перегорают раньше положенного срока) составляет на первом заводе – 10%, на втором – 20%, на третьем – 25%. Найти вероятность купить бракованную лампочку при условии, что ящики заносятся в торговый зал случайным образом.

Решение. Рассмотрим события: A_1 – лампочка сделана на первом заводе, A_2 – лампочка сделана на втором заводе, A_3 – на третьем заводе. Так как в магазине всего $3+5+2=10$ ящиков лампочек, то вероятность что лампочка изготовлена первым заводом $p(A_1)=3/10$, соответственно, $p(A_2)=0{,}5$, $p(A_3)=0{,}2$.

Если лампочка произведена на первом заводе, то вероятность события $B-$ деталь бракованная – $p_{A_1}(B)=0{,}1$, так как на первом заводе брак составляет 10%. Аналогично, $p_{A_2}(B)=0{,}2$, $p_{A_3}(B)=0{,}25$.

По формуле полной вероятности (13) при $n=3$:

$$p(B)=p(A_1)p_{A_1}(B)+p(A_2)p_{A_2}(B)+p(A_3)p_{A_3}(B)=$$
$$=0{,}3\cdot 0{,}1+0{,}5\cdot 0{,}2+0{,}2\cdot 0{,}25=0{,}18.$$

Ответ: $p(B)=0{,}18$.

3. Повторение испытаний: формула Бернулли, локальная и интегральная теоремы Лапласа, формула Пуассона

Повторение испытаний состоит в том, что проводятся n независимых испытаний (результаты последующих испытаний не зависят от предыдущих). Мы рассмотрим схему Бернулли, когда вероятность появления события A в каждом испытании одна и та же: $p(A)=p$. Обозначим через q вероятность появления противоположного события $\overline{A}$:

$$q=p(\overline{A})=1-p(A)=1-p.$$

Требуется узнать, какова вероятность $p_n(k)$ того, что в n независимых испытаниях событие A произойдет ровно k раз (и не наступит $(n-k)$ раз). Эта вероятность по **формуле Бернулли** равна

$$p_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}, \tag{14}$$

где коэффициент C_n^k считается по формуле (4).

Пользоваться формулой (14) при больших n затруднительно из-за большого объема счетной работы. В этом случае применяется приближенная формула – **локальная теорема Лапласа**:

$$p_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \tag{15}$$

где $x=\dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}$, а значения функции $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ затабулированы и находятся из [1, прил.1]. Очевидно, $\varphi(x)$ четная функция.

Вероятность того, что событие A в n испытаниях произойдет от k_1 до k_2 раз (включительно), приближенно считается по **интегральной теореме Лапласа**:

$$p_n(k_1,k_2)\approx \Phi(x_2)-\Phi(x_1), \tag{16}$$

где $x_1=\dfrac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$ и $x_2=\dfrac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$, а значения функции Лапласа $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ затабулированы и находятся из [1, прил. 2]. Заметим, что $\Phi(x)$ нечетная функция.

В случае же, когда n велико, а p – мало (обычно $p\le 0{,}1$), вместо формулы Бернулли применяют приближенную **формулу Пуассона**:

$$p_n(k)\approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \tag{17}$$

где $\lambda = np$.

Отметим, что очень часто найти вероятность p по классическому определению вероятности невозможно. В этом случае на практике используют схему Бернулли при достаточно большом числе независимых испытаний. При **статистическом определении** в качестве **вероятности** события A принимают его относительную частоту

$$W(A)=\frac{n_A}{n}, \tag{18}$$

где n_A - количество появлений события A в n испытаниях.

Например, нужно практически определить вероятность попадания стрелка в мишень. Будем считать, что $p(A)=0{,}7$, если он попал 7 раз из 10, или 70 раз из 100, или 700 раз из 1000 и т.д. При этом, чем больше произведено выстрелов, тем ответ достовернее. Чем больше число испытаний, тем численно ближе относительная частота к неизвестной нам теоретической вероятности события A: $W(A)\to p(A)$ при $n\to\infty$.

<u>Пример 7.</u> Прибор состоит из пяти узлов. Вероятность безотказной работы в течение времени t для каждого узла равна 0,9. Узлы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что за время t откажут два узла.

<u>Решение.</u> Пусть событие A есть выход узла из строя за время t. Число узлов $n=5$, а число отказавших узлов $k=2$.

Вероятность безотказной работы узла $p(A)=p=0{,}9$, тогда $q=1-p=1-0{,}9=0{,}1$. Вычислим искомую вероятность по формуле Бернулли:

$$p_5(2)=C_5^2\,0{,}9^2 0{,}1^{5-2}=\frac{5!}{3!2!}0{,}81\cdot 0{,}001=0{,}0081.$$

<u>Ответ:</u> $p_5(2)=0{,}0081$.

<u>Пример 8.</u> Два шахматиста, первый из которых выигрывает в два раза чаще другого, играют матч из нескольких партий. Считая все партии результативными, найти

1) вероятность выигрыша матча из трех партий первым игроком;
2) вероятность выигрыша первым игроком 13 партий из 18.

<u>Решение.</u>

1) Пусть событие A – матч выигран первым игроком, т. е. первый игрок выиграет две или три партии из трех. Вероятность выиграть одну партию для первого игрока, т.к. он выигрывает в два раза чаще, $p=2/3$, тогда $q=1-p=1/3$. Матч состоит из трех повторяющихся событий. Вероятность выиграть две партии из трех $p_3(2)=C_3^2(2/3)^2(1/3)^{3-2}=4/9$, а три партии из трех

$p_3(3) = C_3^3 (2/3)^3 (1/3)^{3-3} = 8/27$. Итак, $p(A) = p_3(2) + p_3(3) = \frac{4}{9} + \frac{8}{27} = \frac{20}{27} \approx 0{,}74$.

2) В нашем случае $n = 18$, $k = 13$, $p = 2/3$, $q = 1/3$. Вычислим $p_{18}(13)$, т.к. $n = 18$ большое число, то воспользуемся локальной формулой Лапласа (15)

$$p_{18}(13) = \frac{1}{\sqrt{18 \cdot 2/3 \cdot 1/3}} \cdot \varphi(x), \text{ где } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{13 - 18 \cdot 2/3}{\sqrt{18 \cdot 2/3 \cdot 1/3}} = \frac{1}{2}$$

и найдем из [1, прил. 1] $\varphi(0{,}5) \approx 0{,}3521$, тогда $p_{18}(13) = \frac{1}{\sqrt{4}} \cdot 0{,}3521 \approx 0{,}176$.

<u>Ответ:</u> вероятность выиграть матч из трех партий для первого игрока 0,74; $p_{18}(13) \approx 0{,}176$.

<u>Пример 9.</u> Игральная кость бросается 100 раз, найти вероятность того, что

1) шесть очков выпадут не менее 20 и не более 30 раз;
2) шесть очков выпадут не более 20 раз.

<u>Решение.</u>

1) Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа. В нашем случае $n = 100$, $k_1 = 20$, $k_2 = 30$, $p = 1/6$, $q = 1 - p = 1 - 1/6 = 5/6$. По формуле (16)

$$p_{100}(20, 30) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{20 - 100 \cdot 1/6}{\sqrt{100 \cdot 1/6 \cdot 5/6}} = 0{,}89$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{30 - 100 \cdot 1/6}{\sqrt{100 \cdot 1/6 \cdot 5/6}} = 3{,}58$.

Тогда $p_{100}(20, 30) \approx \Phi(3{,}58) - \Phi(0{,}89) = 0{,}4998 - 0{,}3133 = 0{,}1865$. Значение функции Лапласа $\Phi(3{,}58)$ и $\Phi(0{,}89)$ найдено из таблицы [1, прил. 2].

2) Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа. В нашем случае $n = 100$, $k_1 = 0$, $k_2 = 20$, $p = 1/6$, $q = 1 - p = 1 - 1/6 = 5/6$. По формуле (16)

$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{0 - 100 \cdot 1/6}{\sqrt{100 \cdot 1/6 \cdot 5/6}} = -4{,}47$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{20 - 100 \cdot 1/6}{\sqrt{100 \cdot 1/6 \cdot 5/6}} = 0{,}89$. Тогда

$p_{100}(0, 20) \approx \Phi(0{,}89) - \Phi(-4{,}47) = \Phi(0{,}89) + \Phi(4{,}47) = 0{,}3133 + 0{,}4999 = 0{,}8132$.

<u>Ответ:</u> $p_{100}(20, 30) \approx 0{,}1865$, $p_{100}(0, 20) \approx 0{,}8132$.

<u>Пример 10.</u> Каменщик за смену может уложить 1000 кирпичей. Вероятность того, что он уронит кирпич, равна 0,004. Найти вероятность того, что в течение смены произойдет падение 5 кирпичей.

<u>Решение.</u> Искомую вероятность найдем по формуле Пуассона (17).

По условию задачи $k = 5$, $n = 1000$, $\lambda = np = 1000 \cdot 0{,}004 = 4$. Подставим найденные значения в формулу и, воспользовавшись [2, табл. 3], получим

$$p_{1000}(5) \approx \frac{4^5 e^{-4}}{5!} \approx 0{,}156.$$

<u>Ответ:</u> $p_{1000}(5) \approx 0{,}156$.

4. Дискретные и непрерывные случайные величины, их способы задания и основные числовые характеристики

Одним из основных понятий теории вероятностей является **случайная величина**, которая в результате испытания принимает только одно из своих возможных значений, а какое именно, зависит от случайных причин. Например, при бросании игральной кости, случайная величина X – число выпавших очков, может произвольно принимать одно из шести значений.

Различают дискретные и непрерывные случайные величины.

Законом распределения дискретной случайной величины называют перечень ее возможных значений и соответствующих им вероятностей.

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Здесь $p_i = p(X = x_i)$, $i = 1, 2,..., n$, причем

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \qquad (19)$$

Графически закон распределения задается **многоугольником распределения**, представляющим собой ломаную, соединяющую на плоскости соседние точки $A_i(x_i; p_i)$, где $i = 1, 2,..., n$.

Другим способом описания случайной величины является **функция распределения** $F(x)$, значения которой в точке x равно вероятности того, что случайная величина X примет значение меньшее данного значения аргумента:

$$F(x) = p(X < x) \ (-\infty < x < \infty). \qquad (20)$$

У дискретной случайной величины функция распределения (20) – неубывающая ступенчатая функция, значения которой меняются от нуля до единицы. У непрерывной случайной величины функция распределения является неубывающей непрерывной функцией с такой же областью значений.

Для непрерывной случайной величины имеет смысл ставить вопрос о вероятности попадания ее значений в некоторый интервал (a, b), которая в силу определения функции распределения равна

$$p(a < x < b) = F(b) - F(a). \qquad (21)$$

Задать непрерывную случайную величину удобно **функцией плотности распределения** вероятностей, являющуюся производной от функции распределения $F(x)$:

$$f(x) = F'(x). \qquad (22)$$

В силу формулы Ньютона-Лейбница

$$p(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx. \qquad (23)$$

Отсюда и из определения функции распределения следует, что

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt. \qquad (24)$$

В частности, при $x = \infty$ получается вероятность достоверного события

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1. \qquad (25)$$

Ниже укажем формулы основных числовых характеристик дискретной и непрерывной случайных величин.

Таблица 1

Числовые характеристики	Дискретные случайные величины	Непрерывные случайные величины
Математическое ожидание – характеризует среднее значение случайной величины	$M(x)=\sum\limits_{k=1}^{n} x_i p_i$	$M(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$
Дисперсия – характеризует средний квадрат отклонений значений случайной величины от среднего значения	$D(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-M(x_i))^2 p_i=$ $=M(X^2)-\left(M(X)\right)^2,$ где $M(X^2)=\sum\limits_{k=1}^{n} x_i^{\ 2} p_i$.	$D(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))^2 f(x)dx=$ $=M(X^2)-\left(M(X)\right)^2,$ где $M(X^2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx$.
Среднее квадратическое отклонение указывает разброс значений случайной величины относительно среднего.	$\sigma(x)=\sqrt{D(x)}$	$\sigma(x)=\sqrt{D(x)}$

Пример 11. По мишени стреляют три стрелка. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0,9; вторым – 0,8; третьим – 0,5. Для случайной величины X, равной числу промахов, требуется:

1) составить закон распределения;
2) построить многоугольник распределения;
3) построить функцию распределения $F(x)$;
4) вычислить числовые характеристики – математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение. Случайная величина X – число промахов, может принимать четыре значения: $X=0$, если все попали в цель; $X=1$, если кто-то один из трех промахнулся и т.д.

