# ВВЕДЕНИЕ

Основной целью данных методических указаний является оказание помощи студентам всех специальностей дневного обучения при изучении тем «Неопределенный интеграл», «Определенный интеграл», «Несобственные интегралы», «Приложение определенных интегралов». В каждом разделе приводятся необходимые формулы, определения и образцы решения задач.

Методические указания содержат 25 вариантов, содержащих необходимый для выполнения типового расчета набор примеров и задач. Выполнение студентами типового расчета контролируется преподавателем. Типовой расчет выполняется в отдельной тетради, с четкими чертежами и рисунками, с кратким описанием решения задач и примеров.

Типовой расчет состоит из 9 задач:

Первая задача: найти неопределенные интегралы.

Вторая задача: вычислить определенные интегралы.

Третья задача: вычислить несобственные интегралы или доказать из расходимость.

Четвертая задача: вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными в декартовой системе координат. Фигуру изобразить на чертеже.

Пятая задача: вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными в полярной системе координат или в параметрической форме. Фигуру изобразить на чертеже.

Шестая задача: вычислить объем тела, полученного при вращении фигуры, лежащей в плоскость XOY и ограниченной заданными линиями, вокруг оси (ось указана в задании). Фигуру изобразить на чертеже.

Седьмая задача: вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в декартовой системе координат.

Восьмая задача: вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярной системе координат или в параметрической форме.

Девятая задача: решить задачу на физические или механические приложения определенного интеграла.

# 1. НЕОПРЕДЕЛНННЫЙ ИНТЕГРАЛ

**1.1** Функцию $F(x)$ называют первообразной для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$.

Неопределенным интегралом $\int f(x)dx$ от функции $f(x)$ называется множество всех первообразных функции $f(x)$, то есть

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ - некоторая первообразная функции $f(x)$, а $C$ - произвольная постоянная. Функцию $f(x)$ называют подынтегральной функцией, а $f(x)dx$ - подынтегральным выражением.

**1.2** Из формул дифференцирования основных элементарных функций можно получить таблицу неопределенных интегралов:

1. $\int dx = x + C$
2. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq 1$
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
5. $\int e^x dx = e^x + C$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$
9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
10. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C$, $a = const$
11. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$, $a = const$
12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$, $a = const$
13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + k}\right| + C$, $k = const$

**1.3** Неопределенный интеграл обладает следующими свойствами:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;

3. $\int dF(x) = F(x) + C$;
4. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, $k = const$;
5. $\int \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

***Пример 1.1.*** Найти интеграл $\int \left(2\cos x + 3x^2 - \sqrt{x} + 4x + 5\right)dx$.

Решение. Применяя свойства (4)-(5) и формулы (6), (2), (1), получим цепочку равенств

$$\int \left(2\cos x + 3x^2 - \sqrt{x} + 4x + 5\right)dx =$$
$$= 2\int \cos x dx + 3\int x^2 dx - \int x^{\frac{1}{2}} dx + 4\int x dx + 5\int dx =$$
$$= 2\sin x + 3\frac{x^3}{3} - \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 4\frac{x^2}{2} + 5x + C =$$
$$= 2\sin x + x^3 - \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + 2x^2 + 5x + C.$$

Используем свойство (1) неопределенного интеграла для проверки:

$$\left(2\sin x + x^3 - \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + 2x^2 + 5x + C\right)' =$$
$$= 2\cos x + 3x^2 - \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + 2\cdot 2x + 5 =$$
$$= 2\cos x + 3x^2 - \sqrt{x} + 4x + 5.$$

Мы получили подынтегральную функции. Следовательно, интеграл найден правильно.

**1.4** Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подстановок двух видов:

*а)* $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ - монотонная, непрерывно дифференцируемая функция новой переменной $t$. Формула замены переменной в этом случае имеет вид

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

*б)* $u=\psi(x)$, где $u$ - новая переменная. Формула замены переменной при такой подстановке:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int f(u)du .$$

***Пример 1.2*** Найти интеграл $\int\sqrt{1+3x}dx$.

<u>Решение.</u> Сделаем подстановку $1+3x$, то есть $x=\dfrac{t-1}{3}$, $dx=\dfrac{dt}{3}$. Тогда в силу *а)*

$$\int\sqrt{1+3x}dx=\int t^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{9}\sqrt{(1+3x)^3}+C .$$

***Пример 1.3*** Найти интеграл $\int e^{\sin x}\cos xdx$.

<u>Решение.</u> Сделаем подстановку $t=\sin x$, $dt=\cos xdx$. Тогда в силу *б)*

$$\int e^{\sin x}\cos xdx=\int e^t dt=e^t+C=e^{\sin x}+C .$$

<u>**1.5**</u> Интегрированием по частям называется вычисление интеграла по формуле

$$\int udv=uv-\int vdu ,$$

где $u=u(x)$, $v=v(x)$ - непрерывно дифференцируемые функции.

С помощью этой формулы нахождение интеграла $\int udv$ сводится к отысканию другого интеграла $\int vdu$; ее применение целесообразно в тех случаях, когда последний интеграл либо проще исходного, либо подобен ему.

Для интегралов вида $\int P(x)e^{\alpha x}dx$, $\int P(x)\sin\alpha xdx$, $\int P(x)\cos\alpha xdx$,где $P(x)$ - многочлен, за $u$ следует принять $P(x)$, а за $dv$ - соответственно выражения $e^{\alpha x}dx$, $\sin\alpha xdx$, $\cos\alpha xdx$. Для интегралов вида $\int P(x)\ln xdx$, $\int P(x)\arcsin xdx$, $\int P(x)\arccos xdx$, $\int P(x)arctgxdx$, $\int P(x)arcctgxdx$, за $u$ принимаются соответственно $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctgx$, $arcctgx$, а за $dv$ - выражения $P(x)dx$.

***Пример 1.4*** Найти интеграл $\int x\cos xdx$.

<u>Решение.</u> Применим формулу интегрирования по частям

$$\int x\cos x dx = \left| \begin{array}{c} u = x; du = dx; \\ dv = \cos x dx; v = \int dv = \int \cos x dx = \sin x + C \end{array} \right| =$$
$$= x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C.$$

***Пример 1.5*** Найти интеграл $\int x^2 \ln x dx$.

<u>Решение.</u> Применим формулу интегрирования по частям

$$\int x^2 \ln x dx = \left| \begin{array}{c} u = \ln x; du = \dfrac{dx}{x}; \\ dv = x^2 dx; v = \int dv = \int x^2 dx = \dfrac{x^3}{3} + C \end{array} \right| =$$
$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

<u>**1.6**</u> Для интегрирования выражений, содержащих квадратный трехчлен в знаменателе, необходимо выделить полный квадрат по формуле

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

Затем ввести новую переменную $t = x + \dfrac{b}{2a}$; $x = t - \dfrac{b}{2a}$; $dx = dt$ и попытаться свести полученный интеграл к табличным интегралам (10)-(13).

***Пример 1.6*** Найти интеграл $\int \dfrac{3x+5}{x^2 - 4x + 13} dx$.

<u>Решение.</u> Выделим полный квадрат

$$x^2 - 4x + 13 = (x-2)^2 + 9.$$

$$\int \frac{3x+5}{x^2-4x+13} dx = \int \frac{3x+5}{(x-2)^2+9} dx = \left| \begin{array}{c} t = x-2; x = t+2; \\ dx = dt \end{array} \right| =$$
$$= \int \frac{3(t+2)+5}{t^2+9} dt = \int \frac{3t+11}{t^2+9} dt = 3\int \frac{t}{t^2+9} dt + 11\int \frac{1}{t^2+3^2} dt =$$
$$= \frac{3}{2}\int \frac{2t}{t^2+9} dt + \frac{11}{3} arctg \frac{t}{3} + C = \frac{3}{2}\ln\left|t^2+9\right| + \frac{11}{3} arctg\frac{t}{3} + C =$$
$$= \frac{3}{2}\ln\left|x^2 - 4x + 13\right| + \frac{11}{3} arctg \frac{x-2}{3} + C.$$

**1.7** Рациональной дробью называется дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ - многочлены. Рациональная дробь называется правильной, если степень многочлена $P(x)$ ниже степени многочлена $Q(x)$; в противном случае дробь называется неправильной.

Простейшими дробями называются правильные дроби вида:

1. $\frac{A}{x-a}$;
2. $\frac{A}{(x-a)^k}$, где $k$ - целое число, более единицы;
3. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, где квадратный трехчлен $x^2+px+q$ не имеет действительных корней;
4. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$, где квадратный трехчлен $x^2+px+q$ не имеет действительных корней, где $n$ - целое число, более единицы.

