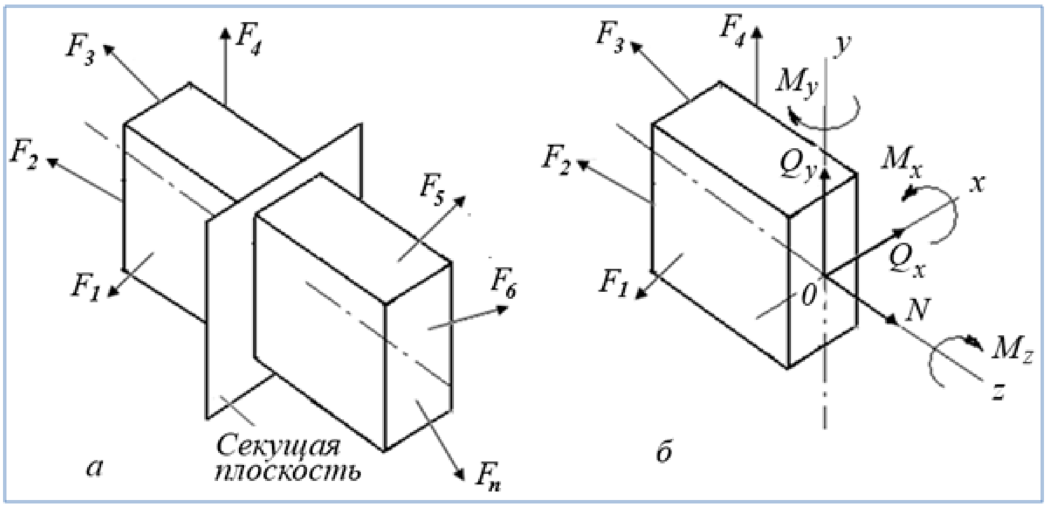
Т. В. ЗУЛЬФИКАРОВА

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА (СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ)

Учебное пособие



Воронеж 2024

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Филиал федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования
«Воронежский государственный технический университет»
в г. Борисоглебске

Т. В. Зульфикарова

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА (СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ)

Учебное пособие

Воронеж 2024

УДК 539.3/.6
ББК 30.121
З-937

Рецензенты:

кафедра естественнонаучных и общеобразовательных дисциплин филиала Воронежского государственного университета (г. Борисоглебск) (зав. кафедрой канд. физ.-мат. наук, доцент С. Е. Зюзин);
А. Ф. Тараканов, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры математики ВУНЦ ВВС «ВВА им. профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина» (г. Воронеж)

Зульфикарова, Т. В.

З-937 **Техническая механика (сопротивление материалов)**: учебное пособие [Электронный ресурс]. — Электрон. текстовые и граф. данные (3,4 Мб) / Т. В. Зульфикарова. — Воронеж: ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», 2024. — 1 электрон. опт. диск (DVD-ROM): цв. — Систем. требования: ПК 500 и выше; 256 Мб ОЗУ; Windows 10; SVGA с разрешением 1024x768; Adobe Acrobat; CD-ROM дисковод; мышь. — Загл. с экрана.

ISBN 978-5-7731-1163-4

Пособие содержит краткие теоретические сведения по одному из разделов технической механики – сопротивлению материалов, преподаваемых бакалаврам в технических вузах, вопросы для самоконтроля теоретических знаний и задания для практического освоения наиболее важных тем курса.

Предназначено для студентов бакалавриата технических направлений очной и заочной форм обучения, изучающих дисциплины «Техническая механика» и «Сопротивление материалов».

Ил. 49. Табл. 17. Библиогр.: 7 назв.

УДК 539.3/.6
ББК 30.121

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

ISBN 978-5-7731-1163-4

ВВЕДЕНИЕ

Техническая механика является одним из разделов механики деформируемого твёрдого тела, в котором изучаются методы определения усилий в элементах конструкций при статических и динамических воздействиях, расчёты несущих элементов конструкций на прочность, жёсткость, устойчивость и долговечность с целью получения надежных и экономически обоснованных форм и размеров их поперечных сечений.

В пособии приводятся краткие теоретические сведения о сопротивлении материалов, порядок определения внутренних усилий в силовых элементах конструкций, характер деформаций стержневых элементов под действием приложенных сил, последовательность решения типовых задач, входящих в учебный план образования. Пособие содержит темы, посвященные определению геометрических характеристик сечений, расчету стержней на простые виды напряженных состояний, вызванных действием продольных сил, поперечных сил, крутящих моментов, изгибающих моментов, а также расчеты на прочность при совместном действии нескольких силовых факторов, приводящих к сложным напряженным состояниям, контролируемым соответствующей теорией прочности. В конце пособия приведены вопросы самоконтроля усвоения изученного материала.

Для приобретения студентами практических навыков инженерных расчетов по основным темам курса в пособии предусмотрены индивидуальные задания, выбираемые в соответствии с указанными преподавателем вариантами.

Самостоятельные работы оформляются в тетрадях в клетку с полями для замечаний преподавателя. На обложке тетради необходимо указать номер варианта, название дисциплины, направление обучения и шифр учебной группы, фамилию, имя и отчество студента.

Решение каждой задачи следует начинать на развороте тетради (для удобства проверки). Сверху указывается номер задачи, далее записываются исходные данные и искомые величины, расчетная схема выполняется карандашом с соблюдением масштаба. При необходимости под расчетной схемой оставляется место для эпюр внутренних усилий и деформаций.

Каждое решение необходимо сопровождать краткими комментариями, поясняющими порядок действий и выбор расчетных формул. С целью контроля размерностей данные для вычислений следует подставлять в системе единиц СИ и указывать единицы результатов расчетов. На каждом этапе решения рекомендуется выполнять проверки, что позволит избежать ошибок.

1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ КУРСА

1.1. Основные понятия сопротивления материалов

Детали машин и механизмов, а также строительные конструкции должны быть надежными в работе, технологичными в изготовлении, монтаже, удобными для транспортировки и безопасными в эксплуатации. Особые требования надежности предъявляют к конструкциям, работающим в экстремальных условиях: в контакте с огнеопасными и взрывоопасными средами, при повышенной или низкой температуре, при высоком давлении.

Задачами сопротивления материалов являются: разработка методов расчета элементов конструкций на *прочность*, *жесткость* и *устойчивость*; определение наиболее надежных и экономически обоснованных форм и размеров поперечных сечений; экспериментальное подтверждение теоретических положений курсов.

Под прочностью понимают способность всех элементов конструкции сопротивляться действию внешних нагрузок: не разрушаться (не распадаясь на части); не испытывать значительных пластических деформаций, которые являются необратимыми.

Под жесткостью понимают способность конструкции и отдельных ее элементов сопротивляться упругому изменению первоначальных формы и размеров. Даже малые упругие деформации, возникающие под действием приложенных сил, должны находиться в пределах допустимых значений.

Конструкция и ее отдельные элементы называются *устойчивыми*, если в результате действия внешних сил они сохраняют первоначальную форму упругого равновесия.

Для большинства элементов из конструкционных материалов *упругие деформации* малы по величине и *обратимы*, то есть после снятия нагрузки элементы конструкций способны восстанавливать первоначальные форму и размеры.

Если после снятия нагрузки часть деформаций не восстанавливается, такие деформации называют *необратимыми остаточными* или *пластическими*. Некоторые материалы обладают способностью с течением времени увеличивать деформации под действием постоянной нагрузки, причем скорость деформирования снижается и со временем стремится к нулю, — такое свойство материала называют *ползучестью*. Деформации ползучести также способны убывать в течение длительного времени после снятия нагрузки. Такое явление называют *релаксацией*.

Под *надежностью* понимают способность конструкции *безотказно* выполнять заданные функции, сохранять эксплуатационные показатели в течение всего срока службы. *Отказом* называют нарушение работоспособности конструкции, которая проявляется в потере ею прочности и устойчивости, недостаточной жесткости (табл. 1).

Таблица 1.1

Условия безотказной работы элементов конструкций

Вид отказа	Условие безотказной работы
Потеря несущей способности	**Условие прочности:** $p \le [p]$, где p – напряжения в опасной точке конструкции; $[p]$ – допускаемые напряжения.
Недопустимо большие деформации	**Условие жесткости:** $f \le [f]$, где f – действительный прогиб конструкции; $[f]$ – допускаемый прогиб.
Потеря устойчивости	**Условие устойчивости**: $F \le [F] = F_{кр} / [n]_y$, где F и $[F]$ – действительная и допускаемая нагрузки; $F_{кр}$ – критическая нагрузка; $[n]_y$ – нормативный коэффициент запаса устойчивости.

1.2. Допущения и принципы сопротивления материалов

Свойства конструкционных материалов весьма многообразны, поэтому при получении расчётных формул приходится абстрагироваться от некоторых несущественных признаков и вместо реальных материалов и конструкций использовать их физические модели. Рассмотрим основные гипотезы, используемые в теории сопротивления материалов.

1. Тела, рассматриваемые в сопротивлении материалов, считаются во всех точках *непрерывными, однородными и изотропными*, т.е. материалы не имеют внутренних разрывов (трещин), их свойства не зависят от формы и размеров конструкций.