1) Вычисление вероятности для каждого значения случайной величины было проведено в примере 5: $p(X=0)=p(B_1)=0{,}36$; $p(X=1)=p(B_5)=0{,}49$; $p(X=2)=p(B_4)=0{,}14$; $p(X=3)=p(B_2)=0{,}01$.

Составим таблицу.

X	0	1	2	3
p	0,36	0,49	0,14	0,01

Проверка: 0,36+0,49+0,14+0,01=1.

Следовательно, мы нашли закон распределения данной случайной величины.

2) Чтобы построить многоугольник распределения, укажем на плоскости XOP 4 точки: $A_1(0;0{,}36)$, $A_2(1;0{,}49)$, $A_3(2;0{,}14)$, $A_4(3;0{,}01)$ и соединим их ломаной.

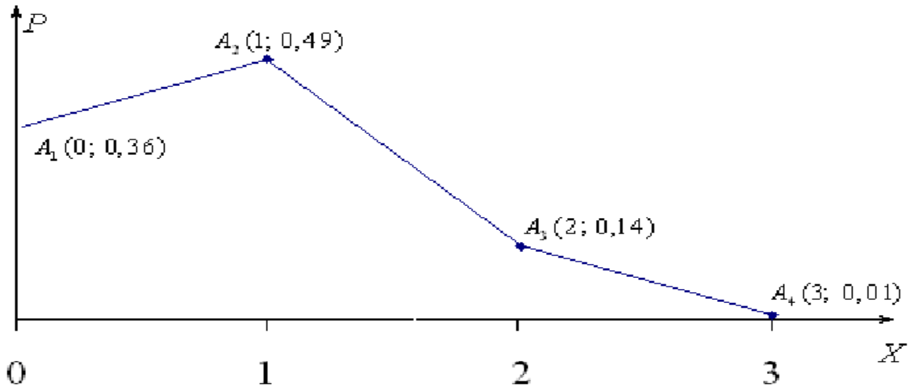

Рис.1

3) Для построения функции распределения $F(x)$ отметим, что ее значения могут меняться только при переходе через точки $X = 0, 1, 2, 3$, точнее, должны увеличиваться на соответствующие вероятности.

Например, $F(x=0)=0$, т.к. левее нет значений случайной величины.

Если $0 < X \le 1$, то для любого x их этого полуинтервала
$F(x) = p(X < x) = p(X = 0)$=0,36, т.к. левее $X = x$ только одно значение $X = 0$.

Если $1 < X \le 2$, то для любого x их этого полуинтервала
$F(x) = p(X < x) = p(X = 0) + p(X = 1)$=0,36+0,49=0,85.

Если $2 < X \le 3$, то для любого x их этого полуинтервала
$F(x) = p(X < x) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2)$=0,36+0,49+0,14=0,99.

Если $3 < X$, то для любого x их этого бесконечного промежутка
$F(x) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3)$=0,36+0,49+0,14+0,01=1.

Итак, функция $F(x)$ является неубывающей, непрерывной слева функцией, а ее график поднимается “лесенкой”:

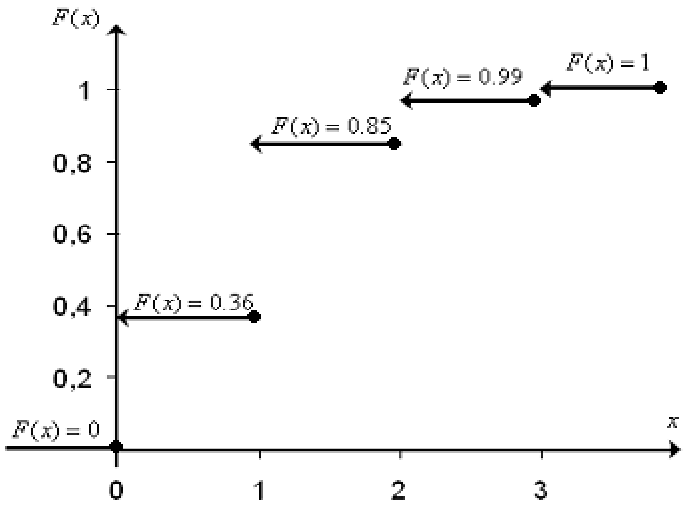

Рис. 2

4) Вычислим числовые характеристики:

- математическое ожидание дискретной случайной величины $M(x) = \sum_{k=1}^{n} x_i p_i = 0 \cdot 0{,}36 + 1 \cdot 0{,}49 + 2 \cdot 0{,}14 + 3 \cdot 0{,}01 = 0{,}8$.
- дисперсия дискретной случайной величины $D(x) = M(X^2) - (M(X))^2$,

где $M(X^2)=\sum_{k=1}^{n} x_i^{\,2} p_i = 0^2\cdot 0{,}36+1^2\cdot 0{,}49+2^2\cdot 0{,}14+3^2\cdot 0{,}01=1{,}14$, тогда $D(x)=1{,}14-(0{,}8)^2=0{,}5$.

- среднее квадратическое отклонение $\sigma(x)=\sqrt{D(x)}=\sqrt{0{,}5}\approx 0{,}71$.

Пример 12. Задана функция распределения непрерывной случайной величины

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ Ax^4, & 0<x\le 2,\\ 1, & 2<x.\end{cases}$$

Требуется:

1) найти параметр A;
2) построить функцию распределения $F(x)$;
3) найти функцию плотности $f(x)$ и построить ее график;
4) вычислить числовые характеристики – математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение;
5) найти вероятность попадания случайной величины в интервал $(0;1)$.

Решение.

1) В силу непрерывности функции распределения $F(x)$ (слева она, очевидно, непрерывна) она должна быть непрерывна и справа при $x=2$: $Ax^4\big|_{x=2}=1$, тогда $16A=1$ и $A=1/16$.

2) Поскольку $A=1/16$, то функция распределения имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ x^4/16, & 0<x\le 2,\\ 1, & 2<x.\end{cases}$$

График этой функции укажем ниже.

3) Дифференцируя $F(x)$, получим функцию плотности распределения $f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ x^3/4, & 0<x\le 2,\\ 0, & 2<x.\end{cases}$$

Укажем графики функций $F(x)$ и $f(x)$:

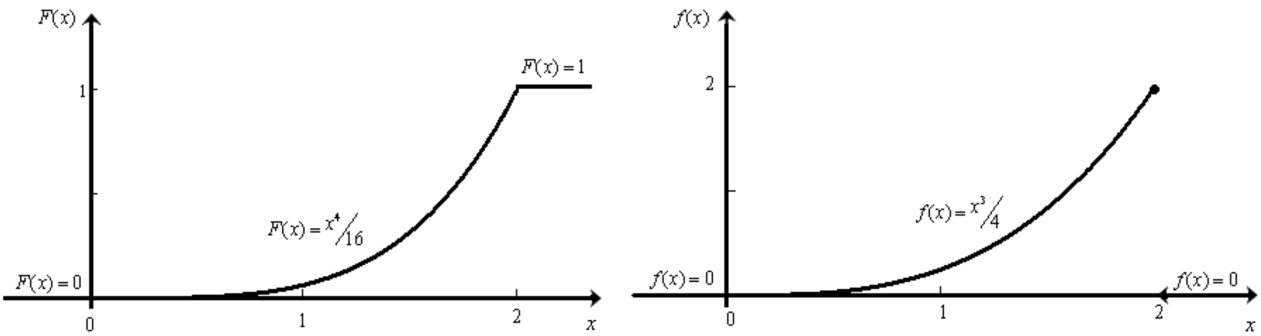

Рис. 3

4) Вычислим числовые характеристики по формулам, указанным в табл. 1:

математическое ожидание

$$M(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0} x\cdot 0dx+\int\limits_{0}^{2} x\frac{x^3}{4}dx+\int\limits_{2}^{\infty} x\cdot 0dx=\int\limits_{0}^{2}\frac{x^4}{4}dx=\left.\frac{x^5}{20}\right|_0^2=\frac{8}{5};$$

дисперсия $D(x)=M(X^2)-(M(X))^2$, где

$$M(X^2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0} x^2\cdot 0dx+\int\limits_{0}^{2} x^2\frac{x^3}{4}dx+\int\limits_{2}^{\infty} x^2\cdot 0dx=\int\limits_{0}^{2}\frac{x^5}{4}dx=\left.\frac{x^6}{24}\right|_0^2=\frac{64}{24}=\frac{8}{3},$$

тогда $D(x)=\frac{8}{3}-\left(\frac{8}{5}\right)^2=\frac{8}{75}$,

среднее квадратическое отклонение $\sigma(x)=\sqrt{D(x)}=\sqrt{\frac{8}{75}}\approx 0{,}33$.

5) Вероятность попадания случайной величины в интервал $(0;1)$ определяется формулой

$$p(0<X<1)=\int\limits_{0}^{1} f(x)dx=\int\limits_{0}^{1}\frac{x^3}{4}dx=\left.\frac{x^4}{16}\right|_0^1=\frac{1}{16}.$$

Ответ: $A=1/16$, $M(x)=8/5$, $D(x)=8/75$, $\sigma(x)\approx 0{,}33$, $p(0<X<1)=1/16$.

Пример 13. Дана функция плотности распределения $f(x)$ случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1,\\ (x-1)/2, & 1<x\le 3,\\ 0, & 3<x.\end{cases}$$

Требуется:

1) найти функцию распределения $F(x)$;

2) построить графики функций плотности $f(x)$ и распределения $F(x)$;

3) найти вероятность того, что случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(2;4)$.

Решение.

1) Найдем функцию распределения $F(x)$:

если $x\le 1$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(z)dz=\int\limits_{-\infty}^{x} 0dz=0$;

если $1<x\le 3$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(z)dz=\int\limits_{-\infty}^{1} 0dz+\int\limits_{1}^{x}\frac{z-1}{2}dz=0+\int\limits_{1}^{x}\left(\frac{z}{2}-\frac{1}{2}\right)dz=\left.\left(\frac{z^2}{4}-\frac{z}{2}\right)\right|_1^x=\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}$;

если $3<x$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(z)dz=\int\limits_{-\infty}^{1} 0dz+\int\limits_{1}^{3}\frac{z-1}{2}dz+\int\limits_{3}^{+\infty} 0dz=0+\int\limits_{1}^{3}\left(\frac{z}{2}-\frac{1}{2}\right)dz=\left.\left(\frac{z^2}{4}-\frac{z}{2}\right)\right|_1^3=1$.

Итак, искомая функция распределения имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1,\\ \frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}, & 1<x\le 3,\\ 1, & 3<x.\end{cases}$$

2) Графики функций $f(x)$ и $F(x)$ приведены на рис. 4.

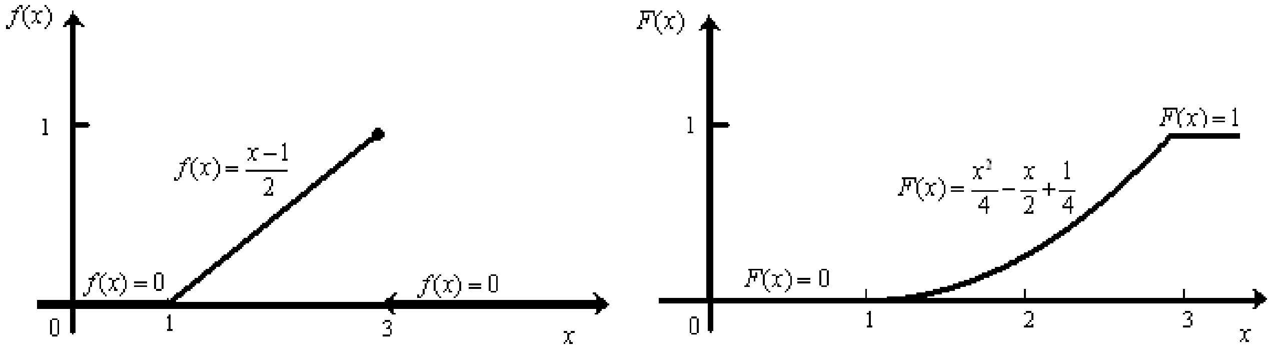

Рис. 4

3) Вероятность того, что случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(2;4)$, по формуле (23):

$$p(2<X<4)=\int_2^4 f(x)dx=\int_2^3 \frac{x-1}{2}dx+\int_3^4 0dx=\left.\frac{(x-1)^2}{4}\right|_2^3=\frac{(3-1)^2}{4}-\frac{(2-1)^2}{4}=\frac{3}{4}$$

или по формуле (21):

$$p(2<X<4)=F(4)-F(2)=1\Big|_{x=4}-\left.\left(\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)\right|_{x=2}=1-\left(\frac{4}{4}-\frac{2}{2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}.$$

<u>Ответ:</u> $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ \frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}, & 1<x\le 3,\\ 1, & 3<x\end{cases}$ $p(2<X<4)=\frac{3}{4}$.