Во всех четырех случаях предполагается, что $A$, $B$, $a$, $p$, $q$ - действительные числа.

Интегралы от простейших дробей первых трех типов соответственно равны:

1. $\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C$;
2. $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = \frac{A}{1-k} \cdot \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C$;
3. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} arctg \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$.

Интегрирование рациональной дроби следует проводить по следующей схеме:

а) если дробь неправильная, необходимо выделить целую часть, то есть представить в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

где $H(x)$ - многочлен, $\frac{R(x)}{Q(x)}$ - правильная рациональная дробь;

б) если дробь правильная, разложить знаменатель на линейные и квадратичные сомножители

$$Q(x) = (x-a)^k ...(x^2+px+q)^m ...,$$

где квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ не имеет действительных корней;

в) правильную рациональную дробь разложить на простейшие дроби:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \ldots +$$
$$+ \frac{B_1 x + C_1}{x^2 + px + q} + \frac{B_2 x + C_2}{\left(x^2 + px + q\right)^2} + \ldots + \frac{B_m x + C_m}{\left(x^2 + px + q\right)^m} + \ldots$$

где $A_i$, $B_i$, $C_i$ - неизвестные коэффициенты, которые можно найти, приведя последнее равенство к общему знаменателю, а затем приравнять коэффициенты при одинаковых степенях $x$ в левой и правой частях полученного тождества и решить систему линейных уравнений относительно искомых коэффициентов.

В результате интегрирование рациональной дроби сведется к нахождению интегралов от многочлена и от простейших рациональных дробей.

***Пример 1.7*** Найти интеграл $\int \frac{x^5 - x + 4}{x^4 - 1} dx$.

Решение. Выделим целую часть:

$$\frac{x^5 - x + 4}{x^4 - 1} = x + \frac{4}{x^4 - 1}.$$

Правильную дробь разложим по формуле

$$\frac{4}{x^4 - 1} = \frac{4}{(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{Cx + D}{\left(x^2+1\right)}.$$

После приведения правой части к общему знаменателю, приравняв числители, получим

$$4 = A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)(x+1),$$
$$4 = 4 = A(x^3 + x^2 + 1) + B(x^3 - x^2 + x - 1) + C(x^3 - x) + D(x^2 - 1),$$
$$4 = (A+B+C)x^3 + (A-B+D)x^2 + (A+B-C)x + (A-B-D).$$

Приравнивая коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях $x$ в левой и правой частях, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} A+B+C=0, \\ A-B+D=0, \\ A+B-C=0, \\ A-B-D=4. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим, что $A=1$, $B=-1$, $C=0$, $D=-2$. Таким образом,

$$\int \frac{x^5-x+4}{x^4-1}dx = \int \left( x + \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x+1)} - \frac{2}{(x^2+1)} \right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| - \ln|x+1| - 2arctgx + C.$$

**1.8** Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где $R$ - рациональная функция, можно свести к интегралам от рациональной функции одной переменной с помощью так называемой универсальной тригонометрической подстановаки:

$$t = tg\frac{x}{2},\ \sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2arctgt,\ dx = d(2arctgt) = (2arctgt)' dt = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

***Пример 1.8*** Найти интеграл $\int \frac{dx}{2+\cos x}$.

Решение. Полагая $t = tg\frac{x}{2}$, получим

$$\int \frac{dx}{2+\cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2\int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{2(1+t^2)+1-t^2}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{3+t^2} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} arctg\frac{t}{\sqrt{3}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}} arctg\frac{tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C$$

**1.9** Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^m x dx$ целесообразно разбить на два случая:

а) хотя бы один из показателей $m$ или $n$ - нечетное положительное число. Если $m$ - нечетное число, то применяется подстановка $t=\cos x$. Если $n$ - нечетное число, то применяется подстановка $t = \sin x$.

б) оба показателя степени $m$ и $n$ - четные положительные числа. Тогда следует преобразовать подынтегральную функцию с помощью формул

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

***Пример 1.9*** Найти интеграл $\int \sin^3 x \cdot \cos^4 x dx$.

Решение. Полагая $t = \cos x$, $dt = -\sin x dx$, получим

$$\int \sin^3 x \cdot \cos^4 x dx = -\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x \cdot (-\sin x dx) =$$
$$= -\int (1-\cos^2 x) \cdot \cos^4 x \cdot (-\sin x dx) = -\int (1-t^2) \cdot t^4 dt = -\int (t^4 - t^6) dt =$$
$$= -\frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + C = -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C$$

***Пример 1.10*** Найти интеграл $\int \cos^4 x dx$.

Решение.

$$\int \cos^4 x dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx = \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{\cos 4x}{2}\right) dx =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x + \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8}\right) + C$$

**1.9** Интегралы вида $\int \sin \alpha x \cdot \cos \beta x dx$, $\int \sin \alpha x \cdot \sin \beta x dx$, $\int \cos \alpha x \cdot \cos \beta x dx$ можно легко решить, применив формулы тригонометрии:

$$\sin \alpha x \cdot \cos \beta x = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x\right],$$
$$\sin \alpha x \cdot \sin \beta x = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x\right],$$
$$\cos \alpha x \cdot \cos \beta x = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x.\right]$$

***Пример 1.11*** Найти интеграл $\int \sin 7x \cdot \cos 3x dx$.

Решение.

$$\int \sin 7x \cdot \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int \left(\sin 10x + \sin 4x\right) dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 10x}{10} - \frac{\cos 4x}{4}\right) + C.$$

# 2. ОПРЕДЕЛННЫЙ ИНТЕГРАЛ

**<u>2.1</u>** Свойства определенного интеграла

1. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$;

2. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$;

3. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$;

4. $\int\limits_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_b^b g(x)dx$;

5. $\int\limits_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int\limits_a^b f(x)dx$;

6. Если $f(x)$ - нечетная функция на отрезке $x \in [-a, a]$, то есть $f(-x) = -f(x)$, где $x \in [-a, a]$, то

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

Если $f(x)$ - четная функция на отрезке $x \in [-a, a]$, то есть $f(-x) = f(x)$, где $x \in [-a, a]$, то

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx.$$

2.2 Формула Ньютона-Лейбница

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке. Для всякой функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$, существует на этом отрезке неопределенный интеграл $\int f(x)dx = F(x) + C$ и имеет место формула Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

При вычислениях эту формулу обычно пишут в виде

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b,$$

где символ – «подстановка от $a$ до $b$» - обозначает ту же самую разность $F(b)-F(a)$.

***Пример 2.1.*** Применяя формулу Ньютона-Лейбница, вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^{2} x^3 dx$.

<u>Решение.</u>

$$\int\limits_{-1}^{2} x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Bigg|_{-1}^{2} = \frac{2^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}.$$

***Пример 2.2.*** Вычислить интеграл $\int\limits_{0}^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi$.

<u>Решение.</u> Преобразуем подынтегральное выражение по формуле $\cos^2\varphi = \dfrac{1+\cos 2\varphi}{2}$

$$\int\limits_{0}^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi = \int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi/2} (1+\cos 2\varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi/2} d\varphi + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi/2} \cos 2\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\varphi\Bigg|_{0}^{\pi/2} + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\Bigg|_{0}^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

## <u>2.3</u> Замена переменной в определенном интеграле

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, и пусть:

1) функция $x=\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ - монотонная, непрерывно дифференцируемая функция, когда новая переменная $t$ меняется от $\alpha$ до $\beta$;
2) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$.

Тогда имеет место следующее правило замены переменной в определенном интеграле:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Первое условие обеспечивает непрерывность функции под знаком интеграла в правой части равенства.

Монотонность функции $x=\varphi(t)$ нужна для того, чтобы при изменении $t$ от $\alpha$ до $\beta$ соответствующее значение $x=\varphi(t)$ не вышло за пределы отрезка $[a,b]$, где функция $f(x)$ может быть не задена.

Второе условие устанавливает соответствие между пределами интегрирования до и после замены переменной по формуле $x=\varphi(t)$.

***Пример 2.3*** Вычислить $\int\limits_4^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

<u>Решение.</u> Перейдем к новой переменной интегрирования, полагая $x=t^2$. При этом новая переменная выражается через старую так $t=\sqrt{x}$.

Так как старая переменная меняется в пределах от 4 до 9, то новая переменная будет меняться от 2 до 3, так как при $x=4$, $t=2$, при $x=9$, $t=3$.