Изотропными называют материалы, у которых упругие и прочностные характеристики по всем направлениям одинаковы, в отличие от анизотропных материалов, например, древесины (рис. 1.1):

$$E_x = E_y = E_z; \qquad E_a > E_t > E_r.$$

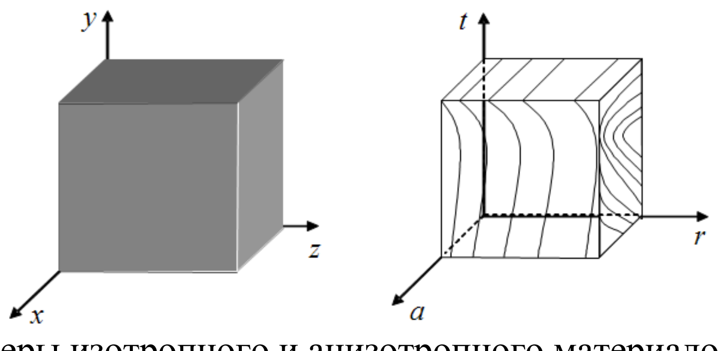


Рис. 1.1. Примеры изотропного и анизотропного материалов (древесины)

2. Тела, рассматриваемые в сопротивлении материалов, обладают *идеальной упругостью*, т.е. способностью восстанавливать свою первоначальную форму и размеры после снятия нагрузки.

3. Упругие перемещения точек тела, обусловленные его деформацией, весьма малы по сравнению с размерами самого тела, следовательно, при получении уравнений равновесия всякое тело или система тел рассматриваются как недеформируемые.

4. Перемещения точек тела в упругой стадии работы материала прямо пропорциональны силам, вызывающим эти перемещения, а относительные деформации материала — прямо пропорциональны напряжениям (гипотеза Гука).

5. Поперечные сечения тела, плоские и перпендикулярные его оси до приложения нагрузки, остаются плоскими и перпендикулярными оси после приложения нагрузки (гипотеза плоских сечений Бернулли).

6. В точках тела, достаточно удалённых от места приложения нагрузок, внутренние силы мало зависят от конкретного способа приложения этих нагрузок — принцип Сен-Венана. Принцип Сен-Венана позволяет производить замену одной системы сил другой системой, статически эквивалентной первой, что может значительно упростить расчёт.

7. Результат воздействия на тело нескольких сил равен алгебраической сумме результатов воздействия на тело каждой из сил в отдельности (принцип независимости действия сил).

1.3. Понятие расчетной схемы

Условное изображение конструкции или детали, принимаемое для выполнения расчета, называется *расчетной схемой*. Выбор расчетной схемы является важным этапом проектирования элемента конструкции и его проверочного расчета. Расчетная схема выбирается так, чтобы существенно упростить расчет, не искажая действительной картины работы конструкции под нагрузкой, а также элементов конструкций и деталей.

Порядок составления расчетной схемы конструкции:

1. сложную конструкцию разбивают на простые элементы;

2. каждый простой элемент заменяют расчетным элементом соответствующей конфигурации (стержнем, оболочкой, пластиной, массивным телом);

3. для расчетного элемента выбирают соответствующие опорные части (шарнирная опора, жесткое защемление и др.), соединяющие его с другими частями конструкции;

4. схематически изображают соединения элементов конструкций между собой и с опорами (землей);

5. к расчетной схеме прикладывают действующие внешние нагрузки.

Наиболее простыми элементами расчетной схемы являются *стержни*. Стержнем считают элемент конструкции, у которого длина значительно превышает размеры поперечного сечения. Стержни могут иметь постоянное или переменное сечения, по форме оси различают стержни прямолинейные, криволинейные, ломанные (рис. 1.2).

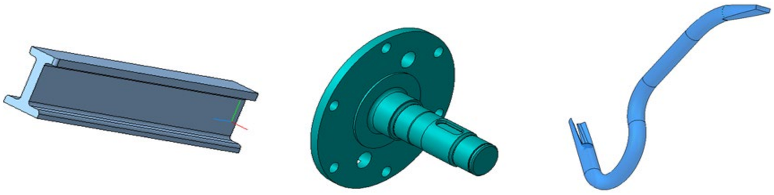


Рис. 1.2. Примеры прямолинейных и криволинейных стержней

Оболочкой считают тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, у которого один размер (толщина) много меньше двух других размеров. Срединная поверхность оболочки может быть цилиндрической, конической, сферической или плоскостью, в последнем случае элемент называют *пластиной* (рис. 1.3).

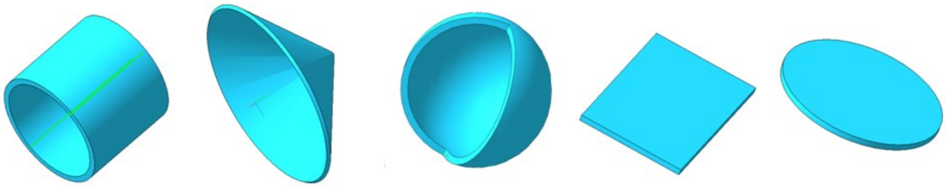


Рис. 1.3. Конфигурации оболочек и пластин

Массивное тело имеет все размеры одного порядка.

В курсе сопротивления материалов рассматриваются главным образом одномерные задачи расчета стержневых элементов конструкций. Решение двумерных и трехмерных задач расчета пластин, оболочек и массивных тел рассматривает другая дисциплина — «Теория упругости».

Конструкция, состоящая из шарнирно соединенных стержней, в которых действуют только продольные внутренние силы, называется *фермой.*

Плоская или пространственная конструкция, состоящая из стержней, соединенных между собой шарнирно и жестко, в результате чего в них возникают изгибающие и крутящие моменты, называется *рамой*. Вертикальные стержни рамы называются *стойками*. Горизонтальные — *ригелями*.

В сопротивлении материалов широко используются методы теоретической механики, главным образом статики, а также законы физики и методы математического анализа.

2. ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ, НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ СТЕРЖНЕЙ

В отличие от внешних сил, которые действуют на расчетный элемент со стороны других тел или сред, внутренние силы возникают между частями одного и того же элемента вследствие его деформации. Внутренние силы вызваны электромагнитными взаимодействиями между атомами и молекулами вещества, но в сопротивлении материалов не учитывают этого факта. Внутренние силы являются статически уравновешенными, поэтому не влияют на равновесие элемента в целом, однако от величины и характера их распределения в поперечном сечении зависит надежность работы конструкции.

2.1. Метод сечений

Для определения внутренних сил используется *метод сечений*.

Порядок применения метода сечений:

— в том месте, где необходимо определить внутренние усилия, мысленно проводят секущую плоскость (рис. 2.1, а);

— одну из частей (слева или справа от сечения) мысленно отбрасывают, а ее действие на оставшуюся часть заменяют внутренними усилиями;

— составляют уравнения равновесия и определяют главный вектор $\vec{R}$ и главный момент $\vec{M}$ внутренних сил, которые соответственно равны главному вектору и главному моменту внешних сил, приложенных слева (или справа) от секущей плоскости;

— главный вектор $\vec{R}$ внутренних сил проецируют на координатные оси x, y, расположенные в плоскости сечения, ось z, направленную по внешней нормали к сечению стержня, и таким образом получают поперечные силы Q_X, Q_Y, продольную силу N;

— аналогично проецируют главный момент $\vec{M}$ внутренних сил и получают изгибающие моменты M_X, M_Y, крутящий момент M_z.

Рассмотрим стержень постоянного сечения (например, прямоугольного, рис. 2.1, а) с прямой осью, находящийся в состоянии статического равновесия под действием системы внешних сил $\vec{F_i}$ ($i=1...n$).

Для определения внутренних сил в произвольном сечении мысленно рассечем стержень плоскостью перпендикулярной оси и отбросим одну (например, переднюю) его часть (рис. 2.1, б).

Оставшаяся часть продолжает сохранять равновесие, поскольку внутренние силы в данном сечении, вызванные деформациями стержня, уравновешивают оставшиеся внешние силы.

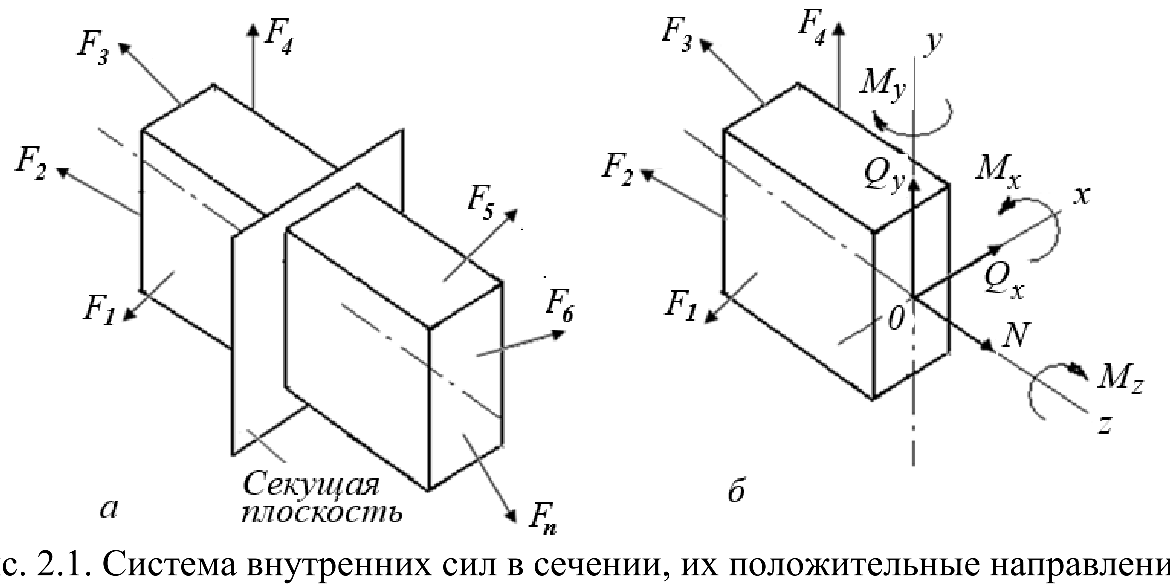


Рис. 2.1. Система внутренних сил в сечении, их положительные направления

Внутренняя продольная сила N считается положительной, если она направлена по внешней нормали к сечению и стремится растянуть часть стержня. Сжимающая продольная сила имеет отрицательный знак.