5. Биномиальный, равномерный, показательный и нормальный законы распределения

Биномиальным законом распределения дискретной случайной величины называют случайную величину $\boldsymbol{X}$, принимающую значения числа появлений события $\boldsymbol{A}$ в $\boldsymbol{n}$ независимых испытаниях. Вероятность появления события $\boldsymbol{A}$ в одном испытании постоянна и равна $\boldsymbol{p}$. Вероятность возможного значения $\boldsymbol{X=k}$ (событие $\boldsymbol{A}$ выпадет $\boldsymbol{k}$ раз в $\boldsymbol{n}$ испытаниях) вычисляется по формуле Бернулли:

$$\boldsymbol{p(X=k)=p_n(k)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}},\ k=0,1,...,n. \qquad (26)$$

Закон распределения случайной величины $\boldsymbol{X}$ имеет вид

$\boldsymbol{X}$	0	1	2	…	$\boldsymbol{n}$
$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q^n}$	$\boldsymbol{npq^{n-1}}$	$\frac{\boldsymbol{n(n-1)p^2q^{n-2}}}{2!}$	…	$\boldsymbol{p^n}$

Основные числовые характеристики **биномиального** закона распределения равны

$$\boldsymbol{M(X)=np},\ \boldsymbol{D(X)=npq},\ \sigma(\boldsymbol{X})=\sqrt{\boldsymbol{npq}}. \qquad (27)$$

Равномерным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины $\boldsymbol{X}$, если на промежутке $\boldsymbol{(a;b]}$, которому принадлежат все возможные значения $\boldsymbol{X}$, плотность распределения случайной величины сохраняет постоянное значение равное

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in(a;b]\\ 0, & x\notin(a;b]\end{cases}. \tag{28}$$

Основные числовые характеристики **равномерног**о закона распределения равны

$$M(X)=\frac{a+b}{2},\ D(X)=\frac{(b-a)^2}{12},\ \sigma(X)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \tag{29}$$

Замечание. Вероятность попадания в произвольный интервал $(\alpha;\beta)$, где $(\alpha;\beta)\subset(a;b]$ определяется формулой

$$p(\alpha<X<\beta)=\frac{\beta-\alpha}{b-a}. \tag{30}$$

Так как длина отрезка является его мерой, то обобщение последней формулы приводит к геометрическому определению вероятности, т.е. к вероятности попадания точки в некоторую область $A\subset D$

$$p(A)=\frac{\text{мера } A}{\text{мера } D}. \tag{31}$$

Наиболее часто в окружающем мире (в том числе в производстве и технике) встречается **нормальный закон распределения**, который задается функцией плотности

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \tag{32}$$

Основные числовые характеристики **нормального** закона распределения равны

$$M(X)=a,\ D(X)=\sigma^2,\ \sigma(X)=\sigma. \tag{33}$$

Графиком функции плотности нормального закона распределения (32) является кривая Гаусса (рис. 5).

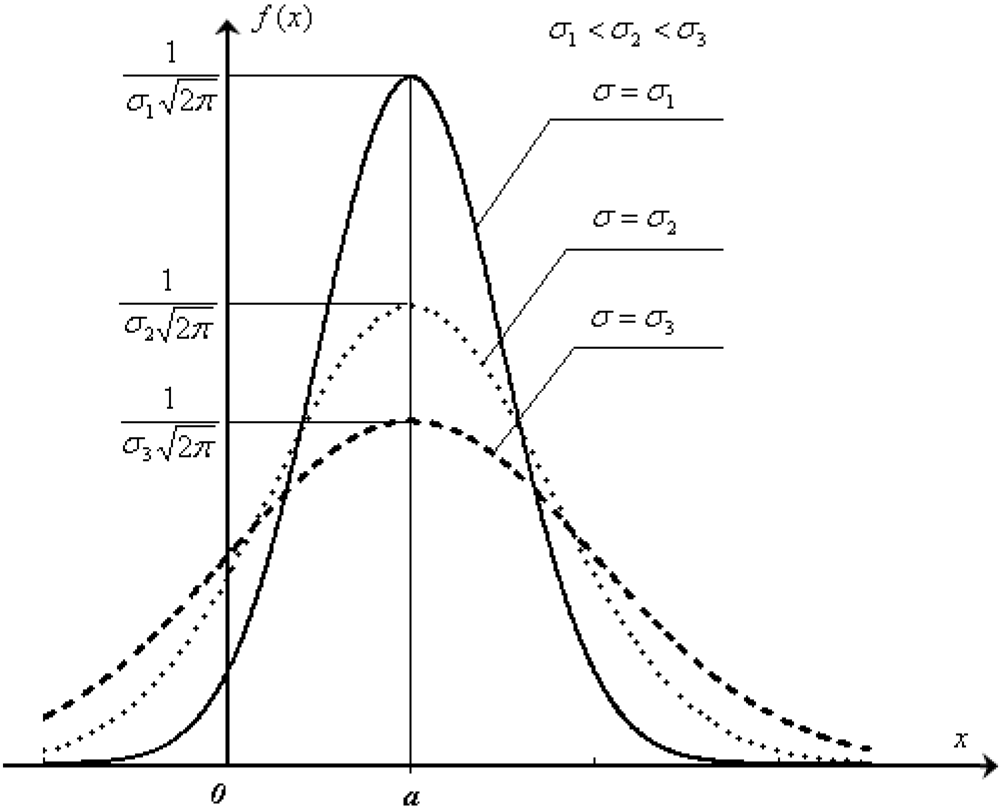

Рис. 5

Ее точкой максимума является $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$. Чем меньше будет σ, тем больше будет максимальное значение функции плотности, график будет более вытянут вверх и ближе будет прижиматься к прямой $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$.

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в интервал $(\alpha;\beta)$ равна

$$\boldsymbol{p(}\alpha < \boldsymbol{X} < \beta\boldsymbol{)} = \Phi\left(\frac{\beta - \boldsymbol{a}}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - \boldsymbol{a}}{\sigma}\right), \tag{34}$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа.

Вероятность того, что отклонение значения нормально распределенной случайной величины $\boldsymbol{X}$ от ее среднего значения (математического ожидания) по абсолютной величине меньше положительного числа δ, равна

$$\boldsymbol{p}(|\boldsymbol{X} - \boldsymbol{a}| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \tag{35}$$

Показательным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью распределения:

$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{x \le 0} \\ \boldsymbol{\lambda e^{-\lambda x}}, & \boldsymbol{x > 0} \end{cases}, \tag{36}$$

где λ – положительная константа.

Это распределение зависит от одного параметра λ, и для него математическое ожидание равно среднему квадратическому отклонению

$$\boldsymbol{M(X)} = \frac{\boldsymbol{1}}{\lambda},\ \boldsymbol{D(X)} = \frac{\boldsymbol{1}}{\lambda^2},\ \sigma\boldsymbol{(X)} = \frac{\boldsymbol{1}}{\lambda}. \tag{37}$$

Вероятность попадания показательно распределенной случайной величины в интервал равна

$$\boldsymbol{p(\alpha < X < \beta) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}}, \tag{38}$$

а функция надежности

$$\boldsymbol{R(t) = e^{-\lambda t} = p\ (T > t)} \tag{39}$$

задает вероятность безотказной работы устройства за время $\boldsymbol{t}$ (длительность времени $\boldsymbol{T}$ безотказной работы которого имеет показательное распределение).

Пример 14. Случайная величина X распределена равномерно на интервале $(3;12)$. Требуется:

1) найти функцию плотности $f(x)$, функцию распределения $F(x)$ и построить их графики;
2) вычислить числовые характеристики – математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение;
3) найти вероятность попадания случайной величины в интервал $(1;8)$.

Решение.

1) Функция плотности распределения случайной величины X на промежутке $(3;12]$ равна $f(x) = 1/(12-3) = 1/9$, вне данного промежутка $f(x) = 0$: $f(x) = \begin{cases} 1/9, x \in (3;12] \\ 0, \quad x \notin (3;12] \end{cases}$.

Найдем функцию распределения $F(x)$: если $x \le 3$, то $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(z)dz = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dz = 0$;

если $3 < x \le 12$, то $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(z)dz = \int\limits_{-\infty}^{3} 0dz + \int\limits_{3}^{x} \frac{1}{9}dz = 0 + \left(\frac{z}{9}\right)\Bigg|_3^x = \frac{x}{9} - \frac{1}{3}$;

если $12 < x$, то $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(z)dz = \int\limits_{-\infty}^{3} 0dz + \int\limits_{3}^{12} \frac{1}{9}dz + \int\limits_{12}^{+\infty} 0dz = 1$.

Таким образом, $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 3, \\ \dfrac{x}{9} - \dfrac{1}{3}, & 3 < x \le 12, \\ 1, & 12 < x. \end{cases}$

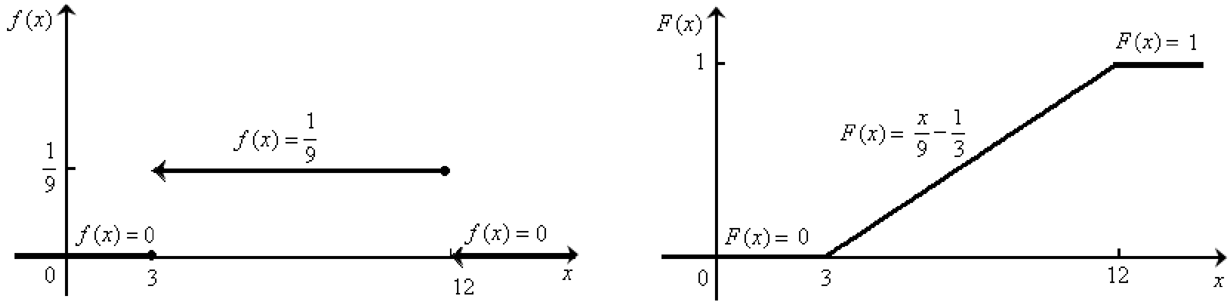

Рис. 6

2) Найдем числовые характеристики: математическое ожидание

$$M(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{3} x \cdot 0dx + \int\limits_{3}^{12} x\frac{1}{9}dx + \int\limits_{12}^{\infty} x \cdot 0dx = \int\limits_{3}^{12} x\frac{1}{9}dx = \left.\frac{x^2}{18}\right|_3^{12} = \frac{135}{18} = 7{,}5;$$

дисперсия $D(x) = M(X^2) - (M(X))^2$, где $M(X^2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{3} x^2 \cdot 0dx +$

$$+ \int\limits_{3}^{12} x^2 \frac{1}{9}dx + \int\limits_{12}^{\infty} x^2 \cdot 0dx = \int\limits_{3}^{12} \frac{x^2}{9}dx = \left.\frac{x^3}{27}\right|_3^{12} = 63, \text{ тогда } D(x) = 63 - (7{,}5)^2 \approx 6{,}75;$$

среднее квадратическое отклонение $\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{6{,}75} \approx 2{,}6$.

Вычислить числовые характеристики в данном случае можно было по формулам (29): $M(X) = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{3+12}{2} = 7{,}5$, $D(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12} = \dfrac{(12-3)^2}{12} = \dfrac{81}{12} = 6{,}75$, $\sigma(X) = \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}} = \dfrac{12-3}{2\sqrt{3}} \approx 2{,}6$.

3) Вероятность того, что случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(1;8)$, по формуле (23): $p(1 < X < 8) = \int\limits_{1}^{8} f(x)dx = \int\limits_{1}^{3} 0dx + \int\limits_{3}^{8} \frac{1}{9}dx = 0 + \left.\frac{x}{9}\right|_3^8 = \frac{5}{9}$

или по формуле (21): $p(1 < X < 8) = F(8) - F(1) = \left.\left(\dfrac{x}{9} - \dfrac{1}{3}\right)\right|_{x=8} = \dfrac{5}{9}$.