Пределы изменения для новой переменной удобно находить при помощи следующей таблицы: $\begin{matrix} x & 4 & 9 \\ t & 2 & 3 \end{matrix}$, а все преобразования удобно записывать в фигурных скобках. Тогда получаем

$$\int\limits_4^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \left| \begin{matrix} x=t^2, \quad \mathrm{t}=\sqrt{\mathrm{x}}, \\ dx=2tdt, \\ x \quad 4 \quad 9 \\ t \quad 2 \quad 3 \end{matrix} \right| = \int\limits_2^3 \frac{2dt}{1+t} = 2\int\limits_2^3 \left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt =$$

$$=2\left(t-\ln|t+1|\right)\Big|_2^3 = 2+\ln\frac{9}{16}.$$

При замене переменной часто удобно пользоваться не подстановкой $x=\varphi(t)$ для перехода к новой переменной $t$, а, наоборот, обозначить новой переменной $u=\psi(x)$. В этом случае новые пределы определяют по формулам $\alpha=\psi(a)$, $\beta=\psi(b)$.

***Пример 2.4*** Вычислить $\int\limits_1^e \frac{(\ln x)^2 dx}{x}$.

<u>Решение.</u>

$$\int\limits_1^e \frac{(\ln x)^2 dx}{x} = \left| \begin{matrix} u=\ln x; \\ \frac{dx}{x}=d(\ln x)=du; \\ x \quad 1 \quad e \\ u \quad 0 \quad 1 \end{matrix} \right| = \int\limits_0^1 u^2 du = \frac{u^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

## 2.4 Интегрирование по частям в определенном интеграле

Если функции $u=u(x)$, $v=v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a,b]$, то имеет место формула

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du,$$

где $uv\Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

***Пример 2.5*** Найти интеграл $\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям в определенном интеграле

$$\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx = \left|\begin{matrix} u=x; du=dx; \\ dv=\cos x\,dx; v=\int dv=\int\cos x\,dx=\sin x+C \end{matrix}\right| =$$

$$= x\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\sin x\,dx = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - 0 + \cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

***Пример 2.5*** Найти интеграл $\int_0^1 x\,arctgx\,dx$.

Решение.

$$\int_0^1 x\,arctgx\,dx = \left|\begin{matrix} u=arctgx; du=d(arctgx)=\dfrac{dx}{1+x^2}; \\ dv=x\,dx; v=\dfrac{x^2}{2} \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{x^2}{2}arctgx\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2(1+x^2)}dx = \frac{1}{2}arctg1 - 0 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x^2+1)-1}{(1+x^2)}dx =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)}dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}x\Big|_0^1 + \frac{1}{2}arctgx\Big|_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

## 3.НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

**3.1** Интегралы с бесконечными пределами (несобственные интегралы первого рода)

Если функция $y = f(x)$ непрерывна при $a \le x < +\infty$, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется несобственным с бесконечным пределом и он вычисляется по формуле

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{A \to +\infty} [F(b) - F(a)],$$

где $F'(x) = f(x)$.

Если предел в правой части равенства существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся, в противном случае он называется расходящимся.

Аналогично определяется несобственным интеграл с нижним бесконечным пределом и несобственным интеграл с обоими бесконечными пределами:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{A \to -\infty} [F(b) - F(a)],$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b \to +\infty} \int_c^b f(x)dx.$$

***Пример 3.1*** Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^6}$.

Решение.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^6} = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{dx}{(x+1)^6} = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b (x+1)^{-6} d(x+1) = \lim_{b \to +\infty} \left[ \frac{(x+1)^{-5}}{-5} \right] \Bigg|_0^b =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left[ \frac{1}{-5(x+1)^5} \right] \Bigg|_0^b = \lim_{b \to +\infty} \left[ \frac{1}{-5(b+1)^5} + \frac{1}{5} \right] = \frac{1}{5}.$$

и, следовательно, несобственный интеграл сходится.

***Пример 3.2*** Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Решение.

$$\int\limits_{-\infty}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{1} x^{-\frac{2}{3}} dx = \lim_{a\to-\infty} \left[ 3x^{\frac{1}{3}} \right] \Bigg|_{a}^{1} = \lim_{a\to-\infty} \left[ 3 - 3\sqrt[3]{a} \right] \Bigg|_{a}^{1} = +\infty$$

и, следовательно, несобственный интеграл расходится.

***Пример 3.3*** Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение. Это интеграл с обоими бесконечными пределами. Так как подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ четная, то по свойству 7 определенного интеграла получим $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Тогда $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_{0}^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{b\to+\infty} arctgx \Big|_{0}^{b} = \lim\limits_{b\to+\infty} arctgb = \frac{\pi}{2}$.

Таким образом, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$ и, следовательно, несобственный интеграл сходится.

**3.2** Интегралы от неограниченных функций (несобственные интегралы второго рода)

Если в некоторой точке «$c$» отрезка $[a,b]$ функция $y = f(x)$ имеет бесконечный разрыв, то есть $f(c) = \infty$, $a < c < b$, то интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ называется несобственным интегралом от неограниченной функции и он вычисляется по формуле:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0} \int\limits_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta\to0} \int\limits_{c+\delta}^{b} f(x)dx .$$

Если точка «$c$» является одним из концов отрезка $[a,b]$, то есть $c = a$ или $c = b$, тол имеем соответственно

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0} \int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx, \quad \text{если} \quad f(b) = \infty ,$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0}\int_{a+\delta}^b f(x)dx, \quad \text{если} \quad f(a)=\infty.$$

Несобственный интеграл от неограниченной функции называется сходящимся, если существуют и конечны пределы в правой части указанных формул, и, расходящимися, если не существует хотя бы одни из них.

***Пример 3.4*** Вычислить несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

<u>Решение.</u> Подынтегральная функция $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ не определена и не ограничена в точке $x=1$, так как $f(x)=\infty$, поэтому данный интеграл является несобственным интегралом от неограниченной функции.

Для вычисления этого интеграла применим формулы

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\arcsin(1-\varepsilon)-\arcsin 0\right] = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Несобственный интеграл сходится.

***Пример 3.5*** Исследовать, сходится ли несобственный интеграл $\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x dx}{\sin^2 x}$.

<u>Решение.</u> Подынтегральная функция $f(x)=\frac{\cos x}{\sin^2 x}$ в точке обращается в бесконечность, следовательно, данный интеграл несобственный.

Тогда

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x dx}{\sin^2 x} = \lim_{\delta\to 0}\int_\delta^{\pi/2}\frac{\cos x dx}{\sin^2 x} = \lim_{\delta\to 0}\int_\delta^{\pi/2}\frac{d\sin x}{\sin^2 x} = \lim_{\delta\to 0}\left(-\frac{1}{\sin x}\right)\Bigg|_\delta^{\pi/2} =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\left(-\frac{1}{\sin \pi/2}+\frac{1}{\sin\delta}\right) = \lim_{\delta\to 0}\left(-1+\frac{1}{\sin\delta}\right) = \infty,$$

так как $\frac{1}{\sin\delta}\to\infty$ при $\delta\to 0$, и, следовательно, несобственный интеграл расходится.

# 3. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

## <u>4.1</u> Площадь плоской криволинейной фигуры

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$), слева и справа соответственно прямыми $x = a$ и $x = b$, а снизу осью $OX$, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx .$$

Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ ($f_1(x) \leq f_2(x)$) и прямыми $x = a$ и $x = b$, находится по формуле

$$S = \int_a^b \left[ f_2(x) - f_1(x) \right] dx .$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, прямыми $x = a$ и $x = b$, и осью $OX$, выражается формулой

$$S = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt ,$$

где $\alpha$ и $\beta$ определяются из уравнений $a = \varphi(\alpha)$, $b = \psi(\beta)$.

Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ и двумя полярными радиусами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ ($\alpha < \beta$), находится по формуле

$$S = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi) d\varphi .$$

## <u>4.2</u> Длина дуги кривой

Длина дуги кривой, заданной уравнением в явном виде $y = f(x)$, где $a \leq x \leq b$, вычисляется по формуле

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx .$$

Длина дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, выражается формулой

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(\varphi_t')^2+(\psi_t')^2}\,dt\,.$$

Если кривая задана уравнениями в полярных координатах $\rho=\rho(\varphi)$, $\alpha\le\varphi\le\beta$, то длина дуги кривой находится по формуле

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(\rho)^2+(\rho')^2}\,dt\,.$$

**4.3** Объем тела вращения

Если криволинейная трапеция, имеющая основанием отрезок $a\le x\le b$, вращается вокруг оси $OX$, то объем полученного тела вращения вычисляется по формуле

$$V=\pi\int_{a}^{b}(f(x))^2\,dx\ ,$$

где $y=f(x)$ - уравнение кривой, ограничивающей криволинейную трапецию сверху.