Внутренние поперечные силы Q_X, Q_Y положительны, если они стремятся повернуть рассматриваемую часть стержня по ходу часовой стрелки.

Внутренний крутящий момент M_z, а также внутренние изгибающие моменты M_X, M_Y считаются положительными, если они стремятся повернуть рассматриваемую часть стержня по ходу часовой стрелки относительно соответствующей координатной оси.

2.2. Внутренние напряжения

Механическим напряжением называют отношение равнодействующей внутренних сил $d\vec{R}$, действующей на малый элемент сечения, к площади dA этого элемента

$$\vec{p} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta A} = \frac{d\vec{R}}{dA}.$$

Нормальное напряжение — отношение нормальной силы dN, действующей на малый элемент сечения, к площади dA этого элемента

$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta A} = \frac{dN}{dA}.$$

Касательное напряжение — отношение касательной силы dQ, действующей на малый элемент сечения, к площади dA этого элемента

$$\tau = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A} = \frac{dQ}{dA}.$$

Нормальное σ напряжение и касательное τ напряжение являются составляющими полного напряжения p (рис. 2.2). Аналогично нормальная ΔN и поперечная ΔQ внутренние силы являются составляющими равнодействующей внутренних сил $\Delta\vec{R}$ следовательно:

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}; \qquad \Delta R = \sqrt{\Delta N^2 + \Delta Q^2}.$$

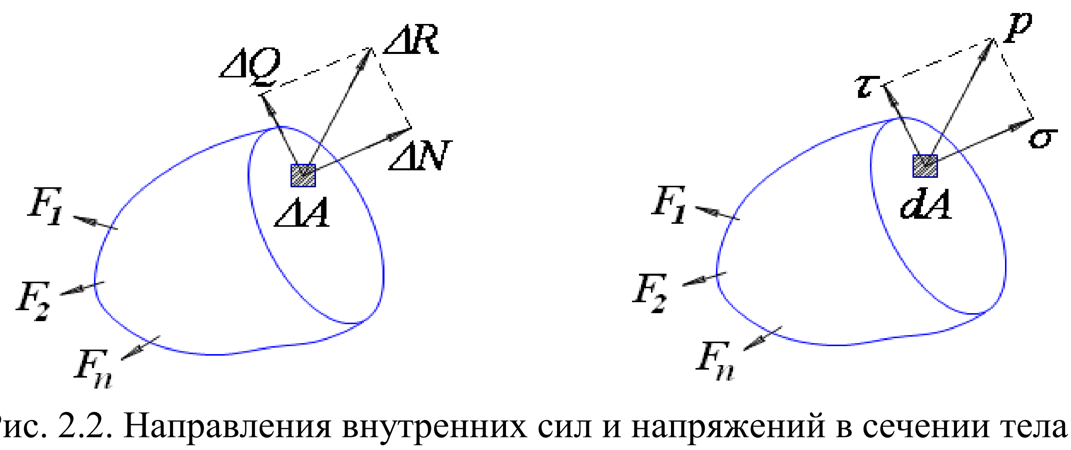


Рис. 2.2. Направления внутренних сил и напряжений в сечении тела

Положительные направления нормальных σ и касательных τ напряжений соответствуют положительным направлениям нормальных N и поперечных Q внутренних сил.

Интегральные зависимости между внутренними усилиями и соответствующими напряжениями в проекциях на координатные оси элемента имеют вид:

— продольная сила — равнодействующая продольных сил $dN = \sigma \cdot dA$, действующих на малые элементы сечения с площадью dA и направленных перпендикулярно плоскости сечения (рис. 2.3)

$$N = \int_{\mathrm{A}} \sigma \cdot dA;$$

— проекции поперечной силы Q_X и Q_Y — равнодействующие поперечных сил $dQ_x = \tau_{ZX} \cdot dA$ и $dQ_y = \tau_{ZY} \cdot dA$, лежащих в плоскости сечения и направленных параллельно соответствующим осям (x и y)

$$Q_X = \int_A \tau_{ZX} \cdot dA, \qquad Q_Y = \int_A \tau_{ZY} \cdot dA;$$

— крутящий момент — сумма произведений касательных сил $dQ = \tau \cdot dA$, действующих на элементы сечения, на расстояния ρ до продольной оси z

$$M_Z = \int_A \tau \cdot \rho \cdot dA;$$

— осевые изгибающие моменты — сумма произведений нормальных сил $dN = \sigma \cdot dA$, действующих на элементы сечения, на расстояния Y или X до соответствующих осей x или y:

$$M_X = \int_A \sigma \cdot Y \cdot dA, \qquad M_Y = \int_A \sigma \cdot X \cdot dA.$$

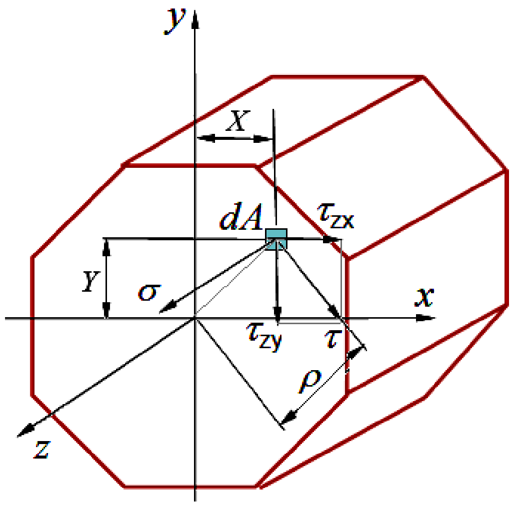


Рис. 2.3. Схема к определению интегральных зависимостей между внутренними усилиями и напряжениями

2.3. Деформации и перемещения

Деформацией называют изменение формы и размеров тела в результате действия внешних нагрузок. Деформации элементов конструкций могут быть представлены, как геометрическая сумма двух простых деформаций: *линейной* и *угловой*.

При линейных деформациях происходит изменение линейных размеров элемента. Приращение длины продольной оси Δl элемента или поперечных размеров ΔB сечения стержня после деформации называется *абсолютной деформацией* (рис. 2.4).

Относительная деформация ε равна отношению абсолютной деформации (продольной, поперечной) к первоначальному размеру (l, B):

$$\varepsilon_{\text{прод}} = \frac{\Delta l}{l}; \qquad \varepsilon_{\text{попер}} = \frac{\Delta B}{B}.$$

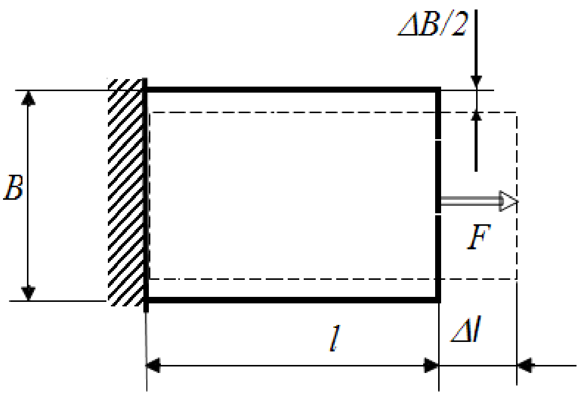


Рис. 2.4. Продольные и поперечные линейные деформации

Абсолютная и относительная деформации считаются положительными, если линейные размер элемента увеличивается.

Угловыми называются деформации, при которых происходит сдвиг одного сечения элемента относительно другого, при этом ребра элемента отклоняются на некоторый угол. Угловые деформации вызваны поперечной силой (рис. 2.5).

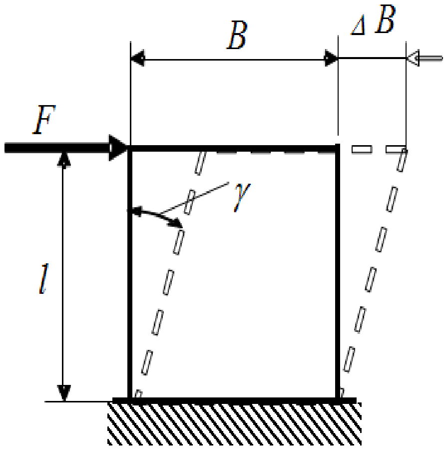


Рис. 2.5. Угловые деформации стержня

Перемещение ΔB данного сечения относительно другого, принятого за неподвижное, называется *абсолютным сдвигом* и измеряется в метрах. При проверке сдвиговой жесткости важной мерой угловой деформации является *относительный сдвиг*, равный отношению абсолютного сдвига ΔB к расстоянию между данным и неподвижным сечениями l. Для малых упругих деформаций относительный сдвиг γ равен

$$\gamma \approx tg\gamma = \frac{\Delta B}{l}.$$

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

При выполнении расчетов стержня по прочности, жесткости и устойчивости важно знать геометрические характеристики плоских сечений стержней, которые определяются их формой и размерами (рис. 3.1).