<u>Ответ:</u> $f(x) = \begin{cases} 1/9, & x \in (3;12] \\ 0, & x \notin (3;12] \end{cases}$, $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 3 \\ \dfrac{x}{9} - \dfrac{1}{3}, & 3 < x \le 12, \\ 1, & 12 < x \end{cases}$ $M(x) = 7{,}5$, $D(x) = 6{,}75$, $\sigma(x) \approx 2{,}6$, $p(1 < X < 8) = 5/9$.

<u>Пример 15.</u> Диаметр деталей, вытачиваемых на станке, является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с параметрами $a = 20$ *мм* и $\sigma = 2$ *мм*. Деталь считается стандартной, если ее диаметр d лежит в диапазоне $19 < d < 22$. Найти:

1) вероятность того, что деталь будет стандартной;

2) вероятность того, что отклонение диаметра от ожидаемого (от математического ожидания $a = 20$ *мм*) не превышает 1 *мм*;
3) написать функцию плотности распределения и нарисовать ее график.

Решение. 1) Вероятность того, что деталь будет стандартной определяется формулой (34), где $a = 20$, $\sigma = 2$, $\alpha = 19$ и $\beta = 22$:

$$p(19 < X < 22) = \Phi\left(\frac{22-20}{2}\right) - \Phi\left(\frac{19-20}{2}\right) = \Phi(1) - \Phi(-0{,}5) =$$
$$= \Phi(1) + \Phi(0{,}5) = 0{,}3413 + 0{,}1915 = 0{,}5328\,.$$

Мы воспользовались тем, что функция $\Phi(x)$ нечетна, а значения $\Phi(1)$ и $\Phi(0{,}5)$ нашли по таблице значений функции Лапласа [1, прил. 2].

2) Вероятность того, что отклонение диаметра от ожидаемого не превышает 1 *мм* можно вычислить по формуле (35), где, в нашем случае, $\delta = 1$:
$p(|X - 20| < 1) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{1}{2}\right) = 2\Phi(0{,}5) = 2 \cdot 0{,}1915 = 0{,}383$.

3) Функция плотности распределения имеет вид $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-20)^2}{8}}$, график которой указан ниже.

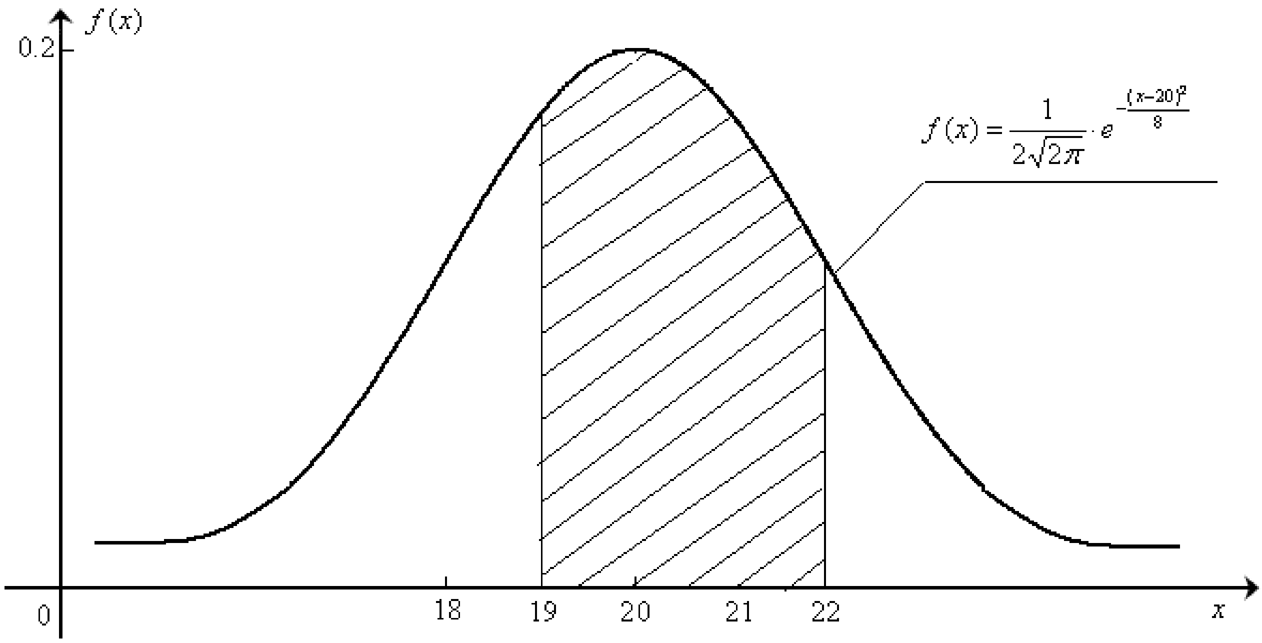

Рис. 7

Замечание. Вероятности стандартности детали соответствует заштрихованная площадь на рис. 7 под кривой Гаусса.

Пример 16. Время безотказной работы башенного крана распределено по показательному закону. Кран ломается в среднем один раз в 50 суток. Требуется:

1) найти функцию плотности $f(t)$, функцию распределения $F(t)$ и построить их графики (время t измеряется в сутках);
2) найти вероятность того, что кран проработает без отказов 100 суток.

Решение.

1) При показательном распределении математическое ожидание $M(x) = 1/\lambda$. Ожидается, что кран может безотказно проработать 50 суток, тогда $50 = 1/\lambda$, т.е. постоянная интенсивности отказов $\lambda = 0{,}02$. Соответственно,

функция плотности (36) имеет вид $f(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ 0{,}02e^{-0{,}02t}, & t > 0 \end{cases}$.

Найдем функцию распределения $F(t)$:

если $t \le 0$, то $F(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} f(z)dz = \int\limits_{-\infty}^{t} 0dz = 0$;

если $0 < t$, то $F(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} f(z)dz = \int\limits_{-\infty}^{o} 0dz + \int\limits_{0}^{t} \lambda e^{-\lambda z} dz = -e^{-\lambda z}\Big|_{0}^{t} = 1 - e^{-\lambda t}$.

Таким образом, при $\lambda = 0{,}02$: $F(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ 1 - e^{-0{,}02t}, & t > 0 \end{cases}$.

Укажем графики функций $f(t)$ и $F(t)$ (рис. 8).

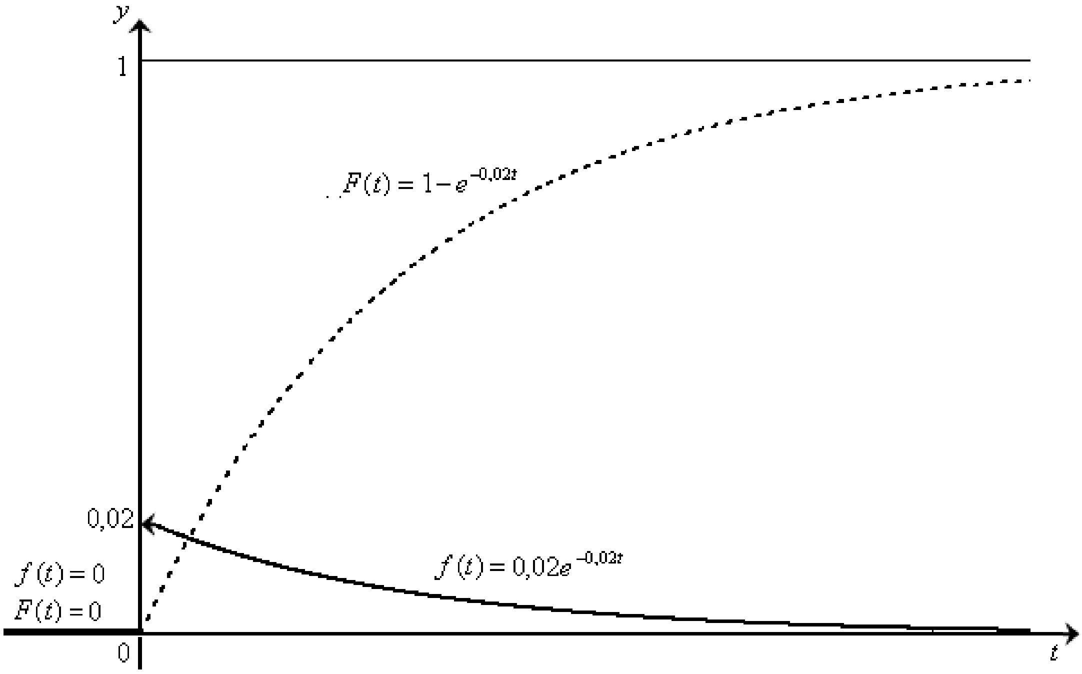

Рис. 8

2) Вероятность того, что кран проработает без отказов 100 суток можно определить по формуле (39): $R(100) = e^{-0.02 \cdot 100} = e^{-2} \approx 0{,}14$.

Ответ: вероятность безотказной работы башенного крана не менее 100 суток приближенно равна 0,14.

6. Элементы математической статистики

Рассмотрим некоторое социальное явление, мнение о котором можно составить по опросу населения. Пусть дано большое множество объектов (листов опроса населения) – данное множество объектов называется **генеральной совокупностью**. Нет возможности изначально перечислить все ответы в листах-опросах, т.е. составить полную группу исходов, но возможно одинаковым ответам присвоить одинаковые номера, таким образом, перевести все ответы на язык цифр. Далее необходимо работать с генеральной совокупностью как со случайной величиной, принимающей численные значения, которые называют **вариантами**. Поскольку листов опроса очень большое количество, берется сравнительно небольшая часть генеральной совокупности. Часть генеральной совокупности называется **выборкой** (количество элементов в ней есть **объем выборки *n***), по которой делается вывод об всей генеральной совокупности: по какому закону она распределена, каковы числовые характеристики распределения. При этом важно, чтобы полученные результаты обладали достаточной достоверностью.

Обычно статистическое распределение задается с помощью таблицы:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$	x_k
n	n_1	n_2	$\dots$	n_i	$\dots$	n_k

(40)

Частоты n_i показывают, сколько раз встретилось значение варианты x_i :

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n. \tag{41}$$

Графически распределению (40), (41) соответствует **полигон частот** – ломаная, отрезки которой последовательно соединяют две соседние точки $A_1(x_1;n_1)$, $A_2(x_2;n_2)$, $A_3(x_3;n_3),\dots,$ $A_k(x_k;n_k)$ на плоскости.

Если в законе распределения (40) перейти к относительным частотам

$$w_i = \frac{n_i}{n} \quad \left(\sum_{i=1}^{k} w_i = 1\right), \tag{42}$$

которые являются аналогами вероятностей, то получим статистическое распределение выборки через относительные частоты:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$	x_k
w	w_1	w_2	$\dots$	w_i	$\dots$	w_k

(43)

Статистическому распределению графически соответствует **полигон относительных частот** – ломаная, отрезки которой последовательно соединяют две соседние точки $B_1(x_1;w_1)$, $B_2(x_2;w_2)$, $B_3(x_3;w_3),\dots,$ $B_k(x_k;w_k)$ на плоскости.

Поскольку в (43) указаны аналоги вероятности каждой из вариант, то можно ввести аналоги числовых характеристик $M(x)$, $D(x)$ и $\sigma(x)$:

выборочное среднее

$$\overline{x}_в = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n}, \tag{44}$$

выборочная дисперсия

$$D_в = \left(\overline{x_в^2}\right) - \left(\overline{x}_в\right)^2, \text{ где } \left(\overline{x_в^2}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^{\,2} n_i}{n}, \tag{45}$$

выборочное среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_в = \sqrt{D_в}. \tag{46}$$

Для <u>непрерывной</u> случайной величины статистическое распределение задается в виде последовательности интервалов и соответствующих частот:

$(x_1;x_2]$	$(x_2;x_3]$	$(x_3;x_4]$	$\dots$	$(x_i;x_{i+1}]$	$\dots$	$(x_k;x_{k+1}]$
n_1	n_2	n_3	$\dots$	n_i	$\dots$	n_k

(47)

Частоты n_i показывают, сколько раз встретилось значение варианты x_i в полуинтервале $(x_i;x_{i+1}]$, формула (41) справедлива и в этом случае.