Если тело получено отвращения вокруг оси $OX$ фигуры, ограниченной кривыми $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ ($f_1(x)\le f_2(x)$) и прямыми $x=a$ и $x=b$, то объем тела вращения равен

$$V=\pi\int_{a}^{b}\left[(f_2(x))^2-(f_1(x))^2\right]dx\,.$$

Если криволинейная трапеция, имеющая основанием отрезок $c\le y\le d$, вращается вокруг оси $OY$, то объем такого тела вращения вычисляется по формуле

$$V=\pi\int_{c}^{d}(\varphi(y))^2\,dy\ ,$$

где $x=\varphi(y)$ - уравнение кривой, ограничивающей криволинейную трапецию справа.

Если тело получено отвращения вокруг оси $OY$ фигуры, ограниченной кривыми $x=\varphi_1(y)$ и $x=\varphi_2(y)$ и прямыми $y=c$ и $y=d$, то объем тела вращения равен

$$V=\pi\int_{c}^{d}\left[(\varphi_2(y))^2-(\varphi_1(y))^2\right]dy\,.$$

## **4.4** Некоторые физические задачи

### **4.4.1** Путь, пройденный телом

Если материальная точка движется по некоторой прямой со скоростью $v = f(t)$, то путь $S$, пройденный ею за промежуток времени $\alpha \le t \le \beta$, вычисляется по формуле

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt.$$

### **4.4.2** Работа переменной силы

Пусть под действием силы $F = f(x)$ материальная точка движется по прямой. Работа $A$ этой силы на участке пути $[a,b]$ определяется по формуле

$$A = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

### **4.4.2** Давление жидкости

Для вычисления силы давления жидкости используем закон Паскаля, согласно которому давление жидкости на площадку равно ее площади $S$, умноженной на глубину погружения $h$, на плотность $\rho$ и ускорение силы тяжести $g$, то есть

$$P = \rho g h S.$$

## ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

### *Вариант 1*

**1.** 1) $\int x\sqrt{x^2-5}dx$;

2) $\int \frac{5}{1-2x}dx$;

3) $\int \sin(1-3x)dx$;

4) $\int \sqrt{\cos^3 x}\sin x dx$;

5) $\int x^2 e^x dx$;

6) $\int \ln x dx$;

7) $\int \frac{1}{x^3+x^2}dx$;

8) $\int \frac{x^3}{x^2+x+1}dx$;

9) $\int \frac{5x-1}{3x^2-2x+1}dx$;

10) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx$;

11) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{x(\sqrt{x}+1)}dx$;

12) $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$;

13) $\int \frac{\cos^3 x}{4+\sin x}dx$;

14) $\int \sin 3x \cdot \cos 2x dx$.

**2.** 1) $\int\limits_2^3 y\ln(y-1)dy$;

2) $\int\limits_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$.

**3.** 1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{16x^4+1}dx$;

2) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$.

**4.** $y=x^2$, $y=3-2x$.

**5.** $\rho=3\cos\varphi$, $0\le\varphi\le 2\pi$.

**6.** $y=2x-x^2$, $y=x$, $(OX)$.

**7.** $y=x^{\frac{3}{2}}$ от $x=0$ до $x=5$.

**8.** $x=2\cos^3 t$, $y=2\sin^3 t$.

**9.** Скорость тела задается формулой $v=\sqrt{1+t}$ *м/сек*. Найти путь, пройденный телом за первые *10 сек* после начала движения.

### *Вариант 2*

**1.** 1) $\int x\sqrt{2-3x^2}dx$;

2) $\int \frac{x^2}{x^3-2}dx$;

3) $\int \cos(2+6x)dx$;

4) $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}dx$;

5) $\int xe^{-x}dx$;

6) $\int (x+1)\ln x dx$;

7) $\int \frac{x-1}{x^2+x}dx$;

8) $\int \frac{x^2}{x^2+x+1}dx$;

9) $\int \frac{1}{3x^2-2x+4}dx$;

10) $\int \frac{2x+1}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx$;

11) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x+1}-\sqrt[4]{x+1}}dx$;

12) $\int \frac{dx}{2+\sin x}$;

13) $\int \sin^2 3x dx$;

14) $\int \sin 3x \cdot \sin x dx$.

**2.** 1) $\int\limits_0^{\pi} x^2 \cos x dx$;

2) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} tg^2 x dx$.

**3.** 1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{4x^3}{\sqrt{x^4+1}} dx$;

2) $\int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^2}}$.

**4.** $y = x^2$, $y = 4x - 3$.

**5.** $\rho = 3(1+\cos\varphi)$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

**6.** $y = 2x - x^2$, $y = 0$, $(OX)$.

**7.** $y = \ln\cos x$ от $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{6}$.

**8.** $x = 2(\cos t + t\sin t)$, $y = 2(\sin t - t\cos t)$, $0 \le t \le \pi$.

**9.** Вычислить работу, которую нужно затратить на сооружение конического кургана, радиус основания которого $R = 2м$, а высота $H = 3м$, из однородного строительного материала плотностью $\delta = 2{,}5т/м^3$.

## *Вариант 3*

**1.** 1) $\int x^2\sqrt{2+5x^3}dx$;

2) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$;

3) $\int e^{2+7x}dx$;

4) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-2x^4}}dx$;

5) $\int x^2e^x dx$;

6) $\int \ln(x+2)dx$;

7) $\int \frac{1}{1-x^3}dx$;

8) $\int \frac{x^2+1}{x^2+x}dx$;

9) $\int \frac{2x+5}{x^2-6x+10}dx$;

10) $\int \frac{1}{\sqrt{2-2x-x^2}}dx$;

11) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-5}dx$;

12) $\int \frac{dx}{\cos x+\sin x}$;

13) $\int \sin^4 x dx$;

14) $\int \sin 8x\cdot\cos x dx$.

**2.** 1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\cos x dx$;

2) $\int\limits_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x+3}dx$.

**3.** 1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{(x^3+8)^5}}dx$;

2) $\int\limits_{-\frac{1}{3}}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}$.

**4.** $y=\frac{x^2}{2}$, $y=\frac{5}{2}x-2$.

**5.** $\rho=4\sin 2\varphi$ (четырех лепестковая роза).

**6.** $y=4x-2x^2$, $y=0$, ($OX$).

**7.** $y=\ln\sin x$ от $x=\frac{\pi}{3}$ до $x=\frac{2\pi}{3}$.

**8.** $x=4\cos^3 t$, $y=4\sin^3 t$.

**9.** Вычислить силу давления воды на прямоугольник, вертикально погруженный в воду, если известно, что его основание *8м*, высота *12м*, верхнее основание параллельно поверхности воды и находится на глубине *5м*. Плотность $\delta=1т/м^3$.

## *Вариант 4*

**1.** 1) $\int \frac{1}{x\ln x}dx$;

2) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$;

3) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$;

4) $\int \frac{x+2}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

5) $\int arctgx dx$;

6) $\int \cos(\ln x)dx$;

7) $\int \frac{1}{x+x^3}dx$;

8) $\int \frac{x^3}{x^2-1}dx$;

9) $\int \frac{6x+4}{x^2-8x+4}dx$;

10) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+2}}dx$;

11) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$;

12) $\int \frac{dx}{\cos x-\sin x}$;

13) $\int \sin^2 x\cdot\cos^2 x dx$;

14) $\int \sin 2x\cdot\cos 4x dx$.

**2.** 1) $\int_0^{\pi} x^2\cdot\sin x dx$;

2) $\int_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{1}{e^x-1}dx$.

**3.** 1) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\pi(x^2+4x+5)}dx$;

2) $\int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{64-x^6}}$.

**4.** $y=x^2$, $y=6-5x$.

**5.** $\rho=2(1-\cos\varphi)$, $0\le\varphi\le 2\pi$.

**6.** $y=4x-2x^2$, $y=x$, $(OX)$.

**7.** $y=\frac{x^2}{2}$ от $x=0$ до $x=2$.

**8.** $x=5\cos^2 t$, $y=5\sin^2 t$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$.

**9.** Скорость движения материальной точки $v=4te^{-t^2}$ *м/сек*. Какой путь пройдет точка от начала движения до полной остановки.

### *Вариант 5*

**1.** 1) $\int \frac{2x+2}{x^2+2x}dx$;

2) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$;

3) $\int \frac{x}{1+x^4}dx$;

4) $\int \frac{x}{\sqrt{1-2x^2}}dx$;

5) $\int x arctgx dx$;

6) $\int x\cdot 2^x dx$;

7) $\int \frac{x^2+1}{x-x^3}dx$;

8) $\int \frac{x^3+1}{x^2+x}dx$;

9) $\int \frac{1}{1-3x-x^2}dx$;

10) $\int \frac{5x-1}{\sqrt{6+4x-x^2}}dx$;

11) $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}\left(\sqrt{x}-1\right)}dx$;

12) $\int \frac{dx}{3+2\cos x}$;

13) $\int \cos^5 x dx$;

14) $\int \cos 3x\cdot\cos 5x dx$.