Наиболее часто применяемые геометрические характеристики сечений:

— площадь поперечного сечения A, м^2;

— статические осевые моменты сечения S_X, и S_Y, м^3;

— осевые моменты инерции сечения I_X и I_Y, м^4;

— осевые моменты сопротивления сечения W_X и W_Y, м^3;

— центробежный момент инерции сечения I_{XY}, м^4;

— полярный момент инерции I_P, м^4;

— полярный момент сопротивления W_P, м^3.

Площадь поперечного сечения стержня равна сумме площадей малых элементов dA, на которые разбито сечение

$$A = \int_A dA.$$

Статическим моментом сечения относительно некоторой оси называют сумму произведений элементарных площадок dA на расстояния от их центров до соответствующей оси. В общем случае осевые статические моменты сечения определяются интегральными уравнениями:

$$S_X = \int_A Y \cdot dA\,; \qquad S_Y = \int_A X \cdot dA\,.$$

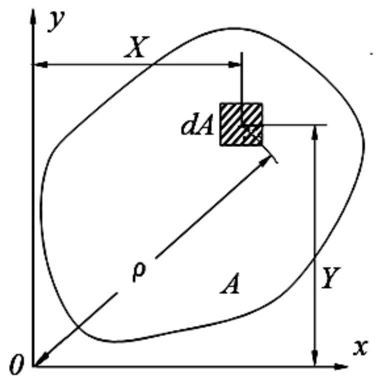


Рис. 3.1. Схема поперечного сечения стержня

Оси, проходящие через геометрический центр сечения, называются *центральными осями.* Статические моменты сечения относительно центральных осей равны нулю. Отсюда следует, что координаты геометрического центра сечения определяются равенствами:

$$X_c = \frac{S_Y}{A}\,; \qquad\qquad Y_c = \frac{S_X}{A}\,.$$

Моментом инерции сечения относительно оси называется сумма произведений элементарных площадок dA на квадраты расстояний от их центров до соответствующей оси:

$$I_X = \int_A Y^2 \cdot dA\,; \qquad\qquad I_Y = \int_A X^2 \cdot dA\,.$$

Центробежным моментом инерции сечения называется сумма произведений элементарных площадок dA на координаты их центров тяжести

$$I_{XY} = \int\limits_A X \cdot Y \cdot dA\,.$$

Полярным моментом инерции сечения называется сумма произведений элементарных площадок dA на квадраты расстояний от их центра тяжести до начала координат

$$I_P = \int\limits_A \rho^2 \cdot dA\,.$$

Между полярным моментом инерции сечения и осевыми моментами инерции существует зависимость:

$$I_P = \int\limits_A \rho^2 \cdot dA = \int\limits_A (X^2 + Y^2) \cdot dA = \int\limits_A X^2 \cdot dA + \int\limits_A Y^2 \cdot dA = I_Y + I_X\,.$$

Следовательно, полярный момент инерции сечения равен сумме осевых моментов инерции сечения относительно взаимно перпендикулярных осей

$$I_P = I_Y + I_X\,.$$

3.1. Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей

Проведем центральные оси через геометрический центр сечения *C* параллельно имеющимся координатным осям (рис. 3.2).

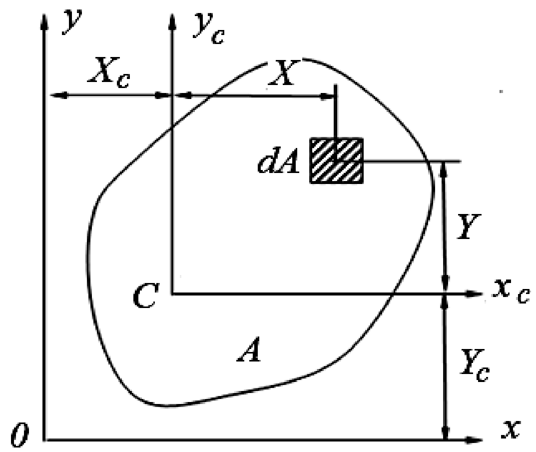


Рис. 3.2. Схема поперечного сечения стержня с центральными осями

Обозначим координаты центра элементарной площадки dA относительно центральных осей X и Y, тогда относительно параллельных координатных осей они имеют значения: $X + X_c$ и $Y + Y_c$.

В этом случае осевой момент инерции сечения относительно оси Ox принимает вид:

$$I_X = \int_A (Y + Y_c)^2 \cdot dA = \int_A Y^2 \cdot dA + 2Y_c \int_A Y \cdot dA + Y_c{}^2 \int_A dA\,.$$

Выполним замены интегралов ранее полученными их значениями:

$$I_{Xc} = \int_A Y^2 \cdot dA, \qquad S_{Xc} = \int_A Y \cdot dA = 0, \quad A = \int_A dA.$$

Окончательно получаем:

$$I_X = I_{Xc} + A \cdot Y_c{}^2; \quad I_Y = I_{Yc} + A \cdot X_c{}^2.$$

Чем сильнее координатные оси смещены от центральных осей сечения, тем больше становятся осевые моменты инерции сечения.

Вычислим центробежный момент инерции сечения относительно параллельных осей:

$$I_{XY} = \int_A (X + X_c) \cdot (Y + Y_c) \cdot dA =$$

$$= \int_A X \cdot Y \cdot dA + Y_c \int_A X \cdot dA + X_c \int_A Y \cdot dA + X_c \cdot Y_c \int_A dA\,,$$

где $I_{XcYc} = \int_A X \cdot Y \cdot dA,\ S_{Xc} = \int_A Y \cdot dA = 0, \quad S_{Yc} = \int_A X \cdot dA = 0.$

Окончательно получаем

$$I_{XY} = I_{XcYc} + A \cdot X_c \cdot Y_c.$$

3.2. Изменение моментов инерции при повороте осей

Пусть координатные оси Ox_1 и Oy_1 сечения повернуты относительно первоначальных координатных осей Ox и Oy на угол α (рис. 3.3).

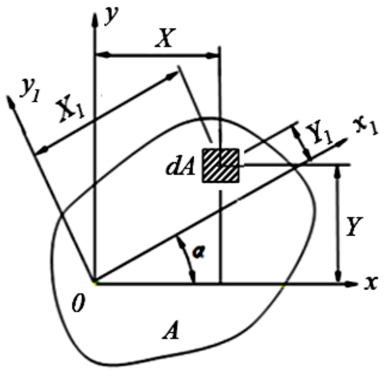


Рис. 3.3. Схема поперечного сечения стержня с поворотом осей

Преобразуем координаты центра элементарной площадки при переходе к новой системе координат

$$X_1 = X \cdot cos\alpha + Y \cdot sin\alpha\,; \qquad Y_1 = Y \cdot cos\alpha - X \cdot sin\alpha.$$

Осевой момент инерции сечения при переходе к оси Ox_1 примет вид:

$$I_{X1} = \int\limits_A {Y_1}^2 \cdot dA = \int\limits_A (Y \cdot cos\alpha - X \cdot sin\alpha)^2 \cdot dA;.$$

$$I_{X1} = cos^2\alpha \int\limits_A Y^2 \cdot dA - 2cos\alpha \cdot sin\alpha \int\limits_A X \cdot Y \cdot dA + sin^2\alpha \int\limits_A X^2 \cdot dA\,;$$

После преобразований получаем:

$$I_{X1} = I_X \cdot cos^2\alpha - I_{XY} \cdot sin2\alpha + I_Y \cdot sin^2\alpha;$$
$$I_{Y1} = I_Y \cdot cos^2\alpha + I_{XY} \cdot sin2\alpha + I_X \cdot sin^2\alpha.$$

Во многих случаях предпочитают другие математические формы полученных уравнений, в том числе центробежный момент инерции:

$$I_{X1} = \frac{I_X + I_Y}{2} + \frac{I_X - I_Y}{2}\, cos2\alpha - I_{XY} \cdot sin2\alpha;$$
$$I_{Y1} = \frac{I_X + I_Y}{2} + \frac{I_X - I_Y}{2}\, cos2\alpha + I_{XY} \cdot sin2\alpha;$$
$$I_{X1Y1} = \frac{I_X - I_Y}{2}\, sin2\alpha + I_{XY} \cdot cos2\alpha.$$

3.3. Главные оси и главные моменты инерции сечения

Главными осями сечения называются оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю

$$I_{X1Y1} = \frac{I_X - I_Y}{2}\, sin2\alpha + I_{XY} \cdot cos2\alpha = 0, \quad \text{отсюда} \quad tg2\alpha = -\frac{2 \cdot I_{XY}}{I_X - I_Y}.$$

В результате решения трансцендентного уравнения получаем два значения угла (α и $\alpha + \pi/2$), следовательно, главные оси взаимно перпендикулярны.

Отрицательный угол α откладывается по ходу часовой стрелки, а положительный — против часовой стрелки.