Количество интервалов k и длины интервалов h определяются формулами

$$k \approx 1 + 3{,}2 \cdot \lg n, \tag{48}$$

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k}, \tag{49}$$

где n – объем выборки, $x_{\max}$ и $x_{\min}$, соответственно, максимальное и минимальное значения случайной величины для данной выборки.

Интервальное распределение выборки (47) легко сводится к дискретному распределению (40), если в качестве вариант выбрать середины полуинтервалов $(x_i; x_{i+1}]$:

$y_1 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$	$y_2 = \dfrac{x_2 + x_3}{2}$	$\cdots$	$y_i = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$	$\cdots$	$y_k = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}$
n_1	n_2	$\cdots$	n_i	$\cdots$	n_k

(50).

По формулам (44)-(46) можно вычислить числовые характеристики непрерывной случайной величины.

Графически интервальное распределение задается **гистограммой** – ступенчатой фигурой, основанием каждой ступеньки которой служат отрезки длины h: $[x_1; x_2]$, $[x_2; x_3]$,…, $[x_k; x_{k+1}]$, а соответствующие высоты равны $h_i = w_i / h$. Гистограмма относительных частот является аналогом функции плотности, так как площадь под ней всегда равна единице.

Аналогично функции распределения случайной величины вводится эмпирическая функция распределения

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n}, \tag{51}$$

где n_x – число вариант меньших x, n – объем выборки.

Полученные по формулам (44)-(46) числовые оценки $x_в$, $D_в$ и $\sigma_в$ сами являются случайными величинами. При разных выборках одного и того же объема их значения будут различными. Необходимо установить, с какой точностью δ они оценивают параметры $M(x)$, $D(x)$ и $\sigma(x)$ генеральной совокупности. Путь θ некоторый параметр генеральной совокупности, а θ_n^* точечная оценка параметра θ по некоторой выборке объема n. В теории вероятностей оценить предоставляется возможным только <u>вероятность</u> того события, что отклонение полученного по выборке параметра θ_n^* от истинного θ не превосходит величину δ (получить оценку с точностью δ):

$$p(|\theta_n^* - \theta| < \delta) = \gamma. \tag{52}$$

Вероятность γ называется **доверительной вероятностью**, или надежностью, а интервал $(\theta_n^* - \delta; \theta_n^* + \delta)$ **доверительным интервалом** с заданной надежностью γ.

Укажем доверительный интервал с заданной надежностью γ для оценки математического ожидания a генеральной совокупности, распределенной по нормальному закону:

если известно среднее квадратическое отклонение σ, то верна оценка

$$\bar{x}_в - \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \tag{53}$$

где n – объем выборки, а t находится из равенства $\Phi(t) = \gamma / 2$ по таблице значений функции Лапласа $\Phi(t)$ [1. прил. 2];

если σ неизвестно, то так как $\sigma_в$ смещенная влево оценка, то σ заменяется на исправленное среднее квадратическое отклонение s:

$$s = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\sigma_в, \tag{54}$$

и доверительный интервал для математического ожидания оценивается неравенствами:

$$\bar{x}_в - \frac{t_\gamma \cdot s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + \frac{t_\gamma \cdot s}{\sqrt{n}}, \tag{55}$$

где $t_\gamma = t(\gamma, n)$ находится из [1. прил. 3].

Доверительный интервал для оценки среднего квадратического отклонения σ нормального распределения с заданной надежностью γ находится по формуле

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q), \tag{56}$$

где s есть исправленное среднее квадратическое отклонение (54), а $q = q(\gamma, n)$ находится из [1. прил. 4].

Пример 17. Задано интервальное распределение выборки:

$(y_i; y_{i+1}]$	12-15	15-18	18-21	21-24	24-27	27-30
n_i	2	6	12	19	7	4

Требуется:
1) построить гистограмму относительных частот;
2) перейти к вариантам, записать эмпирическую функцию распределения и построить ее график;
3) найти точечные оценки $\bar{x}_в$ и $\sigma_в$;
4) считая генеральную совокупность нормально распределенной, найти доверительные интервалы для a и σ с надежностью $\gamma = 0{,}95$.

Решение. 1) Объем выборки $n = \sum_{i=1}^{6} n_i = 2+6+12+19+7+4 = 50$. По формуле (42) найдем относительные частоты и выпишем таблицу с относительными частотами:

$(y_i; y_{i+1}]$	12-15	15-18	18-21	21-24	24-27	27-30
w_i	0,04	0,12	0,24	0,38	0,14	0,08

Для построения гистограммы относительных частот на оси абсцисс отложим частичные интервалы длины $h = 3$, высота ступенчатой функции на каждом из интервалов равна $h_i = w_i / h$. Для лучшей наглядности выберем разный масштаб на осях координат.

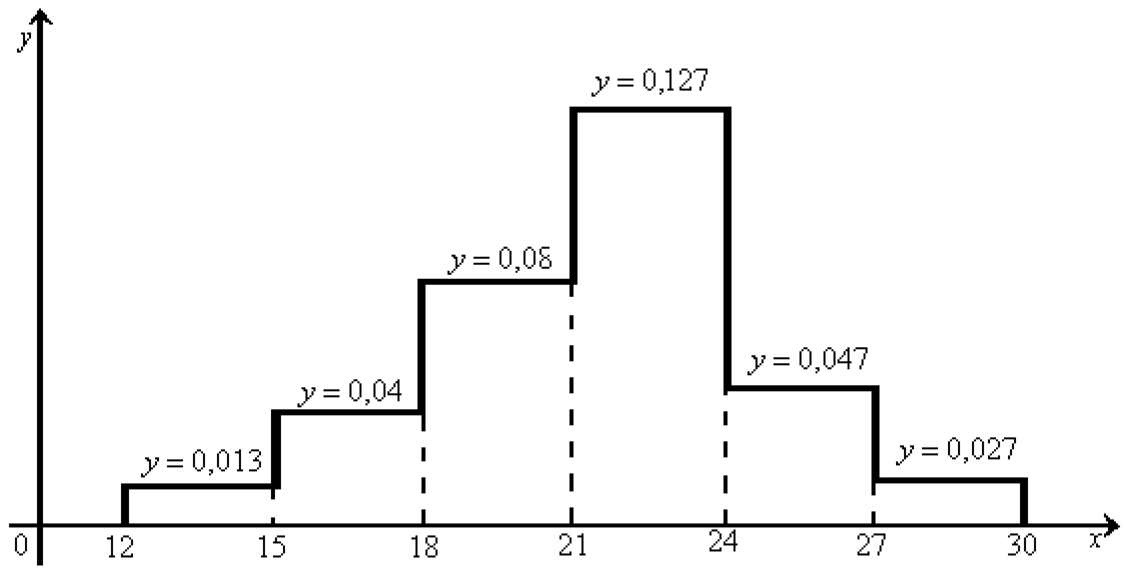

Рис. 9

2) Перейдем к вариантам (50), тогда данному в условии интервальному распределению выборки, будет соответствовать вариационный ряд

x_i	13,5	16,5	19,5	22,5	25,5	28,5
n_i	2	6	12	19	7	4
w_i	0,04	0,12	0,24	0,38	0,14	0,08

Аналогично тому, как находилась функция распределения $F(x)$ в примере 11, легко написать эмпирическую функцию $F^*(x)$, прибавляя к предыдущему ее значению следующее значение относительной частоты w_i (аналог вероятности p_i):

$F^*(x) = 0$, если $X \le 13{,}5$;

$F^*(x) = 0{,}04$, если $13{,}5 < X \le 16{,}5$;

$F^*(x) = 0{,}04 + 0{,}12 = 0{,}16$, если $16{,}5 < X \le 19{,}5$;

$F^*(x) = 0{,}16 + 0{,}24 = 0{,}4$, если $19{,}5 < X \le 22{,}5$;

$F^*(x) = 0{,}4 + 0{,}38 = 0{,}78$, если $22{,}5 < X \le 25{,}5$;

$F^*(x) = 0{,}78 + 0{,}14 = 0{,}92$, если $25{,}5 < X \le 28{,}5$;

$F^*(x) = 0{,}92 + 0{,}08 = 1$, если $28{,}5 < X$.

Наконец, построим график функции $F^*(x)$.

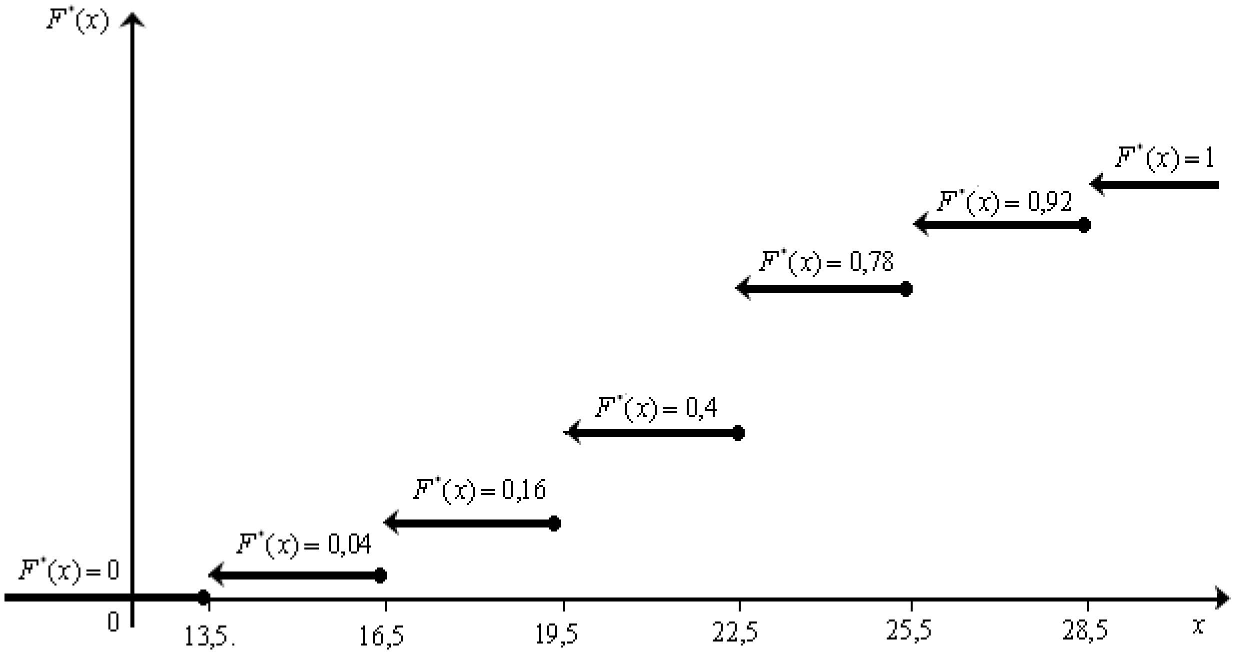

Рис. 10

3) Найдем точечные оценки $\bar{x}_в$ и $\sigma_в$ по формулам (44)-(46):

$$\bar{x}_в = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n} = \frac{(3{,}5 \cdot 2 + 16{,}5 \cdot 6 + 19{,}5 \cdot 12 + 22{,}5 \cdot 19 + 25{,}5 \cdot 7 + 28{,}5 \cdot 4)}{50} = 21{,}6;$$

$$\sigma_в(x) = \sqrt{\left(\overline{x_в^2}\right) - \left(\bar{x}_в\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{(3{,}5)^2 \cdot 2 + (16{,}5)^2 \cdot 6 + (19{,}5)^2 \cdot 12 + (22{,}5)^2 \cdot 19 + (25{,}5)^2 \cdot 7 + (28{,}5)^2 \cdot 4}{50} - (21{,}6)^2} = 3{,}6.$$

Обратим внимание на то, что вычисления достаточно трудоемки, несмотря на небольшой объем выборки. Укажем другой способ вычисления числовых характеристик выборки – **метод условных вариант**.

Сделаем замену переменных $u_i = \dfrac{x_i - x_{ср}}{h}$. В нашем случае $h = 3$, а из двух значений в середине таблицы выгодно выбрать среднее значение варианты $x_{ср} = 22{,}5$ с большей частотой, тогда $u_i = \dfrac{x_i - 22{,}5}{h}$ и таблица частот имеет вид

u_i	–3	–2	–1	0	1	2
n_i	2	6	12	19	7	4

Найти точечные оценки последнего вариационного ряда значительно легче:

$$\overline{u}_в = \frac{\sum_{i=1}^{k} u_i n_i}{n} = \frac{-3\cdot 2 - 2\cdot 6 - 1\cdot 12 + 0\cdot 19 + 1\cdot 7 + 2\cdot 4}{50} = -0{,}3;$$

$$\sigma_в(u) = \sqrt{\left(\overline{u_в^2}\right) - \left(\overline{u}_в\right)^2} = \sqrt{\frac{(-3)^2\cdot 2 + (-2)^2\cdot 6 + (-1)^2\cdot 12 + 0^2\cdot 19 + 1^2\cdot 7 + 2^2\cdot 4}{50} - (-0{,}3)^2} \approx 1{,}2$$

.