**2.** 1) $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \arccos 2x dx$;

2) $\int\limits_0^5 \frac{1}{2x+\sqrt{3x+1}}dx$.

**3.** 1) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{x}{\sqrt{(x^2+4)^3}}dx$;

2) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}$.

**4.** $y=\frac{x^2}{2}$, $y=\frac{x}{2}-3$.

**5.** $\rho=4\cos 3\varphi$.

**6.** $y=3x-x^2$, $y=0$, $(OX)$.

**7.** $y=\sqrt{(x-1)^3}$ от $x=1$ до $x=6$.

**8.** $x=9(t-\sin t)$, $y=9(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$.

**9.** Вычислить силу давления воды на прямоугольник, вертикально погруженный в воду, если известно, что его основание *2м*, высота *3м*, верхнее основание параллельно поверхности воды и находится на глубине *4м*. Плотность $\delta = 1т/м^3$.

## *Вариант 6*

**1.** 1) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$;

2) $\int \frac{x^2+\frac{1}{3}}{x^3+x}dx$;

3) $\int tgx dx$;

4) $\int \frac{x}{x^4-3}dx$;

5) $\int x^2 arctgx dx$;

6) $\int x\cdot e^{3x}dx$;

7) $\int \frac{x^3-1}{x^2+x-2}dx$;

8) $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$;

9) $\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx$;

10) $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+16x+60}}dx$;

11) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{2\sqrt[3]{x}+3\sqrt{x}}dx$;

12) $\int \frac{\sin x dx}{3+\cos x}$;

13) $\int \frac{1}{tg^3 x}dx$;

14) $\int \sin 3x\cdot\cos 5x dx$.

**2.** 1) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\cdot\sin 2x dx$;

2) $\int\limits_{0}^{5} \frac{x}{\sqrt{x+4}}dx$.

**3.** 1) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+4)^4}}dx$;

2) $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{\ln(3x-1)dx}{3x-1}$.

**4.** $y=2x^2+\frac{x}{2}$, $y=\frac{5x}{2}$.

**5.** $\rho=2\varphi$, один виток спирали Архимеда.

**6.** $xy=4$, $2x+y-6=0$, $(OX)$.

**7.** $y=1-\ln\cos x$ от $x=0$ до $x=\frac{\pi}{6}$.

**8.** $x=7(t-\sin t)$, $y=7(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$.

**9.** Скорость тела задается формулой $v=3t^2+2t+1$ *м/сек*. Найти путь, пройденный телом за первые *3 сек* после начала движения.

## *Вариант 7*

**1.** 1) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$;

2) $\int \frac{x^5}{x^6+10}dx$;

3) $\int ctgxdx$;

4) $\int \frac{x+5}{\sqrt{6-x^2}}dx$;

5) $\int x^2 \sin xdx$;

6) $\int (x^2+9)\cdot \ln xdx$;

7) $\int \frac{x}{(x^2+3)(x-1)}dx$;

8) $\int \frac{x^3+1}{x^2-5x+6}dx$;

9) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4x+10}}dx$;

10) $\int \frac{8}{4x^2+16x-20}dx$;

11) $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{2-\sqrt[3]{x}}dx$;

12) $\int \sin^3 2xdx$;

13) $\int tg^4 xdx$;

14) $\int \sin 3x \cdot \sin 5xdx$.

**2.** 1) $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0} x\cdot e^{-2x}dx$;

2) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x}dx$.

**3.** 1) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{4}{x(1+\ln^2 x)}dx$;

2) $\int\limits_{\frac{3}{4}}^{1} \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$.

**4.** $y=3x^2+x$, $y=4x$.

**5.** $\rho = 4\sin^2\varphi$.

**6.** $y=\sqrt{x}$, $y=x^3$, $(OX)$.

**7.** $y=\sqrt{(x+1)^3}$ от $x=-1$ до $x=4$.

**8.** $x=\sqrt{3}t^2$, $y=t-t^3$.

**9.** Определить работу $A$, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из прямого кругового цилиндра. Радиус основания цилиндра $R=2м$, высота $h=4м$.

## *Вариант 8*

**1.** 1) $\int e^{\sin x}\cos x dx$;

2) $\int \frac{2x-5}{\sqrt{3-x^2}}dx$;

3) $\int \frac{arcctg^2 x}{x^2+1}dx$;

4) $\int \sin(2x-7)dx$;

5) $\int x^2 \arcsin x dx$;

6) $\int (x+2)\cdot\cos 4x dx$;

7) $\int \frac{x-2}{x^3+x^2+x-3}dx$;

8) $\int \frac{2x^5-2x^3+x^2}{1-x^4}dx$;

9) $\int \frac{3x+5}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx$;

10) $\int \frac{8}{x^2-6x+25}dx$;

11) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{2x+3}}dx$;

12) $\int \frac{1}{2-3\cos x+\sin x}dx$;

13) $\int \cos^2 3x \sin 3x dx$;

14) $\int \cos 4x\cdot\cos 5x dx$.

**2.** 1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} tg^2 x dx$;

2) $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{e^x-e^{-x}}dx$.

**3.** 1) $\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{1}{4x^2+4x+5}dx$;

2) $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{1-x^4}$.

**4.** $y=x^2$, $y=2-x^2$.

**5.** $\rho=\sqrt{\cos 2\varphi}$.

**6.** $y=e^x$, $y=0$, $x=0$, $x=1$, $(OX)$.

**7.** $y=\sqrt{x^3}$ от $x=0$ до $x=4$.

**8.** $x=7(t-\sin t)$, $y=7(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$.

**9.** Определить работу $A$, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из полусферического сосуда, диаметр которого равен $20м$, если плотность воды $\delta = 1т/м^3$.

## *Вариант 9*

**1.** 1) $\int x^3 \cos x^4 dx$;

2) $\int \frac{x+4}{\sqrt{3+2x^2}} dx$;

3) $\int ctg 5x dx$;

4) $\int \sqrt[4]{5-3x} dx$;

5) $\int \ln^2 x dx$;

6) $\int (x+2) \cdot e^{4x} dx$;

7) $\int \frac{x+6}{x(x^2+x+2)} dx$;

8) $\int \frac{x^3+x-1}{x^2+x-2} dx$;

9) $\int \frac{3}{\sqrt{x^2+6x+5}} dx$;

10) $\int \frac{x}{2x^2-12x+15} dx$;

11) $\int \frac{x+1}{3-\sqrt{x-2}} dx$;

12) $\int \frac{1}{-2\cos x+\sin x} dx$;

13) $\int \sin^2 5x dx$;

14) $\int \sin 4x \cdot \cos 15x dx$.

**2.** 1) $\int\limits_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx$;

2) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3} dx$.

**3.** 1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+4} dx$;

2) $\int\limits_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^5}}$.

**4.** $y = \sin x$, $y = 0$.

**5.** $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$.

**6.** $y = x^2$, $y^2 = x$, $(OX)$.

**7.** $y = 1 - \ln\cos x$ от $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{6}$.

**8.** $\rho = \sin^3 \frac{\varphi}{3}$ $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

**9.** Скорость тела задается формулой $v = 2t^2 - t + 3$ *м/сек*. Найти путь, пройденный телом за первые *5 сек* после начала движения.

## *Вариант 10*

**1.** 1) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$;

2) $\int \frac{2x+1}{3-5x^2}dx$;

3) $\int e^{5x-6}dx$;

4) $\int x\sin(1-x^2)dx$;

5) $\int arctg\sqrt{x}dx$;

6) $\int (2x+1)\cdot\cos 7xdx$;

7) $\int \frac{x+3}{x^4-1}dx$;

8) $\int \frac{2-x^2}{x^2+1}dx$;

9) $\int \frac{8x+3}{\sqrt{27+12x-4x^2}}dx$;

10) $\int \frac{1}{x^2-8x+15}dx$;

11) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-2}dx$;

12) $\int \frac{1}{5+2\cos x+\sin x}dx$;

13) $\int tg^3 2xdx$;

14) $\int \cos 4x\cdot\cos 5xdx$.

**2.** 1) $\int_1^e \frac{1+\ln^2 x}{x}dx$;

2) $\int_4^9 \frac{x}{(1+x^2)^3}dx$.

**3.** 1) $\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{\sqrt[3]{(x^2+5)^7}}dx$;

2) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin xdx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$.

**4.** $y=x^3$, $y=1$, $x=0$.

**5.** $\rho=4\sin^2\varphi$.

**6.** $y=2x-x^2$**,** $y=0$**,** $(OX)$.

**7.** $y=\ln\sin x$ от $x=\frac{\pi}{3}$ до $x=\frac{\pi}{2}$.

**8.** $\rho=3\cos\varphi$.

**9.** Материальная точка движется со скоростью $v=3t^2-2t+2$ *м/сек*. Какой путь она пройдет за первые *5 сек* после начала движения.