Моменты инерции сечения относительно главных осей называются *главными моментами инерции.* Главные оси характерны тем, что относительно одной из них осевой момент инерции максимален, а относительно другой — минимален. Определим, при каких угловых поворотах осевые моменты инерции сечения принимают экстремальные значения:

$$\frac{dI_{X1}}{d\alpha} = -(I_X - I_Y) \cdot \mathrm{sin2\alpha} - 2 \cdot I_{XY} \cdot cos2\alpha = 0.$$

Отсюда также следует

$$tg2\alpha = -\frac{2 \cdot I_{XY}}{I_X - I_Y}.$$

Таким образом, главными осями можно считать оси, относительно которых осевые моменты инерции достигают своих экстремальных (максимального и минимального) значений:

$$I_{max} = \frac{I_X + I_Y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(I_X - I_Y)^2 + 4I_{XY}{}^2};$$
$$I_{min} = \frac{I_X + I_Y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(I_X - I_Y)^2 + 4I_{XY}{}^2}.$$

Сложим главные осевые моменты инерции сечения и убедимся, что эта сумма равна сумме моментов инерции для других взаимно перпендикулярных осей:

$$I_{max} + I_{min} = I_X + I_Y.$$

Для сечений, имеющих хотя бы одну ось симметрии, эта ось и перпендикулярная ей, проходящая через геометрический центр сечения, являются главными, поскольку центробежный момент инерции равен нулю.

Радиусами инерции сечения относительно осей x и y называют положительные величины, вычисляемые по формулам:

$$i_X = \sqrt{\frac{I_X}{A}}\,, \qquad i_Y = \sqrt{\frac{I_Y}{A}}\,.$$

3.4. Геометрические характеристики практически важных сечений

Осевые моменты инерции стержня прямоугольного сечения (рис. 3.4) с размерами $b \times h$ вычисляют интегрированием. Оси симметрии являются главными осями сечения.

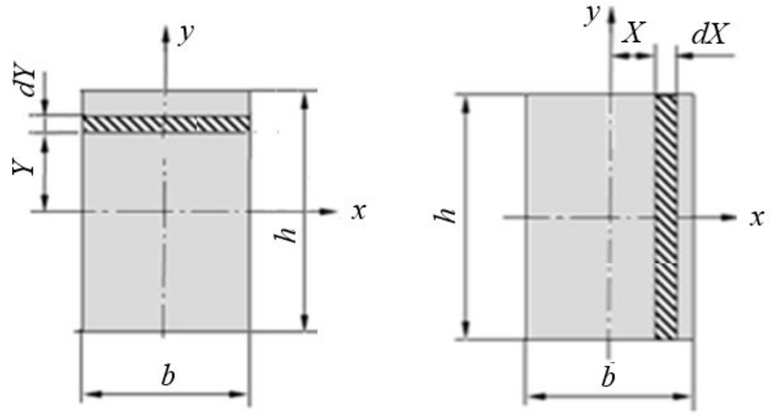


Рис. 3.4. Схемы к определению моментов инерции прямоугольного сечения

Осевые моменты инерции I_X и I_Y прямоугольного сечения равны:

$$I_X = \int_A Y^2 \cdot dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Y^2 \cdot b \cdot dY = \frac{b \cdot h^3}{12}.$$

Аналогично $I_Y = \frac{h \cdot b^3}{12}$.

Полярный момент инерции прямоугольного сечения

$$I_P = I_X + I_Y = \frac{b \cdot h}{12} \cdot (h^2 + b^2).$$

Главные осевые моменты сопротивления равны:

$$W_X = \frac{I_X}{h/2} = \frac{b \cdot h^2}{6}; \qquad W_Y = \frac{I_Y}{b/2} = \frac{h \cdot b^2}{6}.$$

Главные радиусы инерции сечения:

$$i_X = \sqrt{\frac{I_X}{A}} = \frac{h}{\sqrt{12}} \approx 0{,}289\, h,$$
$$i_Y = \sqrt{\frac{I_Y}{A}} = \frac{b}{\sqrt{12}} \approx 0{,}289\, b.$$

Квадратное сечение — частный случай прямоугольного сечения, для которого $b = h$.

Осевые моменты инерции круглого и трубчатого сечений (рис. 3.5) удобнее вычислять через полярный момент инерции сечения.

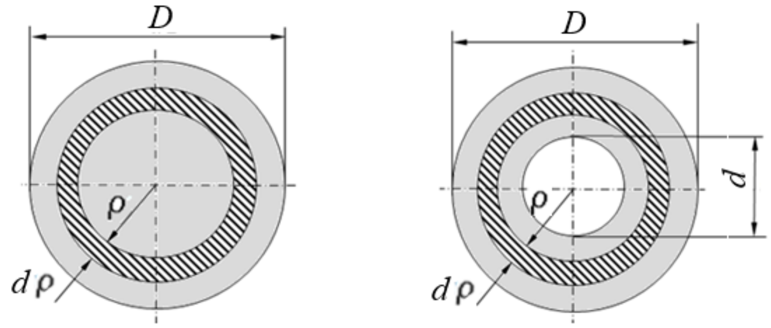


Рис. 3.5. Схемы к определению полярного момента инерции

Полярный момент инерции круглого сечения

$$I_P = \int_A \rho^2 \cdot dA = \int_0^{D/2} \rho^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot d\rho = \frac{\pi \cdot D^4}{32} .$$

Осевые моменты инерции сечения равны по величине и составляют

$$I_X = I_Y = \frac{I_P}{2} = \frac{\pi \cdot D^4}{64}.$$

Полярный момент сопротивления и осевые моменты сопротивления равны:

$$W_P = \frac{I_P}{D/2} = \frac{\pi \cdot D^3}{16}; \qquad W_X = W_Y = \frac{I_P}{2 \cdot D/2} = \frac{\pi \cdot D^3}{32} .$$

Радиусы инерции круглого сечения

$$i_X = i_Y = \frac{D}{4} = 0{,}25\ D.$$

Аналогично определим геометрические характеристики трубчатого сечения при отношении внутреннего диаметра к наружному $\frac{d}{D} = \alpha$.

Полярный момент инерции составляет

$$I_P = \int_A \rho^2 \cdot dA = \int_{d/2}^{D/2} \rho^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot d\rho = \frac{\pi \cdot D^4}{32} - \frac{\pi \cdot d^4}{32} = \frac{\pi D^4}{32}(1 - \alpha^4) .$$

Осевые моменты инерции

$$I_X = I_Y = \frac{I_P}{2} = \frac{\pi \cdot D^4}{64}(1 - \alpha^4).$$

Полярный и осевые моменты сопротивления соответственно равны:

$$W_P = \frac{I_P}{D/2} = \frac{\pi \cdot D^3}{16}(1 - \alpha^4); \qquad W_X = W_Y = \frac{I_P}{2 \cdot D/2} = \frac{\pi \cdot D^3}{32}(1 - \alpha^4) .$$

Радиусы инерции круглого и трубчатого сечений соответственно равны:

$$i_X = i_Y = \frac{D}{4}; \qquad i_X = i_Y = 0{,}25D\sqrt{1+\alpha^2}\,.$$

Формулы для определения характеристик геометрически выстроенных сечений можно найти в справочниках сопромата.

4. МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРИАЛОВ

Механические характеристики материалов определяют экспериментально с высокой степенью достоверности в соответствии с требованиями стандартов (ГОСТов).

Механические характеристики публикуются в учебной и справочной литературе и используются в расчетах элементов конструкций по прочности, жесткости и устойчивости. Назовем некоторые из них:

— предел пропорциональности, устанавливающий границу линейной зависимости между напряжениями и деформациями (в соответствии с законом Гука);

— предел упругости, определяющий зону упругих деформаций;

— модули упругости I рода и II рода, которые характеризуют способность материалов сопротивляться продольным и поперечным деформациям;

— коэффициент Пуассона, который характеризует зависимость между продольной и поперечной относительными деформациями.

Здесь мы приведем порядок исследования механических характеристик низкоуглеродистой стали на растяжение.

4.1. Диаграмма испытания стандартного образца на растяжение

Испытание на растяжение проводят на универсальных или разрывных силовых установках, имеющих специальные захваты. В захваты устанавливают стандартные образцы, форма и размеры которых зависят от рода материала, и производят постепенное увеличение растягивающей силы до разрушения образца.

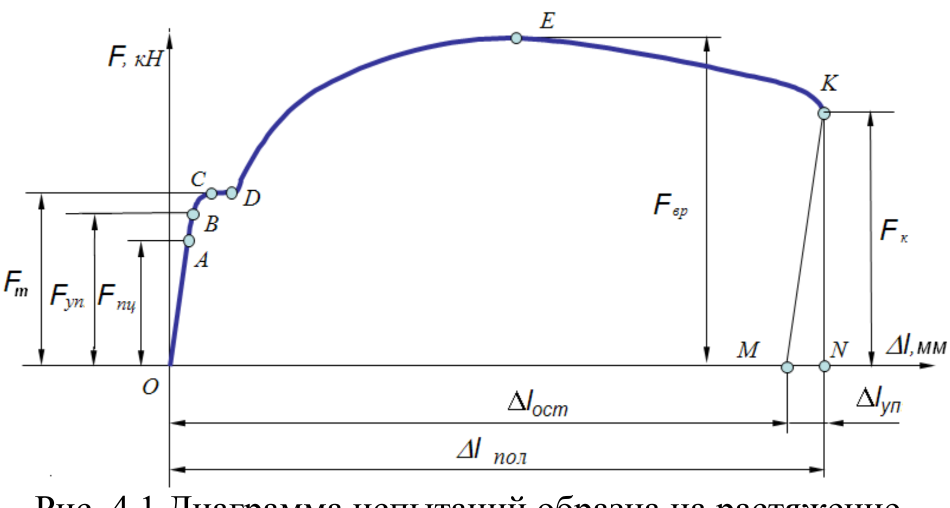


Рис. 4.1 Диаграмма испытаний образца на растяжение

Результаты испытаний получают либо в численном виде, либо в виде диаграммы (рис. 4.1) зависимости между растягивающей силой F и абсолютной деформацией стержня Δl.