Вернемся к первоначальной варианте, из замены $\overline{u}_в = \dfrac{\overline{x}_в - x_{ср}}{h}$ следует $\overline{x}_в = x_{ср} + \overline{u}_в \cdot h = 22{,}5 + (-0{,}3)\cdot 3 = 21{,}6$. Среднее квадратическое отклонение исходной варианты определяется по формуле $\sigma_в(x) = h\cdot\sigma_в(u) \approx 3\cdot 1{,}2 = 3{,}6$.

4) В предыдущем пункте были найдены точечные оценки $\overline{x}_в = 21{,}6$, $\sigma_в(x) = 3{,}6$.

Поскольку σ неизвестно, то по формулам (54)-(55) определим доверительный интервал для математического ожидания. Подставив значение объема выборки $n = 50$ в формулу (54), получим исправленное среднее квадратическое отклонение $s = \sqrt{\dfrac{50}{49}}\cdot 3{,}6 \approx 3{,}636$. Из [1. прил. 3] найдем $t_\gamma(\gamma, n) = t_\gamma(0{,}95; 50) = \; = 2{,}009$. Подставив найденные значения $\overline{x}_в = 21{,}6$, $n = 50$ и $s \approx 3{,}636$ в формулу (55), получим доверительный интервал для математического ожидания a:

$$21{,}6 - \frac{2{,}009\cdot 3{,}636}{\sqrt{50}} < a < 21{,}6 + \frac{2{,}009\cdot 3{,}636}{\sqrt{50}}.$$

После вычислений получим $20{,}57 < a < 22{,}63$.

По формуле (56) определим доверительный интервал для среднего квадратического отклонения σ. Из [1, прил. 4] найдем $q(\gamma; n) = q(0{,}95; 50) = 0{,}21$. Подставив найденные значения $q(\gamma; n) = 0{,}21$, $s \approx 3{,}636$ в формулу (56) получим доверительный интервал для среднего квадратического отклонения σ:

$$3{,}636\cdot(1 - 0{,}21) < \sigma < 3{,}636\cdot(1 + 0{,}21).$$

Окончательно получим $2{,}87 < \sigma < 4{,}4$.

Ответ: $\overline{x}_в = 21{,}6$; $\sigma_в(x) = 3{,}6$; $20{,}57 < a < 22{,}63$; $2{,}87 < \sigma < 4{,}4$.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

I. Классическое определение вероятности

1. Сборная конструкция состоит из шести элементов, два из которых одинаковы. Элементы конструкции завозятся на стройку в произвольном порядке. Какова вероятность того, что элементы будут завезены в том порядке, в котором они должны быть смонтированы?
2. В аудитории 8 двухместных парт. Какова вероятность того, что при случайном рассаживании два данных студента из группы в 16 человек окажутся за одной партой?
3. Студент идет на экзамен, выучив 25 вопросов из 36. Какова вероятность ответить на три вопроса, задаваемых преподавателем поочерёдно?
4. На подмостках лежат три белых и два красных кирпича. Каменщик случайным образом выкладывает их в один ряд. Какова вероятность того, что кирпичи будут чередоваться?
5. Куратор назначает трех наугад выбранных студентов из своей группы делегатами на профсоюзную конференцию. Какова вероятность того, что делегация будет состоять из одного студента и двух студенток, если в группе 15 студентов и 5 студенток?
6. Бросают три игральных кубика. Какова вероятность того, что сумма выпавших на них очков будет равна трем?
7. Игроку сдают 6 карт из 36. Какова вероятность того, что среди них два туза?
8. Управляющий проверяет наугад 4 СМУ. Какова вероятность того, что номера этих СМУ будут идти в порядке возрастания?
9. На складе имеется 30 мешков цемента марки 300, 50 – марки 400 и 20 – марки 500. Наугад берется один мешок цемента и привозится на стройку. Какова вероятность того, что его придется обменивать на складе на другой мешок, если цемент марки 300 не подходит для планируемой работы?
10. Какова вероятность того, что из группы в 20 студентов при случайном выборе старостой станет студент Иванов, а профоргом – Петров, если в группе есть два студента по фамилии Иванов и один по фамилии Петров?
11. Бросают два игральных кубика. Какова вероятность того, что сумма выпавших на них очков окажется равной шести?
12. Из двух бригад по 10 человек наугад выбирают по одному человеку. Два брата входят в состав различных бригад. Найти вероятность того, что оба брата окажутся выбранными?
13. Бросают два игральных кубика. Какова вероятность того, что произведение выпавших на них очков окажется равным тридцати шести?
14. На строительных лесах лежат 12 красных и 8 белых кирпичей. Наугад берут 3 кирпича. Какова вероятность того, что два из них красные, а один белый?
15. Бросаются две игральные кости. Какова вероятность того, что на них выпадет одинаковое число очков?
16. Из шести карточек с буквами сложено слово “КАРЕТА”. Ребенок перемешивает карточки и снова раскладывает их в ряд. Какова вероятность того, что получится слово “РАКЕТА”?
17. В бригаде каменщиков 6 мужчин и 4 женщины. Случайным образом отбирают бригаду из 7 человек. Какова вероятность того, что среди отобранных окажется 5 мужчин?
18. Бросаются две игральные кости. Какова вероятность того, что выпадет дубль (одинаковое число очков)?
19. Ребенок на компьютере случайно нажимает подряд три разные клавиши. Какова вероятность, что будет напечатано слово “МИР”, если имеется всего 106 клавиш?
20. В аудитории 12 двухместных парт. Какова вероятность того, что при случайном рассаживании два данных студента из группы в 24 человека окажутся за одной партой?

21. Игрок в “Спортлото” зачеркивает 5 чисел из 36. Какова вероятность угадать все 5 номеров?
22. Человек забыл две последние цифры телефона, но помнит, что среди них есть одна цифра “5”. Какова вероятность набрать правильный номер с одной попытки?
23. В партии из 40 смесителей 5 бракованных. Наудачу берут 6 смесителей. Какова вероятность того, что из выбранных есть один бракованный?
24. Ребенок играет с 33 карточками разрезной азбуки, на которых написаны разные буквы русского алфавита. Какова вероятность того, что из наугад сложенных в ряд четырех карточек азбуки получится слово “НЕБО”?
25. Какова вероятность, что при бросании двух игральных костей произведение выпавших на них очков равно 12?

II. Вероятность суммы и произведения событий

26. Вероятность при одиночном выстреле поразить цель равна 0,4. Сколько нужно провести выстрелов, чтобы с вероятностью не менее 0,9 цель была поражена?
27. Вероятность отказа первого узла прибора – 1/8, а второго – 1/7. Найти вероятность безотказной работы прибора, состоящего из этих двух узлов.
28. При заезде на стройку вероятность прокола шины самосвала равна 0,005. Какова вероятность, что прокола шины не будет при трехкратном заезде на стройку?
29. Стрелок набирает не менее 9 очков в 75% случаев, а вероятность попадания в десятку равна 0,4. Какова вероятность попадания в девятку?
30. Вероятность заболеть во время эпидемии гриппа равна 0,1. Какова вероятность того, что в бригаде из восьми человек никто не заболел?
31. Какова вероятность для студента быть отличником, если вероятность сдать на отлично первый экзамен – 80%, второй – 90% и третий – 95%?
32. Вероятность разрушения у двух конкретных домов при 6 бальном землетрясении равны соответственно 1/10 и 1/15. Найти вероятность того, что оба дома при землетрясении устоят.
33. Баскетболист выполняет два штрафных броска, при этом вероятность попасть в первый раз равна 0,8, а во второй – 0,9. Найти вероятность получить только одно очко из двух.
34. Прибор состоит из трех жизненно важных узлов, отказ каждого из них выводит из строя весь прибор. Какова вероятность безотказной работы всего прибора, если вероятности отказа узлов равны 0,3; 0,2 и 0,1?
35. На стройке работают два крана. Один из них занят 70% всего рабочего времени, а другой – 80%. Какова вероятность того, что в данный момент работает только один кран?
36. Два стрелка стреляют по одной мишени, делая по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле первым стрелком равна 0,8 и вторым – 0,7. Какова вероятность того, что в цель попадет только один стрелок?
37. 90% продукции завода составляют стандартные изделия, из них 70% – высшего сорта. Какова вероятность, что взятое наугад изделие высшего сорта?
38. Вероятность отказа насоса на атомной станции равна 0,001, что приводит к аварии. Сколько надо поставить запасных насосов, чтобы вероятность аварии по вине насосов была 0,000000001?
39. Три орудия стреляют по цели с вероятностями попаданий 0,5, 0,8 и 0,9 соответственно. Цель поражена, если есть хотя бы одно попадание. Найти вероятность поражения цели.
40. Вероятность того, что в течение одной смены возникнет неполадка башенного крана, равна 0,05. Какова вероятность безаварийной работы крана в течение трех смен?

41. По статистическим данным из 100000 десятилетних детей до 40 лет доживают 82277 человек, а до 70 лет – 37965 человек. Найти вероятность для сорокалетних дожить до 70 лет.
42. Стрелок попадает в десятку в 15% случаев и в девятку в 25%. Найти вероятность набора не более 8 очков.
43. Два стрелка стреляют по одной мишени, делая по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле первым стрелком равна 0,7 и вторым – 0,8. Какова вероятность того, что оба попадут в цель?
44. При изготовлении детали заготовка должна пройти 4 операции. Предполагая появление брака на отдельных операциях событиями независимыми, найти вероятность изготовления стандартной детали, если вероятность брака на первой операции 0,02; на второй – 0,01; на третьей – 0,03 и на четвертой – 0,04.
45. Брошены две игральные кости. Чему равна вероятность того, что хотя бы на одной из них выпадет 6 очков?
46. Вероятность завести двигатель автомобиля зимой с одной попытки равна 0,6. Какова вероятность того, что двигатель заведется со второй попытки?
47. Какова вероятность того, что две сданные карты окажутся одной масти, если в колоде 36 карт?
48. У двоих работающих вместе строителей простои составляют соответственно 20% и 30% от всего рабочего времени. Найти вероятность того, что в данный момент работает хотя бы один из них.
49. Сколько раз нужно бросить игральную кость, чтобы с вероятностью не меньшей 0,3 хотя бы один раз выпала шестерка?
50. Экзаменационный билет содержит три вопроса. Вероятности по отдельности ответить на каждый из этих вопросов равна – 0,7, 0,8 и 0,9, соответственно. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необходимо ответить на все три вопроса?