## *Вариант 11*

**1.** 1) $\int \frac{tg^3 x+1}{\cos^2 x}dx$;

2) $\int \frac{3-9x}{\sqrt{3+x^2}}dx$;

3) $\int e^{3-5x}dx$;

4) $\int x\cos(1-4x^2)dx$;

5) $\int \arccos 2x dx$;

6) $\int (1-x)\cdot \sin 3x dx$;

7) $\int \frac{x}{x^4+6x^2+5}dx$;

8) $\int \frac{1+x^3}{x^3-x^2}dx$;

9) $\int \frac{5x+3}{\sqrt{5+4x-x^2}}dx$;

10) $\int \frac{1}{x^2+3x+3}dx$;

11) $\int \frac{\sqrt{x^2+9}-6}{\sqrt{x^2+9}}dx$;

12) $\int \frac{1}{2+\cos x}dx$;

13) $\int \sin^5 2x dx$;

14) $\int \sin 7x\cdot \sin 5x dx$.

**2.** 1) $\int\limits_1^{e^2} \sqrt{x}\ln x dx$;

2) $\int\limits_2^5 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$.

**3.** 1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{arctgx}{\pi(1+x^2)}dx$;

2) $\int\limits_0^1 \frac{2xdx}{\sqrt{1-x^4}}$.

**4.** $y^2=9x$, $y=3x$.

**5.** $\rho=4(1+\cos\varphi)$.

**6.** $y=\cos x$**,** $x=0$**,** $x=\frac{\pi}{2}$ $(OX)$.

**7.** $y=\sqrt[2]{x^3}$ от $x=0$ до $x=4$.

**8.** $\rho=5\sin\varphi$.

**9.** Определить работу, которую нужно затратить, чтобы растянуть пружину на *0,05 м*, если известно, что сила растягивающая пружина на "$x$" *м* равна: $F(x)=kx$, где $k$ – коэффициент пропорциональности, зависящий от упругости пружины, и что для растяжения пружины на *0,01 м* необходима сила *1 кг*.

## *Вариант 12*

**1.** 1) $\int \cos^3 2x \cdot \sin 2x dx$;

2) $\int \frac{3+x}{10-x^2} dx$;

3) $\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} dx$;

4) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^4}} dx$;

5) $\int \sin(\ln x) dx$;

6) $\int \frac{x-2}{e^x} dx$;

7) $\int \frac{x^2}{(x-1)^3} dx$;

8) $\int \frac{4+x^3}{x^3-x} dx$;

9) $\int \frac{x+3}{5+x-x^2} dx$;

10) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+6x+12}} dx$;

11) $\int \frac{\sqrt{x}-6}{\sqrt{x}+5} dx$;

12) $\int \frac{1}{2+4\cos x - 3\sin x} dx$;

13) $\int \sin^4 x dx$;

14) $\int \sin 7x \cdot \cos 8x dx$.

**2.** 1) $\int_0^1 arctg\sqrt{x} dx$;

2) $\int_1^2 \frac{1}{x^2+x} dx$.

**3.** 1) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^4} dx$;

2) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{1-x}}$.

**4.** $y^2 = 4x$, $x = 4$.

**5.** $x = 4\cos^3 t$, $y = 4\sin^3 t$.

**6.** $y = x+2$**,** $x = 2$**,** $y = 1$ $(OX)$.

**7.** $y = x^2$ от $x = 0$ до $x = 2$.

**8.** $\rho = 2(1-\cos\varphi)$.

**9.** Определить работу $A$, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из котла, имеющего форму полушара радиусом $R = 4 м$, если плотность воды $\delta = 1 т / м^3$.

## *Вариант 13*

**1.** 1) $\int \sin(2x-9)dx$;

2) $\int \frac{0,5x+1}{x^2+x}dx$;

3) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

4) $\int tg3xdx$;

5) $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$;

6) $\int (2x+5)\sin xdx$;

7) $\int \frac{x^2+6}{x(x^2+4x+5)}dx$;

8) $\int \frac{x^3+1}{x^3+x^2-x}dx$;

9) $\int \frac{x-5}{1+x+x^2}dx$;

10) $\int \frac{1}{\sqrt{2x^2+8x+7}}dx$;

11) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$;

12) $\int \frac{1}{\sin x-4\cos x}dx$;

13) $\int \sin^2 3xdx$;

14) $\int \sin 6x \cdot \sin 8xdx$.

**2.** 1) $\int\limits_0^1 (x+3)e^{-2x}dx$;

2) $\int\limits_0^{\sqrt[3]{7}} \frac{x^2}{\sqrt{x^3+9}}dx$.

**3.** 1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{4x^2+4x+5}dx$;

2) $\int\limits_{-\frac{1}{3}}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}$.

**4.** $y=x^2$, $y=1$.

**5.** $x=4\cos t$, $y=5\sin t$.

**6.** $y=\frac{x}{2}+3$, $x=4$, $y=1$ $(OX)$.

**7.** $y=\ln\cos x$ от $x=0$ до $x=\frac{\pi}{2}$.

**8.** $\rho=3\cos\varphi$.

**9.** Материальная точка движется со скоростью $v=t^2-2t+2$ *м/сек*. Какой путь она пройдет за первые 7 *сек* после начала движения.

## *Вариант 14*

**1.** 1) $\int \cos(2-9x)dx$;

2) $\int \frac{x}{x^2+3}dx$;

3) $\int \frac{arctgx}{x^2+1}dx$;

4) $\int e^{\sin x}\cos xdx$;

5) $\int \ln(x+5)dx$;

6) $\int x\cos(1-x)dx$;

7) $\int \frac{4}{x(x^2+2x+2)}dx$;

8) $\int \frac{x^2+1}{x^2+x-6}dx$;

9) $\int \frac{4x-5}{10+6x+x^2}dx$;

10) $\int \frac{1}{\sqrt{5-2x+x^2}}dx$;

11) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}+1}dx$;

12) $\int \frac{1}{8+5\sin x-4\cos x}dx$;

13) $\int \sin^3 x\cos^4 xdx$;

14) $\int \sin 2x\cdot\cos 6xdx$.

**2.** 1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{8}} x\cdot\sin 4xdx$;

2) $\int\limits_{\ln 5}^{\ln 12}\frac{dx}{\sqrt{e^x+4}}$.

**3.** 1) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+\ln^2 x)}dx$;

2) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin xdx}{\sqrt[3]{\cos x}}$.

**4.** $y^2=9x$, $y=3x$.

**5.** $x=4\cos^3 t$, $y=4\sin^3 t$.

**6.** $y=\sqrt{x}$, $x=4$, $x=1$, $y=0$ ($OX$).

**7.** $y=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$ от $x=0$ до $x=1$.

**8.** $\rho=3\sin\varphi$.

**9.** Материальная точка движется со скоростью $v=t\cdot e^{-0,5t}$ *м/сек*. Какой путь она пройдет за первые 2 *сек* после начала движения.

## *Вариант 15*

**1.** 1) $\int ctg5xdx$;

2) $\int \frac{1}{3x+5}dx$;

3) $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

4) $\int e^{x^3+5}x^2dx$;

5) $\int x\ln(x+5)dx$;

6) $\int (2+x)e^{(1-x)}dx$;

7) $\int \frac{4}{x^2(x+2)}dx$;

8) $\int \frac{x^3+1}{x^2+2x-6}dx$;

9) $\int \frac{1}{5+2x+x^2}dx$;

10) $\int \frac{2x-6}{\sqrt{5-2x-x^2}}dx$;

11) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}dx$;

12) $\int \frac{1}{1+\sin x-\cos x}dx$;

13) $\int \sin^2 x\cos^2 xdx$;

14) $\int \cos 4x\cdot\cos 6xdx$.

**2.** 1) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\arcsin(1-x)dx$;

2) $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{4x^2-9}$.

**3.** 1) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2+9}dx$;

2) $\int\limits_{0}^{3}\frac{\sqrt[3]{9}xdx}{\sqrt[3]{9-x^2}}$.

**4.** $y^2=4x$, $x=1$.

**5.** $\rho=3\sqrt{\cos\varphi}$.

**6.** $y=\sin x$**,** $y=0$ $(OX)$.

**7.** $y=(x-1)^{\frac{3}{2}}$ от $x=1$ до $x=5$.

**8.** $x=3(t-\sin t)$, $y=3(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$.

**9.** Шар лежит на дне бассейна глубиной $h=8м$. Определить работу, которую необходимо затратить, чтобы извлечь шар из воды, если его радиус $R=2м$ и удельный вес шара и воды равен *1*.