На диаграмме можно выделить характерные участки:

OA — участок пропорциональности между силой F и удлинением Δl;

OB — участок упругости (обратимых деформаций);

BC — участок малых пластических (необратимых) деформаций;

CD — участок нарастания пластических деформаций при неизменной силе (участок текучести материала);

DE — участок упрочнения материала;

EK — участок нарастания разрушений.

Нормальные напряжения σ после испытаний вычисляют по формуле

$$\sigma_i = F_i / A_0,$$

где F_i — растягивающая сила в данной точке диаграммы;

A_0 — площадь поперечного сечения рабочего участка образца.

Относительные деформации ε равны отношению

$$\varepsilon_i = \Delta l_i / l_0,$$

где l_0 — начальная длина рабочего участка испытуемого образца.

Рассмотрим напряжения в характерных точках диаграммы испытаний.

Предел пропорциональности $\sigma_{\text{пц}}$ — наибольшее напряжение, при котором наблюдается линейная зависимость между силой и деформацией,

$$\sigma_{\text{пц}} = F_{\text{пц}} / A_0.$$

Предел упругости $\sigma_{\text{упр}}$ — максимальное напряжение, при котором в материале не возникает остаточных деформаций,

$$\sigma_{\text{упр}} = F_{\text{упр}} / A_0.$$

Физический предел текучести $\sigma_{\text{т}}$ — минимальное напряжение, при котором в образце возникают остаточные деформации текучести,

$$\sigma_{\text{т}} = F_{\text{т}} / A_0.$$

Временное сопротивление разрыву $\sigma_{\text{вр}}$ — наибольшее растягивающее напряжение, которое воспринимает образец,

$$\sigma_{\text{вр}} = F_{\text{вр}} / A_0.$$

Предел прочности $\sigma_{\text{пч}}$ — максимальное напряжение, которое может выдержать образец без явных признаков разрушения. Значение предела прочности соответствует временному сопротивлению растяжению $\sigma_{вр}$ для хрупких материалов и пределу текучести $\sigma_т$ для пластичных материалов:

$$\sigma_{пч} = \sigma_{вр}; \qquad \sigma_{пч} = \sigma_т.$$

Условное напряжение разрыва — напряжение в точке *К* диаграммы:

$$\sigma_р^у = F_р / A_0.$$

Истинное напряжение разрыва определяют для образцов, имеющих шейку в месте разрыва ($A_ш$ — площадь сечения шейки)

$$\sigma_р^и = F_р \, / \, A_ш.$$

При более точных испытаниях можно определить другие напряжения, необходимые при расчетах хрупких конструкционных материалов:

— *условный предел пропорциональности* $\sigma_{0,001}$ — наименьшее напряжение, при котором относительная деформация отклоняется от линейной зависимости на величину $\Delta\varepsilon = 0{,}001$ %;

— *условны предел упругости* $\sigma_{0,05}$ — наименьшее напряжение, при котором в материале возникают относительные остаточные деформации $\varepsilon_{ост} = 0{,}05$ % ;

— *условный предел текучести* $\sigma_{0,2}$ — наибольшее напряжение, при котором остаточные деформации не превышают величины $\varepsilon_{ост} \leq 0{,}2$ %.

К характеристикам пластичности относят относительное остаточное удлинение δ образца и относительное остаточное сужение его площади поперечного сечения ψ.

Относительное остаточное удлинение δ — отношение остаточной деформации $\Delta l_{ост}$ образца к его первоначальной длине l_0 выраженное в процентах:

$$\delta = \frac{\Delta l_{ост}}{l_0} 100\,\% .$$

Остаточное удлинение характеризует степень проявления пластических деформаций в материале:

— если $\delta \leq 5$ %, материал считается хрупким;

— если 5 % $< \delta <$ 10 %, материал хрупко-пластичный;

— если $\delta \geq 10$ %, материал считается пластичным.

Относительное остаточное сужение ψ характеризует изменение площади поперечного сечения образца в месте разрыва $A_0 - A_ш$ по сравнению с первоначальной величиной A_0 и выражается в процентах:

$$\psi = \frac{A_0 - A_ш}{A_0} 100\,\% .$$

Модуль упругости I рода (модуль Юнга) определяется как отношение напряжения к относительной деформации в той точки диаграммы, которая попадает в зону пропорциональности (в зону OA) диаграммы:

$$E = {}^{\sigma}/_{\varepsilon}.$$

4.2. Опасные и допускаемые напряжения

Опасным называется напряжение $\sigma_{о}$, при котором конструкция теряет работоспособность и дальше эксплуатироваться не может.

Для конструкций из пластичных материалов причиной потери работоспособности являются большие пластические деформации, поэтому опасное напряжение принято равным физическому пределу текучести

$$\sigma_{о} = \sigma_{т}.$$

Для конструкций из хрупких материалов причиной потери работоспособности является разрушение, которое происходит, как правило, без видимых остаточных деформаций, поэтому в качестве опасного напряжения принимают временное сопротивление материала

$$\sigma_0 = \sigma_{вр}.$$

Под *коэффициентом запаса прочности* понимают величину, указывающую во сколько раз необходимо уменьшить опасное напряжение $\sigma_{о}$, чтобы прочность конструкции или детали была гарантированно обеспечена, а максимальные напряжения в ней не превышали предела пропорциональности $\sigma_{пц}$:

$$S = \sigma_0/\sigma_{пц}.$$

Коэффициент запаса прочности рекомендуется принимать:

— для пластичных материалов $S_{т} = 1{,}25 - 2{,}5$;

— для хрупких материалов $S_{вр} = 2{,}4 - 5{,}0$.

Допускаемыми называют наибольшие напряжения, которые можно допустить в той или иной конструкции при условии обеспечения ее безопасной, надежной и долговечной работы

$$[\sigma] = \frac{\sigma_0}{S}.$$

Для пластичных материалов, имеющих физический предел текучести

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{т}}{S_{т}}.$$

Для пластичных материалов, не имеющих физического предела текучести

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{0,2}}{S_{т}}.$$

Для хрупких материалов

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{вр}}}{S_{\text{вр}}}.$$

5. РАСЧЕТ СТЕРЖНЕЙ НА ДЕЙСТВИЕ ПРОДОЛЬНЫХ СИЛ

При центральном растяжении (сжатии) в поперечных сечениях элемента возникает только одно внутреннее усилие — продольная сила N. Стержень, воспринимающий только продольные силы, в машиностроении принято называть ***брусом.*** На центральное растяжение (сжатие) работают стойки, раскосы, стержни ферм и др.

Продольная сила является равнодействующей внутренних нормальных напряжений, распределение которых по площади поперечного сечения бруса зависит от способа приложения внешних продольных сил, следовательно, может быть неоднородным:

$$N = \int_{\text{A}} \sigma \cdot dA.$$

Для упрощения расчета нормальных напряжений и в соответствии с принципом Сен-Венана, который утверждает, что концентрация напряжений в области передачи внешних сосредоточенных сил носит локальный характер, а на небольшом удалении от нее распределение нормальных напряжений в сечениях бруса становится равномерным, следовательно,

$$N = \sigma \cdot A, \qquad \sigma = \frac{N}{A}.$$

Для определения внутренних продольных сил используется метод сечений, по результатам расчетов строят график, показывающий изменение продольной силы вдоль оси бруса, который называется эпюрой продольных сил. Для выявления опасного сечения с наибольшим нормальным напряжением строят эпюру нормальных напряжений.

5.1. Расчеты на прочность при растяжении (сжатии)

Условие прочности по нормальным напряжениям при растяжении (сжатии) формулируется так: нормальные расчетные напряжения в любом сечении элемента не должны превышать допускаемого значения:

$$\sigma \leq [\sigma].$$

Расчётным называются наибольшее напряжение, вычисленные по теоретическим формулам или полученные экспериментальным путем для элемента конструкции заданного сечения, находящегося под действием системы продольных сил,

$$\sigma = \frac{N}{A}.$$

В сопротивлении материалов могут быть сформулированы и решены инженерные задачи трех типов: проверочный расчёт, проектный расчет, задача по определению предельной несущей способности элемента.

1. *Проверочный расчёт* заключается в проверке выполнения условий прочности, жесткости и устойчивости элемента конструкций при заданных: расчетной схеме, марке материала, размерах сечения.

Задача проверки прочности элемента при растяжении (сжатии) решается неравенством

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma].$$

2. *Проектный расчет* ставит целью определение площади поперечного сечения данного элемента конструкции, исходя из условий безопасной работы его под нагрузкой в наиболее опасном месте. Задача проектного расчета на прочность при растяжении (сжатии) решается неравенством:

$$A \geq \frac{N}{[\sigma]}.$$

3. *Определение несущей способности* (например, максимальной грузоподъёмности) заключается в определении максимальной внутренней продольной силы, которую может выдержать элемент при заданных условиях: расчетной схеме, марке материала, размерах сечения. Задача определения максимальной продольной силы в растянутом (сжатом) элементе решается в виде:

$$[F] \leq [\sigma] \cdot A,$$

где A — площадь поперечного сечения элемента в наиболее тонком (ослабленном) месте.