III. Формула полной вероятности

51. Стреляющий первым во время дуэли может попасть в противника с вероятностью 0,8. При ответном выстреле второй дуэлянт может попасть в первого с вероятность 0,9, если первый промахнулся, и с вероятностью 0,3, если первый попал в него. Найти вероятность второму дуэлянту попасть в первого при ответном выстреле?
52. Вероятности сдать или не сдать экзамен без дополнительных вопросов равны соответственно 0,3 и 0,2. В остальных случаях студенту задаются дополнительные вопросы, вероятность ответить на которые равна 0,6. Какова вероятность того, что студент сдаст экзамен?
53. Пассажир электрички вышел на платформу в пункте А и знает, в каком направлении находится пункт В. Какова вероятность того, что он прибудет в пункт В, если в каждой развилке путник выбирает дорогу в нужном направлении случайным образом? (Схема дорог указана на рис. 11)

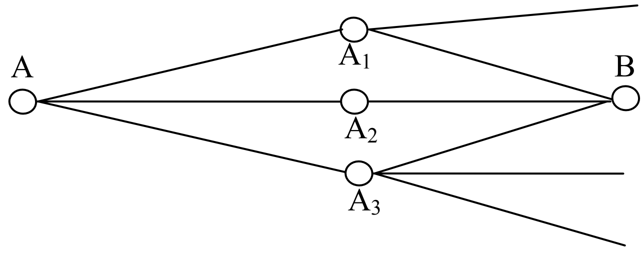

Рис. 11

54. Вероятность обнаружить брак в цехе равна 0,3. Вероятность того, что в дальнейшем брак будет обнаружен в ОТК завода, равна 0,6. Какова вероятность того, что брак будет обнаружен?
55. На стройку поступают плиты с трех железобетонных заводов: 200 плит с первого завода, 400 плит со второго и 900 с третьего. Процент брака изделий этих железобетонных заводов равен соответственно 1,5%, 2% и 2,5%. Найти вероятность того, что плита, поднимаемая краном, стандартная.
56. При оценке остаточных знаний процент справившихся с заданиями составляет 80% у отличников, 60% у хорошистов и 20% у остальных. В потоке из 96 человек 12 отличников и 24 хорошиста по тестируемому предмету. Какова вероятность для наугад выбранного студента справиться с заданием?
57. Нормальный режим работы прибора наблюдается в 90% случаев. Вероятность выхода прибора из строя за время Т в нормальном режиме составляет 0,1, а в противном случае – 0,7. Найти вероятность выхода прибора из строя за время Т.
58. У передвижной бетономешалки остановилось вращение барабана. Есть возможность довести бетон, прежде чем он успеет схватиться, до любой из двух ближайших строек с вероятностями 0,9 и 0,8 соответственно. Кроме того, к первой стройке ведет одна дорога, а ко второй – две. Какова вероятность успешно довезти бетон, если дорога выбрана случайно?
59. На сборку попадают детали с трех станков. Известно, что брак с первого станка составляет 0,3%, со второго – 0,2% с третьего – 0,4%. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого и третьего станков поступило по 2000 деталей, а со второго – 1000 деталей.
60. Нормальный режим работы прибора наблюдается в 80% случаев. Вероятность выхода прибора из строя за время Т в нормальном режиме составляет 0,2, а в противном случае – 0,7. Найти вероятность безотказной работы прибора за время Т.
61. В группе из 20 человек 3 отличника и 7 хорошистов. Отличник наверняка сдаст экзамен на отлично или хорошо; хорошист в 10% случаев сдаст на отлично и в 60% случаев сдаст хорошо; а остальные только в 20% случаев получат хорошую оценку. Какова вероятность наугад выбранному студенту этой группы сдать экзамен на “хорошо” или “отлично”?
62. У передвижной бетономешалки остановилось вращение барабана. Есть возможность довести бетон, прежде чем он успеет схватиться, до любой из трех ближайших строек с вероятностями 0,9; 0,7 и 0,8 соответственно. Кроме того, к первой стройке ведет одна дорога, а ко второй и третьей стройкам по две дороги. Какова вероятность успешно довезти бетон, если дорога выбрана случайно?
63. На столе лежит 25 билетов, из них 16 “счастливых” для данного студента. Изменится ли вероятность вытащить “счастливый” билет, если студент идет сдавать экзамен не первым, а вторым?
64. В первой коробке лежит 20 дюбелей, из которых 15 стандартных. Из первой коробки во вторую, содержащую 24 дюбеля (из них 19 стандартных), переложен один дюбель. Какова вероятность после этого достать из второй коробки стандартный дюбель?
65. На стройку поставляют партии кирпичей с трех заводов: с первого – 25000, со второго – 35000 и с третьего – 40000 штук. Процент брака у партий кирпича с этих заводов составляет соответственно 2%, 3% и 4%. Какова вероятность того, что каменщик возьмет из пакета стандартный кирпич, если крановщик поднимает ближайший к нему в данный момент пакет кирпичей?
66. На столе лежит 30 билетов, из них 25 “счастливых” для данного студента. Изменится ли вероятность вытащить “счастливый” билет, если студент идет сдавать экзамен не первым, а вторым?
67. При оценке остаточных знаний процент справившихся с заданиями составляет 70% у отличников, 50% у хорошистов и 10% у остальных. В потоке из 150 человек 16 от-

личников и 36 хорошиста по тестируемому предмету. Какова вероятность для наугад выбранного студента справиться с заданием?

68. На стройку поступают плиты с трех железобетонных заводов: 100 плит с первого завода, 200 плит со второго и 500 – с третьего. Процент брака изделий железобетонных заводов составляет соответственно 3%, 4% и 2%. Найти вероятность того, что плита, поднимаемая краном, стандартная.
69. Вероятность обнаружить брак в цехе равна 0,6. Вероятность того, что в дальнейшем брак будет обнаружен в ОТК завода, равна 0,85. Какова вероятность того, что брак будет обнаружен?
70. Пассажир электрички вышел на платформу в пункте А и знает, в каком направлении находится пункт В. Какова вероятность того, что он прибудет в пункт В, если после отдыха в одном из пунктов A_1, A_2 или A_3 он может поехать в любом направлении, в том числе и в обратном? (Схема дорог указана на рис. 11)
71. Вероятности сдать или не сдать экзамен без дополнительных вопросов равны соответственно 0,4 и 0,05. В остальных случаях студенту задаются дополнительные вопросы, вероятность ответить на которые равна 0,7. Какова вероятность того, что студент сдаст экзамен?
72. Стреляющий первым во время дуэли может попасть в противника с вероятностью 0,9. При ответном выстреле второй дуэлянт может попасть в первого с вероятность 0,7, если первый промахнулся и с вероятностью 0,2, если первый попал в него. Найти вероятность второму дуэлянту попасть в первого при ответном выстреле.
73. На столе лежит 20 билетов, из них 12 “счастливых” для данного студента. Изменится ли вероятность вытащить “счастливый” билет, если студент идет сдавать экзамен не первым, а вторым?
74. В первой коробке лежит 36 дюбелей, из которых 20 стандартных. Из первой коробки во вторую, содержащую 19 дюбеля (из них 14 стандартных), переложен один дюбель. Какова вероятность после этого достать из второй коробки стандартный дюбель?
75. Пассажир электрички вышел на платформу в пункте А и знает, в каком направлении находится пункт В. Какова вероятность того, что он прибудет в пункт В, если в каждой развилке путник выбирает дорогу в нужном направлении случайным образом? (Схема дорог указана на рис. 12)

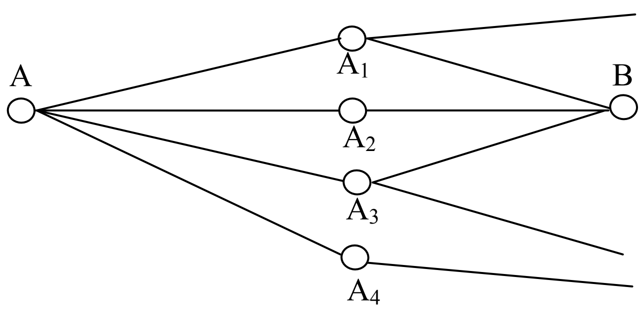

Рис. 12

IV. Повторение испытаний (схема Бернулли)

Задачи №№76-100. Производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A происходит с вероятностью p. Найти вероятность того, что:

а) событие A произойдет ровно k раз;

б) событие A произойдет не менее k_1 и не более k_2 раз.

№	n	p	k	k_1	k_2
76.	390	0,6	240	230	235

77.	7	0,7	5	4	6
78.	9	0,4	3	2	4
79.	290	0,7	200	205	216
80.	6	0,7	4	3	6
81.	110	0,03	4	3	5
82.	180	0,7	125	130	140
83.	8	0,6	5	4	7
84.	195	0,6	115	120	130
85.	142	0,02	3	4	5
86.	6	0,4	2	3	5
87.	625	0,6	380	360	370
88.	250	0,01	3	1	4
89.	8	0,7	5	4	6
90.	120	0,04	5	4	6
91.	540	0,4	200	245	260
92.	6	0,9	4	5	6
93.	7	0,3	3	2	4
94.	350	0,6	170	175	190
95.	7	0,4	3	4	6
96.	200	0,8	165	155	170
97.	170	0,03	5	3	5
98.	240	0,7	160	165	175
99.	9	0,8	7	5	7
100.	150	0,02	2	2	4

V. Дискретные случайные величины

Задачи №№101-125. Три плотника сделали по одному экземпляру одного и того же изделия. Вероятность предоставить готовое изделие без брака для них соответственно равны p_1, p_2, p_3. Составить закон распределения случайной величины X - числа готовых изделий без брака, найти ее математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

№	p_1	p_2	p_3
101.	0,9	0,6	0,4
102.	0,6	0,7	0,5
103.	0,7	0,4	0,6
104.	0,4	0,7	0,8
105.	0,9	0,7	0,5
106.	0,6	0,3	0,8
107.	0,9	0,7	0,1
108.	0,8	0,6	0,5
109.	0,5	0,4	0,8
110.	0,9	0,2	0,8
111.	0,6	0,3	0,7
112.	0,3	0,6	0,9
113.	0,8	0,1	0,6
114.	0,6	0,3	0,9
115.	0,9	0,4	0,7
116.	0,7	0,1	0,8

117.	0,2	0,9	0,7
118.	0,8	0,3	0,9
119.	0,5	0,9	0,2
120.	0,2	0,4	0,9
121.	0,2	0,8	0,7
122.	0,4	0,3	0,8
123.	0,7	0,9	0,3
124.	0,9	0,8	0,4
125.	0,8	0,5	0,7

VI.Непрерывные случайные величины, их способы задания и основные числовые характеристики

Задачи №№126-150. Задана функция $f(x)$ на указанных промежутках. Найти константу A, при которой функция $f(x)$ может быть плотностью распределения некоторой случайной величины X. Найти соответствующую функцию распределения $F(x)$. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

126. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1; \\ A(x+1), & -1<x\le 1; \\ 0, & 1<x. \end{cases}$

127. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ Ax^2, & 0<x\le 2; \\ 0, & 2<x. \end{cases}$

128. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -2; \\ A(2-x), & -2<x\le 0; \\ 0, & 0<x. \end{cases}$

129. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ Ax^3, & 0<x\le 3; \\ 0, & 3<x. \end{cases}$

130. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ A(3x+1), & 0<x\le 1/3; \\ 0, & 1/3<x. \end{cases}$

131. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ Ax^4, & 0<x\le 1; \\ 0, & 1<x. \end{cases}$

132. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -3; \\ A(2-3x), & -3<x\le -1; \\ 0, & -1<x. \end{cases}$

133. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ Ax^5, & 0<x\le 2; \\ 0, & 2<x. \end{cases}$

134. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1; \\ A(2x+3), & 1<x\le 2; \\ 0, & 2<x. \end{cases}$

135. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ Ax^7, & 0<x\le 1; \\ 0, & 1<x. \end{cases}$

136. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 3; \\ A(2x-3), & 3<x\le 4; \\ 0, & 4<x. \end{cases}$

137. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ Ax^6, & 0<x\le 3; \\ 0, & 3<x. \end{cases}$

138. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -4; \\ A(3-x), & -4<x\le -2; \\ 0, & -2<x. \end{cases}$

139. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -2; \\ Ax^2, & -2<x\le 0; \\ 0, & 0<x. \end{cases}$

140. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ A(x^2+x), & 0<x\le 2;\\ 0, & 2<x.\end{cases}$ 141. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le -3;\\ Ax^3, & -3<x\le 0;\\ 0, & 0<x.\end{cases}$

142. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ A(x^2-x), & -1<x\le 0;\\ 0, & 0<x.\end{cases}$ 143. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le -3;\\ Ax^4, & -3<x\le 0;\\ 0, & 0<x.\end{cases}$

144. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ A(x^2-3x+2), & 1<x\le 2;\\ 0, & 2<x.\end{cases}$ 145. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ Ax^5, & -2<x\le 0;\\ 0, & 0<x.\end{cases}$

146. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ A(x^2-4x+3), & -2<x\le 0;\\ 0, & 0<x.\end{cases}$ 147. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le -3;\\ Ax^6, & -3<x\le 0;\\ 0, & 0<x.\end{cases}$

148. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ A(x^3+x), & 0<x\le 1;\\ 0, & 1<x.\end{cases}$ 149. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ Ax^7, & -1<x\le 0;\\ 0, & 0<x.\end{cases}$

150. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ A(x^3-x), & -1<x\le 0;\\ 0, & 0<x.\end{cases}$

<u>Задачи №№151-175.</u> Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти функцию плотности распределения $f(x)$. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$. Найти вероятность попадания случайной величины X в заданный интервал $(\alpha;\beta)$.

151. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 2\sin x, & 0<x\le \pi/6;\\ 1, & \pi/6<x.\end{cases}$
$\alpha=-1,\ \beta=\pi/9.$

152. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 3\pi/2;\\ 1+\sin x, & 3\pi/2<x\le 2\pi;\\ 1, & 2\pi<x.\end{cases}$
$\alpha=-1,\ \beta=5\pi/3.$

153. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le \pi;\\ 1+\cos x, & \pi<x\le 3\pi/2;\\ 1, & 3\pi/2<x.\end{cases}$
$\alpha=5\pi/4,\ \beta=2\pi.$

154. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -\pi;\\ 2+2\cos x, & -\pi<x\le -2\pi/3;\\ 1, & -2\pi/3<x.\end{cases}$
$\alpha=-5\pi/6,\ \beta=-\pi/3.$

155. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le \pi; \\ 2\cos^2(x/2), & \pi < x \le 3\pi/2; \\ 1, & 3\pi/2 < x. \end{cases}$

$\alpha = \pi/3,\ \beta = 4\pi/3.$

156. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 3\pi/2; \\ 2+2\sin x, & 3\pi/2 < x \le 11\pi/6; \\ 1, & 11\pi/6 < x. \end{cases}$

$\alpha = 5\pi/3, \beta = 2\pi.$

157. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \sin x, & 0 < x \le \pi/2; \\ 1, & \pi/2 < x. \end{cases}$

$\alpha = \pi/3,\ \beta = 2\pi/3.$

158. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le \pi/2; \\ -\cos x, & \pi/2 < x \le \pi; \\ 1, & \pi < x. \end{cases}$

$\alpha = \pi/6, \beta = 3\pi/4.$

159. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le \pi/2; \\ -2\cos x, & \pi/2 < x \le 2\pi/3; \\ 1, & 2\pi/3 < x. \end{cases}$

$\alpha = 7\pi/12,\ \beta = 3\pi/4.$

160. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le -\pi; \\ -\sin x, & -\pi < x \le -\pi/2; \\ 1, & -\pi/2 < x. \end{cases}$

$\alpha = -5\pi/6, \beta = 2\pi.$

161. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le -2\pi; \\ 2\sin x, & -2\pi < x \le -11\pi/6; \\ 1, & -11\pi/6 < x. \end{cases}$

$\alpha = -23\pi/12,\ \beta = 0.$

162. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 1-\cos x, & 0 < x \le \pi/2; \\ 1, & \pi/2 < x. \end{cases}$

$\alpha = -\pi/3, \beta = \pi/3.$

163. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 2\pi; \\ 1-\cos x, & 2\pi < x \le 5\pi/2; \\ 1, & 5\pi/2 < x. \end{cases}$

$\alpha = 9\pi/4, \beta = 3\pi.$

164. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le \pi/2; \\ 1-\sin x, & \pi/2 < x \le \pi; \\ 1, & \pi < x. \end{cases}$

$\alpha = 3\pi/4, \beta = 3\pi/2.$

165. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le -2\pi; \\ \sin x, & -2\pi < x \le -3\pi/2; \\ 1, & -3\pi/2 < x. \end{cases}$

$\alpha = -3\pi,\ \beta = -7\pi/4.$

166. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le -\pi/2; \\ \cos x, & -\pi/2 < x \le 0; \\ 1, & 0 < x. \end{cases}$

$\alpha = -\pi/6, \beta = \pi/3.$

167. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 5\pi/2; \\ -\cos x, & 5\pi/2 < x \le 3\pi; \\ 1, & 3\pi < x. \end{cases}$

$\alpha = 2\pi,\ \beta = 11\pi/4.$

168. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le \pi; \\ -2\sin x, & \pi < x \le 7\pi/6; \\ 1, & 7\pi/6 < x. \end{cases}$

$\alpha = \pi/2,\ \beta = 13\pi/12.$

169. $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -\pi/2; \\ 1+\sin x, & -\pi/2<x\le 0; \\ 1, & 0<x. \end{cases}$

$\alpha=-\pi/6,\ \beta=\pi/2.$

170. $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le \pi; \\ 2+2\cos x, & \pi<x\le 4\pi/3; \\ 1, & 4\pi/3<x. \end{cases}$

$\alpha=7\pi/6, \beta=2\pi.$

171. $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -3\pi/2; \\ -2\cos x, & -3\pi/2<x\le -4\pi/3; \\ 1, & -4\pi/3<x. \end{cases}$

$\alpha=-17\pi/12,\ \beta=-\pi.$

172. $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le \pi/2; \\ 2-2\sin x, & \pi/2<x\le 5\pi/6; \\ 1, & 5\pi/6<x. \end{cases}$

$\alpha=3\pi/4, \beta=\pi.$

173. $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -\pi/2; \\ 2+2\sin x, & -\pi/2<x\le -\pi/6; \\ 1, & -\pi/6<x. \end{cases}$

$\alpha=-\pi/3,\ \beta=\pi/2.$

174. $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -3\pi/2; \\ -2\cos x, & -3\pi/2<x\le -4\pi/3; \\ 1, & -4\pi/3<x. \end{cases}$

$\alpha=-17\pi/12, \beta=\pi.$

175. $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -\pi/2; \\ 2\cos x, & -\pi/2<x\le -\pi/3; \\ 1, & -\pi/3<x. \end{cases}$

$\alpha=-5\pi/12, \beta=0.$

VII. Равномерный, показательный и биномиальный законы распределения

Задачи №№176-200. Задан закон распределения и его основные параметры:
для равномерного распределения – интервал $(a;b)$;
для показательного распределения – параметр λ;
для биномиального – вероятность $p=p(A)$ и число испытаний n.

Выписать функцию плотности распределения и построить ее график (для равномерного и показательного распределения). Для биномиального распределения найти закон распределения. Для всех видов распределения написать функции распределения, построить их графики.

Найти числовые характеристики случайных величин – математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Найти вероятность попадания случайной величины в заданный интервал $(\alpha;\beta)$.

№	Закон распределения	a	b	λ	p	n	α	β
176.	Равномерный	6	15				3	12
177.	Показательный			6			0	1/12
178.	Биномиальный				0,7	3	0,3	10
179.	Равномерный	7	18				2	11
180.	Показательный			1,5			0	1/3
181.	Биномиальный				0,8	3	2,5	5
182.	Равномерный	7	16				3	10
183.	Показательный			2,5			0	1/5
184.	Биномиальный				0,9	3	0,5	6
185.	Равномерный	9	17				4	12
186.	Показательный			1			0	0,5
187.	Биномиальный				0,2	3	1	2,5

188.	Равномерный	3	10				6	13
189.	Показательный			2			0	0,25
190.	Биномиальный				0,3	3	0,5	2,5
191.	Равномерный	4	13				8	16
192.	Показательный			3			0	1/6
193.	Биномиальный				0,4	3	1,5	4
194.	Равномерный	10	17				15	20
195.	Показательный			4			0	1/8
196.	Биномиальный				0,1	3	2	3,5
197.	Равномерный	1	10				8	13
198.	Показательный			5			0	0,1
199.	Биномиальный				0,6	3	0,3	38
200.	Равномерный	2	11				5	15

VIII. Нормальный закон распределения

Задачи №№201-225. Даны математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины X.

Требуется:

а) записать функцию плотности данной нормально распределенной случайной величины и построить ее график;

б) найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из заданного интервала $(\alpha;\beta)$;

в) найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения от среднего значения окажется меньше δ.

№	a	σ	α	β	δ
201.	11	4	5	25	9
202.	13	3	5	21	5
203.	14	5	6	22	11
204.	15	4	11	21	6
205.	13	5	9	19	4
206.	11	3	7	19	6
207.	9	5	15	18	8
208.	7	3	3	16	6
209.	11	5	7	19	9
210.	13	4	7	20	8
211.	15	5	8	21	7
212.	7	2	3	12	5
213.	9	3	5	11	4
214.	10	3	6	15	8
215.	12	4	2	15	3
216.	14	4	10	20	10
217.	12	5	8	18	10
218.	10	4	6	16	10
219.	8	2	4	14	5
220.	10	5	8	20	8
221.	12	3	10	15	4
222.	14	6	5	24	11
223.	16	6	5	28	12
224.	8	4	3	15	8
225.	10	5	3	20	9

IX. Математическая статистика

Задачи №№226-250. Задано интервальное распределение выборки. Требуется:

а) построить гистограмму относительных частот;

б) перейти к вариантам, выписать эмпирическую функцию распределения и построить ее график;

в) методом условных вариант найти точечные оценки $\overline{x}_в$ и $\sigma_в$;

г) считая генеральную совокупность нормально распределенной, найти доверительные интервалы для a и σ с надежностью $\gamma = 0{,}95$.

№ 226	(4, 6)	(6, 8)	(8, 10)	(10, 12)	(12, 14)	(14, 16)
	1	3	19	21	4	2

№ 227	(–3, –1)	(–1, 1)	(1, 3)	(3, 5)	(5, 7)	(7, 9)
	2	8	19	15	5	1

№ 228	(–12, –10)	(–10, –8)	(–8, –6)	(–6, –4)	(–4, –2)	(–2, 0)
	2	9	14	15	8	2

№ 229	(–7, –5)	(–5, –3)	(–3, –1)	(–1, 1)	(1, 3)	(3, 5)
	3	4	18	20	4	1

№ 230	(0, 2)	(2, 4)	(4, 6)	(6, 8)	(8, 10)	(10, 12)
	1	4	16	18	8	3

№ 231	(5, 7)	(7, 9)	(9, 11)	(11, 13)	(13, 15)	(15, 17)
	3	5	18	17	6	1

№ 232	(1, 3)	(3, 5)	(5, 7)	(7, 9)	(9, 11)	(11, 13)
	3	5	16	17	6	3

№ 233	(0, 2)	(2, 4)	(4, 6)	(6, 8)	(8, 10)	(10, 12)
	2	4	18	17	6	3

№ 234	(–8, –6)	(–6, –4)	(–4, –2)	(–2, 0)	(0, 2)	(2, 4)
	1	4	21	19	3	2

№ 235	(5, 7)	(7, 9)	(9, 11)	(11, 13)	(13, 15)	(15, 17)
	1	5	18	19	4	3
№ 236	(–2, 0)	(0, 2)	(2, 4)	(4, 6)	(6, 8)	(8, 10)
	2	9	15	14	8	2
№ 237	(4, 6)	(6, 8)	(8, 10)	(10, 12)	(12, 14)	(14, 16)
	2	10	12	13	10	3

№ 238	(–5, –3)	(–3; –1)	(–1, 1)	(1, 3)	(3, 5)	(5, 7)
	1	4	18	20	5	2

№ 239	(7, 9)	(9, 11)	(11, 13)	(13, 15)	(15, 17)	(17, 19)
	2	6	17	19	5	1

№ 240	(1, 3)	(3, 5)	(5, 7)	(7, 9)	(9, 11)	(11, 13)
	3	5	18	16	6	2

№ 241	(–7, –5)	(–5, –3)	(–3, –1)	(–1, 1)	(1, 3)	(3, 5)
	1	5	18	19	4	3

№ 242	(–6, –4)	(–4, –2)	(–2, 0)	(0, 2)	(2, 4)	(4, 6)
	2	6	17	18	4	3

№ 243	(0, 2)	(2, 4)	(4, 6)	(6, 8)	(8, 10)	(10, 12)
	1	3	19	21	4	2

№ 244	(–4, –2)	(–2, 0)	(0, 2)	(2, 4)	(4, 6)	(6, 8)
	3	8	14	15	9	1

№ 245	(–2, 0)	(0, 2)	(2, 4)	(4, 6)	(6, 8)	(8, 10)
	1	4	20	19	4	2

№ 246	(0, 2)	(2, 4)	(4, 6)	(6, 8)	(8, 10)	(10, 12)
	1	5	18	19	4	3

№ 247	(2, 4)	(4, 6)	(6, 8)	(8, 10)	(10, 12)	(12, 14)
	1	6	17	18	7	1

№ 248	(0, 2)	(2, 4)	(4, 6)	(6, 8)	(8, 10)	(10, 12)
	3	5	16	17	6	3

№ 249	(3, 5)	(5, 7)	(7, 9)	(9, 11)	(11, 13)	(13, 15)
	3	8	15	16	7	1

№ 250	(–5, –3)	(–3, –1)	(–1, 1)	(1, 3)	(3, 5)	(5, 7)
	3	6	17	18	4	2