## *Вариант 16*

**1.** 1) $\int x\sin(5x^2+3)dx$;

2) $\int \frac{1}{2x-7}dx$;

3) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$;

4) $\int \frac{2x-3}{x^2+5}dx$;

5) $\int x\cos(4x+5)dx$;

6) $\int (2+x+x^2)\ln x dx$;

7) $\int \frac{1}{x(x+1)^2}dx$;

8) $\int \frac{2x^3+1}{x^2+2x+7}dx$;

9) $\int \frac{3x-2}{x^2-8x-8}dx$;

10) $\int \frac{1}{\sqrt{3-6x-x^2}}dx$;

11) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-1}dx$;

12) $\int \frac{1}{5+3\sin^2 x}dx$;

13) $\int \sin^3 2x dx$;

14) $\int \cos 4x\cdot\sin 5x dx$.

**2.** 1) $\int\limits_0^1 xe^x dx$;

2) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$.

**3.** 1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^3+1}dx$;

2) $\int\limits_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{8-x}}$.

**4.** $y=\frac{x^2}{2}$, $y=\frac{3}{2}-x$.

**5.** $x=4\cos^3 t$, $y=4\sin^3 t$.

**6.** $y=2-\frac{x^2}{2}$, $x+y=2$, $(OX)$.

**7.** $y=\ln\cos x$ от $x=0$ до $x=\frac{\pi}{6}$.

**8.** $\rho=4(1+\cos\varphi)$.

**9.** Материальная точка движется со скоростью $v=t\cdot 2^{-0,05t}$ *м/сек*. Какой путь она пройдет за первые 2 *сек* после начала движения.

## *Вариант 17*

**1.** 1) $\int 4x^3\sqrt{x^4-5}dx$;

2) $\int \frac{5}{1-6x}dx$;

3) $\int \sin(1+3x)dx$;

4) $\int \sqrt{\cos x}\sin xdx$;

5) $\int x^2e^{-x}dx$;

6) $\int (x+1)\ln xdx$;

7) $\int \frac{x+5}{x^3+x^2}dx$;

8) $\int \frac{x^3}{x^2+2x+2}dx$;

9) $\int \frac{x-1}{3x^2-2x-4}dx$;

10) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx$;

11) $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}+5}dx$;

12) $\int \frac{dx}{5-\cos^2 x}$;

13) $\int \frac{1}{ctg^2 x}dx$;

14) $\int \cos 3x\cdot\cos 2xdx$.

**2.** 1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x}dx$;

2) $\int\limits_1^2 \frac{2x-1dx}{x^2+7}$.

**3.** 1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{x^4+16}dx$;

2) $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$.

**4.** $y=x^2$, $y=5x-4$.

**5.** $\rho=3\cos 2\varphi$.

**6.** $y=x-x^2$, $y=0$, ($OX$).

**7.** $y=x^{\frac{3}{2}}$ от $x=0$ до $x=3$.

**8.** $x=2\cos t$, $y=2\sin t$.

**9.** Вычислить работу, которую нужно затратить на сооружение конического кургана, радиус основания которого $R=3м$, а высота $H=4м$, из однородного строительного материала плотностью $\delta=3{,}5т/м^3$.

## *Вариант 18*

**1.** 1) $\int \frac{x^2}{\sqrt{2+x^3}}dx$;

2) $\int \frac{1}{2+5x}dx$;

3) $\int e^{2-3x}dx$;

4) $\int \frac{1}{\arcsin^2 x\sqrt{1-x^2}}dx$;

5) $\int x^2 \cos x dx$;

6) $\int (x^2+4x+2)\ln x dx$;

7) $\int \frac{x+1}{x^3-8}dx$;

8) $\int \frac{x^2+1}{x^2+x+1}dx$;

9) $\int \frac{x}{x^2-2x+10}dx$;

10) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+8x+11}}dx$;

11) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}+1}dx$;

12) $\int \frac{dx}{\cos^2 x+3\sin^2 x}$;

13) $\int \cos^3 4x dx$;

14) $\int \sin 4x \cdot \sin 2x dx$.

**2.** 1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\cos x}dx$;

2) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{x-3}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

**3.** 1) $\int\limits_{e^2}^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x-1)^2}dx$;

2) $\int\limits_0^1 \frac{x^4}{\sqrt[3]{1-x^5}}dx$.

**4.** $y=\frac{3}{2}x^2+\frac{x}{2}$, $y=2x$.

**5.** $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$.

**6.** $y=2-x^2$, $y=x^2$, $(OX)$.

**7.** $y=x^{\frac{3}{2}}$ от $x=1$ до $x=4$.

**8.** $\rho=6(1-\cos\varphi)$.

**9.** Вычислить силу давления воды на прямоугольник, вертикально погруженный в воду, если известно, что его основание *9м*, высота 13*м*, верхнее основание параллельно поверхности воды и находится на глубине 4*м*. Плотность $\delta=1{,}5т/м^3$.

## *Вариант 19*

**1.** 1) $\int \cos\left(\frac{9}{2}x+4\right)dx$;

2) $\int \frac{1}{2-7x}dx$;

3) $\int x^5 e^{2-3x^6}dx$;

4) $\int \frac{arctg^2 5x}{1+25x^2}dx$;

5) $\int x\sin(5x+3)dx$;

6) $\int \arccos 2x dx$;

7) $\int \frac{4x^2-2}{x^4-x^2}dx$;

8) $\int \frac{x^4+1}{x^4+5x^2+4}dx$;

9) $\int \frac{3x+8}{x^2-4x+8}dx$;

10) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x-3}}dx$;

11) $\int \frac{1}{\sqrt[6]{x}+1}dx$;

12) $\int \frac{dx}{5\cos^2 x+3\sin^2 x}$;

13) $\int \sin^2 5x dx$;

14) $\int \sin 8x\cdot\cos 2x dx$.

**2.** 1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\sin x dx$;

2) $\int\limits_0^{\ln 4} \frac{e^x}{e^x+6}dx$.

**3.** 1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{6x^2-5x+1}dx$;

2) $\int\limits_0^4 \frac{x}{\sqrt{16-x^2}}dx$.

**4.** $y=x^2$, $y=6-x$.

**5.** $x=4\cos^3 t$, $y=4\sin^3 t$.

**6.** $2y=x^2$, $2x+2y-3=0$, $(OX)$.

**7.** $y=1-\ln\cos x$ от $x=0$ до $x=\frac{\pi}{4}$.

**8.** $\rho=6\sin\varphi$.

**9.** Определить путь, пройденный телом за 6 секунд с начала движения, если скорость тела определяется формулой $v=\frac{t^3}{3}+2t-1$ *м/сек*.

## *Вариант 20*

**1.** 1) $\int \cos^8 x \cdot \sin x dx$;

2) $\int \frac{1+x}{5+x^2} dx$;

3) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$;

4) $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

5) $\int \cos(\ln x) dx$;

6) $\int arctg 2x dx$;

7) $\int \frac{3x^2+1}{(x-1)(x^2-1)} dx$;

8) $\int \frac{2x^3+1}{x^2(x+1)} dx$;

9) $\int \frac{1}{2x^2-3x-6} dx$;

10) $\int \frac{2x-5}{\sqrt{x^2-16x+70}} dx$;

11) $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}} dx$;

12) $\int \frac{1}{7+4\cos x+4\sin x} dx$;

13) $\int \sin^4 9x dx$;

14) $\int \sin 6x \cdot \cos 8x dx$.

**2.** 1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x dx$;

2) $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2} dx$.

**3.** 1) $\int\limits_0^{+\infty} x e^{-3x} dx$;

2) $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{dx}{\sqrt[7]{1-3x}}$.

**4.** $y = x^2 - \frac{2}{3}x$, $y = \frac{4}{3}x$.

**5.** $x = 4\cos t$, $y = 3\sin t$.

**6.** $xy = 4$, $2x + y - 6 = 0$, $(OX)$.

**7.** $y = \frac{3}{2}\sqrt{(3-x)^3}$ от $x = 0$ до $x = 2$.

**8.** $\rho = 4\cos\varphi$.

**9.** Определить работу $A$, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из котла, имеющего форму полушара радиусом $R = 3{,}5 м$, если плотность воды $\delta = 1{,}3 т / м^3$.