Порядок расчета бруса:

— определить опорные реакции;

— разделить брус на характерные участки, в пределах которых площадь поперечного сечения бруса и внутренние усилия не изменяются;

— на каждом характерном участке методом сечений определить значение продольной силы как алгебраической суммы внешних сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения;

— построить эпюру продольных сил;

— в зависимости от типа решаемой задачи выполнить проверочный расчет, проектный расчет или расчет по несущей способности;

— построить эпюру нормальных напряжений;

— определить относительные деформации бруса на каждом характерном участке и сравнить их с допускаемыми значениями, при необходимости построить эпюру абсолютных деформаций бруса.

5.2. Деформации при центральном растяжении (сжатии)

Для получения формулы расчета продольной деформации используем закон Гука, согласно которому нормальные напряжения в упругом стержне прямо пропорциональны относительным деформациям стержня

$$\sigma = E \cdot \varepsilon.$$

Относительная продольная деформация однородного участка бруса может быть определена соотношениями

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{E \cdot A}.$$

Отсюда следует

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} = \frac{\sigma \cdot l}{E}.$$

Произведение модуля упругости материала E на площадь поперечного сечения A называют ***жесткостью поперечного сечения*** однородного бруса или участка ступенчатого бруса

$$C = E \cdot A.$$

Если брус имеет несколько характерных участков с разной жесткостью, то абсолютное удлинение (укорочение) бруса определяют как алгебраическую сумму деформаций каждого из характерных участков:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i \cdot l_i}{E \cdot A_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma_i \cdot l_i}{E}.$$

6. НАПРЯЖЕННО–ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ

В сопротивлении материалов не учитывается кристаллическая, дискретная, атомистическая, структура вещества. Материал тела представляет собой сплошную среду, т. е. сплошным образом, непрерывно, заполняет объём тела без пустот, пор и трещин. Тело, непрерывное до деформации, остаётся непрерывным и после деформации.

Пусть твердое тело нагружено системой сил, тогда через любую его точку можно провести бесчисленное множество различно ориентированных площадок, по которым действуют нормальные и касательные напряжения, вызывающие линейные и угловые деформации малого элемента с размерами $dx,\ dy,\ dz$, расположенного вблизи этой точки.

Напряжение — внутренняя сила, приходящаяся на единицу площадки, выделенной в окрестности рассматриваемой точки. *Нормальное напряжение* σ

направлено перпендикулярно единичной площадке. *Касательное напряжение* τ лежит в плоскости площадки.

Рассмотрим напряженное состояние элементарного параллелепипеда — совокупность напряжений, действующих на его боковые грани (рис. 6.1).

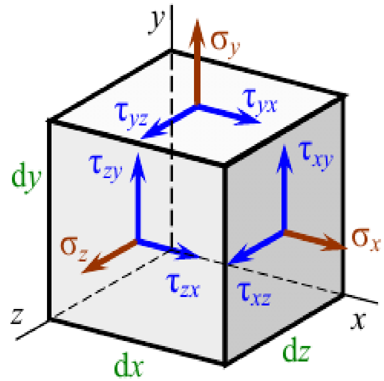


Рис. 6.1. Положительные направления напряжений

Положительное направление нормального напряжения соответствует направлению внешней нормали грани.

Касательное напряжение положительно, если для совпадения с его направлением внешнюю нормаль грани следует повернуть по часовой стрелке. Первый индекс указывает, какой оси параллельна нормаль к площадке, второй индекс — какой оси параллелен вектор напряжения.

Обобщенное напряженное состояние элементарного параллелепипеда записывают в виде тензора напряжений. Тензор — матрица особого рода, которая содержит девять компонентов: три нормальных напряжения и шесть касательных напряжений

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Материал тела представляет собой сплошную среду, т. е. заполняет объём тела без пустот, пор и трещин. С изменением ориентации элементарного параллелепипеда вблизи данной точки, соотношения между нормальными и касательными напряжениями будут изменяться. Следовательно, тензор напряжений вблизи данной точки может изменяться в зависимости от ориентации граней элементарного параллелепипеда.

Можно найти такую ориентацию параллелепипеда, при которой по его граням действуют только нормальные напряжения (рис. 6.2, в).

Количество независимых компонент тензора в этом случае уменьшается до трех главных напряжений

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}.$$

Площадки, в которых касательные напряжения равны нулю, называются *главными площадкам.* Нормальные напряжения, действующие на главных площадках, называются *главными напряжениями.* Главные напряжения принято обозначать σ_1, σ_2 и σ_3, при этом σ_1 — наибольшее, σ_2 — промежуточное главное напряжение, а σ_3 — наименьшее нормальное напряжение:

$$\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3.$$

Вид напряженного состояния зависит от числа главных напряжений (рис. 6.2).

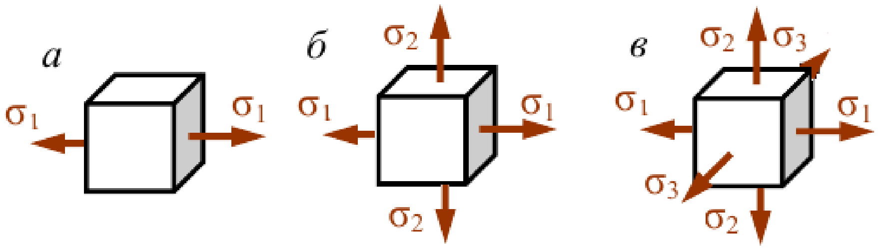


Рис. 6.2. Виды напряженных состояний: а — линейное (одноосное); б — плоское (двухосное); в — объемное (трехосное)

6.1. Линейное напряженное состояние

Рассмотрим простейший случай напряженного состояния — растяжение стержня. Сравним напряжения, возникающие в нормальном *m-m* и наклонном *n-n* сечениях (рис. 6.3).

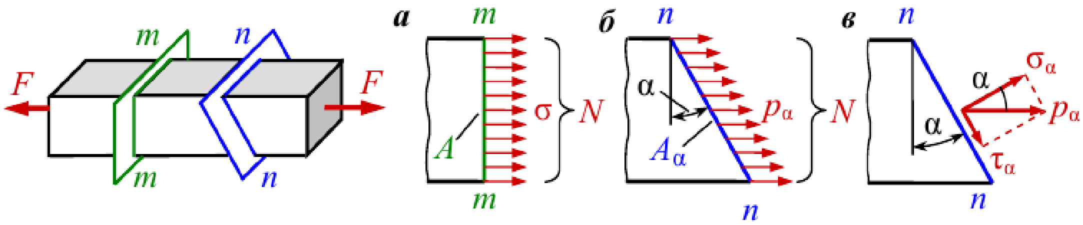


Рис. 6.3. Распределение напряжений в сечениях растянутого стержня: а — в нормальном сечении; б и в — наклонном сечении

Площадь A_α наклонного сечения больше площади A сечения, перпендикулярного оси стержня: $A_\alpha = A/\cos\alpha$.

Полное напряжение в наклонном сечении

$$p_\alpha = \frac{N}{A_\alpha} = \frac{N \cdot \cos\alpha}{A} = \sigma \cdot \cos\alpha < \sigma.$$

Нормальное и касательное напряжения в наклонном сечении:

$$\sigma_\alpha = p_\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{N \cdot \cos^2\alpha}{A} = \sigma \cdot \cos^2\alpha\,;$$
$$\tau_\alpha = p_\alpha \cdot \sin\alpha = \frac{N \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha}{A} = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\alpha.$$

Таким образом, нормальное и касательное напряжения в наклонных площадках меньше нормального напряжения σ в поперечном сечении стержня, следовательно, менее опасны:

$$\sigma_\alpha = \sigma \cdot \cos^2 \alpha\,; \qquad \tau_\alpha = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\alpha.$$

Напряжения в наклонных площадках зависят от угла α.

Определим углы наклона площадок, в которых возникают экстремальные значения нормальных и касательных напряжений:

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -\,2\sigma \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha = -\,\sigma \cdot \sin 2\alpha = 0\,;$$

$$\frac{d\tau_\alpha}{d\alpha} = \sigma \cdot \cos 2\alpha = 0.$$

Нормальные напряжения максимальны в площадках, перпендикулярных оси растянутого стержня ($\sin 2\alpha = 0, \rightarrow \alpha = 0$), следовательно, они являются главными.

Касательные напряжения максимальны в наклонных площадках с углом наклона 45^0, для которых $\cos 2\alpha = 0, \rightarrow 2\alpha = 90^0$,

$$\tau_{max} = \frac{\sigma}{2}.$$

Полученное соотношение объясняет связь между допускаемыми касательными и нормальными напряжениями: $[\tau] = 0{,}5[\sigma]$.

Зависимость используют в расчетах при кручении и сдвиге.

Тензоры напряжений, соответствующие одноосному напряженному состоянию растяжения и сжатия имеют вид:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad T_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}.$$

6.2. Плоское напряженное состояние

Рассмотрим плоское напряженное состояние элемента объема при действии главных напряжений σ_1 и σ_2 (рис. 6.4, а).