## *Вариант 21*

**1.** 1) $\int \frac{ctgx+1}{\sin^2 x}dx$;

2) $\int \frac{1-x}{\sqrt{3+x^2}}dx$;

3) $\int e^{2x+5}dx$;

4) $\int x^3 \sin(x^4)dx$;

5) $\int \ln(x^2+1)dx$;

6) $\int (1+2x)\cdot \cos 2xdx$;

7) $\int \frac{8x}{(x^2+6x+5)(x+3)}dx$;

8) $\int \frac{6x^4}{(x^2-x)(x+2)}dx$;

9) $\int \frac{x+3}{\sqrt{8+4x-x^2}}dx$;

10) $\int \frac{1}{x^2+5x+9}dx$;

11) $\int \frac{\sqrt{x^2+4}-6}{\sqrt{x^2+4}}dx$;

12) $\int \frac{1}{\cos x-3\sin x}dx$;

13) $\int \sin^2 2x\cos xdx$;

14) $\int \sin 7x\cdot \sin 5xdx$.

**2.** 1) $\int\limits_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$;

2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx$.

**3.** 1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt[4]{(4+x^2)^5}}dx$;

2) $\int\limits_0^{\frac{1}{3}} \frac{e^{\left(\frac{1}{x}+3\right)}dx}{x^2}$.

**4.** $y=4-x^2$, $y=0$.

**5.** $\rho=4\sqrt{\cos 2\varphi}$.

**6.** $y=e^x$**,** $x=0$**,** $x=1$, $y=0$ $(OX)$.

**7.** $y=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$ от $x=0$ до $x=1$.

**8.** $\rho=3\cos^3\frac{\varphi}{3}$.

**9.** Определить работу, которую нужно затратить, чтобы растянуть пружину на *0,04 м*, если известно, что сила растягивающая пружина на "$x$" $м$ равна: $F(x)=kx$, где $k$ – коэффициент пропорциональности, зависящий от упругости пружины, и что для растяжения пружины на *0,01 м* необходима сила *21 Н*.

## *Вариант 22*

**1.** 1) $\int \sin\left(\frac{5}{12}x+3\right)dx$;

2) $\int \frac{1}{2x+5}dx$;

3) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+4}dx$;

4) $\int \frac{x-3}{x^2-8}dx$;

5) $\int (4x+5)\cos x dx$;

6) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$;

7) $\int \frac{1}{(x+5)(x+1)^2}dx$;

8) $\int \frac{x^3+3x+2}{x^2+1}dx$;

9) $\int \frac{x-2}{x^2-4x-8}dx$;

10) $\int \frac{1}{\sqrt{4+2x-x^2}}dx$;

11) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}+1}dx$;

12) $\int \frac{1}{3\cos x-4\sin x}dx$;

13) $\int \cos^3 4x dx$;

14) $\int \cos 7x \cdot \sin 5x dx$.

**2.** 1) $\int\limits_0^1 x^2 e^{x^3+1}dx$;

2) $\int\limits_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x^2+8}}$.

**3.** 1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{3-x^2}{x^2+4}dx$;

2) $\int\limits_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{64-x^6}}$.

**4.** $y=2x^2$, $y=8x-6$.

**5.** $x=3\cos t$, $y=3\sin t$.

**6.** $y=8x-2x^2$, $y=2x$, $(OX)$.

**7.** $y=\ln\cos x$ от $x=0$ до $x=\frac{\pi}{6}$.

**8.** $\rho=8(1-\cos\varphi)$.

**9.** Материальная точка движется со скоростью $v=t\cdot 3^{-0,05t}$ *м/сек*. Какой путь она пройдет за первые 2 *сек* после начала движения.

## *Вариант 23*

**1.** 1) $\int \cos\left(\frac{10}{9}x+4\right)dx$;

2) $\int \frac{1}{2+5x}dx$;

3) $\int tg2xdx$;

4) $\int \frac{\arcsin^3 5x}{\sqrt{1-25x^2}}dx$;

5) $\int xarctgxdx$;

6) $\int (x^2+1)e^x dx$;

7) $\int \frac{4x^2+2}{x^4+4x^2}dx$;

8) $\int \frac{2x^5-2x+1}{1-x^4}dx$;

9) $\int \frac{2x+1}{x^2-8x+5}dx$;

10) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4x-9}}dx$;

11) $\int \frac{\sqrt[6]{x+3}}{\sqrt[3]{x+3}+\sqrt{x+3}}dx$;

12) $\int \frac{dx}{5\cos x+3\sin x}$;

13) $\int \sin^2 4xdx$;

14) $\int \sin 8x \cdot \cos 2xdx$.

**2.** 1) $\int\limits_0^1 \frac{x}{e^{x^2-1}}dx$;

2) $\int\limits_0^1 \frac{3x+4}{x^2+6}dx$.

**3.** 1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x+2}{\sqrt[3]{(x^2+4x+1)^4}}dx$;

2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{tgx}}{\cos^2 x}dx$.

**4.** $y=3x^2$, $y=18-15x$.

**5.** $\rho=2\sin\varphi$.

**6.** $y=3x-3x^2$, $y=0$, $(OX)$.

**7.** $y=\ln\cos x$ от $x=0$ до $x=\frac{\pi}{4}$.

**8.** $x=3\cos t$, $y=3\sin t$.

**9.** Скорость движения тела $v=5te^{-t^2}$ *м/сек*. Какой путь пройдет тело от начала движения до полной остановки.

## *Вариант 24*

**1.** 1) $\int \cos^3 x \cdot \sin x dx$;

2) $\int \frac{x}{\sqrt{5-x^2}} dx$;

3) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$;

4) $\int \frac{\sqrt[4]{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

5) $\int \cos(\ln x) dx$;

6) $\int arctgx dx$;

7) $\int \frac{x^2-6x+8}{x^3+8} dx$;

8) $\int \frac{2x^5-2x^3-x^2}{1-x^4} dx$;

9) $\int \frac{1}{x^2-3x-6} dx$;

10) $\int \frac{2x-5}{\sqrt{x^2-10x+5}} dx$;

11) $\int \frac{1}{3+\sqrt{x}} dx$;

12) $\int \frac{1}{7+\cos x+5\sin x} dx$;

13) $\int \sin^4 2x dx$;

14) $\int \sin 6x \cdot \cos 10x dx$.

**2.** 1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} e^{\sin x} \cos x dx$;

2) $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^2+2x+2} dx$.

**3.** 1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{4+x^4} dx$;

2) $\int\limits_{\frac{1}{5}}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-5x}}$.

**4.** $y=4x^2+x$, $y=5x$.

**5.** $\rho=5\varphi$ (один виток спирали Архимеда).

**6.** $y=8-x^2$**,** $y=x^2$**,** $(OX)$.

**7.** $y=\frac{3}{2}\sqrt{(3-x)^3}$ от $x=0$ до $x=2$.

**8.** $\rho=6\cos^3\frac{\varphi}{3}$.

**9.** Вычислить массу земной атмосферы, полагая, что ее плотность $\rho$ меняется с увеличением высоты по закону $\rho=\rho_0 e^{-ah}$, где $h$ – расстояние от поверхности Земли до рассматриваемой точки (Земля считается шаром радиуса $R$).

## *Вариант 25*

**1.** 1) $\int 2x\sqrt{x^2-5}dx$;

2) $\int \frac{5}{1+6x}dx$;

3) $\int \sin(5-3x)dx$;

4) $\int \frac{1}{(1+x^2)arctg^2 x}dx$;

5) $\int x\cos(2x+1)dx$;

6) $\int (x^2+3x+1)\ln x dx$;

7) $\int \frac{4x+2}{x^4+4x^2}dx$;

8) $\int \frac{x^3}{x^2+2x+1}dx$;

9) $\int \frac{2x-1}{3x^2-6x-4}dx$;

10) $\int \frac{1}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx$;

11) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+2}dx$;

12) $\int \frac{dx}{5\cos x-2\sin x}$;

13) $\int \frac{1}{tg^3 x}dx$;

14) $\int \cos 3x\cdot\cos 5x dx$.

**2.** 1) $\int\limits_{\frac{2}{\pi}}^{\frac{3}{\pi}} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx$;

2) $\int\limits_1^2 \frac{2x-5dx}{x^2+1}$.

**3.** 1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2+16)^3}}dx$;

2) $\int\limits_0^{\frac{1}{7}} \frac{dx}{\sqrt[5]{1-7x}}$.

**4.** $y=x^2-\frac{x}{2}$, $y=\frac{3}{2}x$.

**5.** $\rho=1-\cos\varphi$.

**6.** $y=6x-x^2$, $y=0$, $(OX)$.

**7.** $y=\frac{1}{2}x^2-\ln x$ от $x=1$ до $x=e$.

**8.** $x=2\cos t$, $y=2\sin t$.

**9.** Вычислить работу, которую нужно затратить на сооружение конического кургана, радиус основания которого $R=1{,}5м$, а высота $H=2{,}5м$, из однородного строительного материала плотностью $\delta=2т/м^3$.