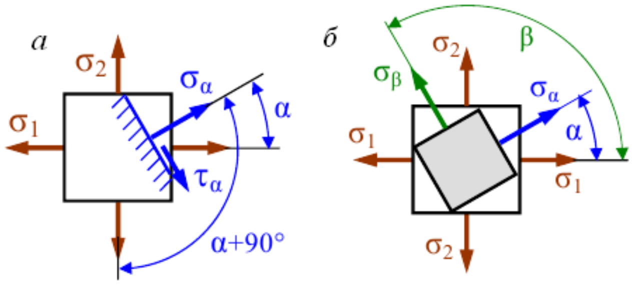


Рис. 6.4. Нормальные и касательные напряжения в наклонном сечении (*а*) и в перпендикулярном ему сечении (б)

Если к выделенному элементу приложено только главное напряжение σ_1, то нормальное напряжение в наклонной площадке с углом наклона α определяется ранее полученным выражением:

$$\sigma_\alpha^* = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha.$$

Если к выделенному элементу приложено только главное напряжение σ_2, то нормальное напряжение в этой наклонной площадке соответственно равно (рис. 6.4, б)

$$\sigma_\alpha^{**} = \sigma_2 \cdot \cos^2(90^0 + \alpha) = \sigma_2 \cdot sin^2 \alpha.$$

В соответствии с принципом суперпозиции получаем

$$\sigma_\alpha = \sigma_\alpha^* + \sigma_\alpha^{**} = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha.$$

Полное касательное напряжение

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1}{2} \cdot \sin 2\alpha - \frac{\sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha.$$

Определяем экстремальные значения нормальных и касательных напряжений, используя условия:

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = 0; \qquad \frac{d\tau_\alpha}{d\alpha} = 0.$$

Отсюда следует, что наибольшее нормальное напряжение действует по главной площадке и равно главному напряжению, наибольшее касательное напряжение действует по наклонной (с углом наклона 45^0) площадке:

$$\sigma_{max} = \sigma_1 \ \text{ при } \alpha = 0, \qquad \tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \ \text{ при } \alpha = 45^0.$$

Площадки, по которым касательные напряжения имеют наибольшие значения, называются *площадками сдвига*. Рассмотрим площадку, расположенную под углом $\beta = \alpha + 90^0$ (рис. 6.4, б):

$$\sigma_\beta = \sigma_1 \cdot \cos^2 \beta + \sigma_2 \cdot \sin^2 \beta \,,$$
$$\sigma_\beta = \sigma_1 \cdot \cos^2(\alpha + 90^0) + \sigma_2 \cdot \sin^2(\alpha + 90^0) \,,$$
$$\sigma_\beta = \sigma_1 \cdot \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \cos^2 \alpha \,.$$

Если сложить нормальные напряжения, возникающие на двух взаимно перпендикулярных наклонных площадках, то получаем важную закономерность, не зависящую от величины углов наклона площадок:

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha + \sigma_1 \cdot \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \cos^2 \alpha = \sigma_1 + \sigma_2 \,.$$

Закон постоянства суммы нормальных напряжений: сумма нормальных напряжений, действующих по двум взаимно перпендикулярным площадкам, *инвариантна* по отношению к наклону этих площадок и равна сумме главных напряжений

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 + \sigma_2 .$$

Главные напряжения являются экстремальными значениями нормальных напряжений для данной точки тела

$$\sigma_{\alpha,max} = \sigma_1; \quad \sigma_{\alpha,min} = \sigma_2 .$$

Касательные напряжения, действующие на взаимно перпендикулярных площадках элементарного параллелепипеда соответственно равны:

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha, \qquad \tau_\beta = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha .$$

Закон парности касательных напряжений: если по какой-либо площадке действует касательное напряжение, то по перпендикулярной ей площадке будет действовать касательное напряжение равное ему по величине и противоположное по знаку

$$\tau_\alpha = -\tau_\beta.$$

Максимальные касательные напряжения действуют по площадкам, расположенным под углом 45^0 к главным площадкам

$$\tau_{\alpha,max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} .$$

Решая обратную задачу технической механики, можно определить *главные напряжения* в элементарном элементе упругого тела по формулам:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_\alpha - \sigma_\beta\right)^2 + 4\tau_\alpha^2} ;$$
$$\sigma_2 = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_\alpha - \sigma_\beta\right)^2 + 4\tau_\alpha^2} .$$

Положения главных площадок находим по формуле

$$tg 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_\alpha}{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}.$$

Знак минус показывает направление поворота главной нормали по часовой стрелке, знак плюс — дает поворот против часовой стрелки.

6.3. Объемное напряженное состояние

Напряженное состояние называется *объемным* (пространственным), если три главных напряжения отличны от нуля. Для исследования объемного напряженного состояния вблизи данной точки тела мысленно выделяем вблизи этой точки элементарный параллелепипед (кубик) с гранями, параллельными главным площадкам.

Рассмотрим последовательно наклонные площадки, расположенные параллельно одному из главных напряжений. Речь идет о наклонной площадке L_I (рис. 6.5, а), расположенной параллельно главному напряжению σ_3 а также о наклонных площадках L_{II} (рис. 6.5, б) и L_{III} (рис. 6.5, в) соответственно параллельные напряжениям σ_1 и σ_2.

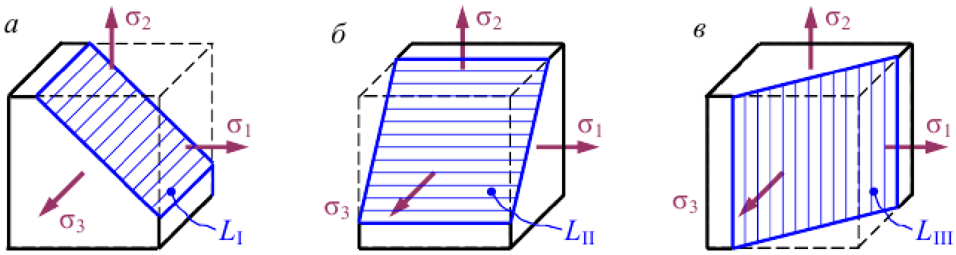


Рис. 6.5. Наклонные площадки, параллельные одному из главных напряжений для исследования объемных напряжений

Величины действующих в них напряжений не зависят от главного напряжения, параллельного площадке, следовательно, для каждой из площадок справедливы ранее полученные уравнения плоского напряженного состояния.

После математических преобразований, которые здесь не приведены, получаем нормальное и касательное напряжения, которые действуют в произвольной наклонной площадке с нормалью, ориентированной под углами α_1, α_2 и α_3 относительно соответствующих главных направлений:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cdot \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cdot \cos^2 \alpha_3\,;$$

$$\tau_\alpha = \sqrt{{\sigma_1}^2 \cdot \cos^2 \alpha_1 + {\sigma_2}^2 \cdot \cos^2 \alpha_2 + {\sigma_3}^2 \cdot \cos^2 \alpha_3 - {\sigma_\alpha}^2}.$$

Аналогично плоскому напряженному состоянию, сумма нормальных напряжений, действующих по любым трем взаимно перпендикулярным площадкам, проходящим через рассматриваемую точку, есть величина постоянная, равная $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$.

Наибольшие касательные напряжения действуют по площадкам, параллельным главному напряжению σ_2 под углом 45° к главным напряжениям σ_1 и σ_3

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

6.4. Понятия о теориях (гипотезах) прочности

Тензор напряжений содержит девять компонентов, из которых шесть независимы. Задача теории прочности заключается в сведении шести компонентов тензора напряжений к одному эквивалентному напряжению, которое удобно сопоставить с допускаемым значением.

Опасные состояния для пластичных материалов в момент появления значительных остаточных деформаций (рис. 4.1), а также для хрупких материалов в момент появления трещин, лежат вблизи границы упругости, что позволяет использовать закон Гука для уравнений теории прочности.

1. Гипотеза наибольших нормальных напряжений Г. Галилея (1638 г.) связывает хрупкое разрушение с наибольшим растягивающим главным напряжением. Считается, что прочность твердого материала будет обеспечена, если наибольшее главное растягивающее напряжение $\sigma_1 > 0$ сложного напряженного состояния ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$) не превышает допускаемого значения:

$$\sigma_{\text{экв}(I)} = \sigma_1 \leq [\sigma].$$

2. Гипотеза наибольших линейных деформаций Э. Мариотта (1684 г.) утверждает: хрупкое разрушение наступает при достижении максимальной относительной деформацией ε_1 в окрестности рассматриваемой точки предельной величины

$$\varepsilon_{max} \leq [\varepsilon].$$

Если в одном из главных направлений происходит продольная деформация растяжения, то, согласно эффекту Пуассона, в поперечных направлениях наблюдаются деформации сжатия. Таким образом, в каждом из трех главных направлений осуществляется одна продольная и две поперечные деформации. Результирующие деформации каждого из главных направлений, согласно закону Гука, соответственно равны:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)];$$
$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}[\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)];$$
$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)].$$

Рассмотрим первое уравнение обобщенного закона Гука:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \leq [\varepsilon].$$

Для линейного напряженного состояния

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \text{ тогда } [\varepsilon] = \frac{[\sigma]}{E}.$$

Отсюда получаем:

$$\sigma_{\text{экв}II} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma].$$

Гипотеза не отвечает большинству опытных данных, поэтому в настоящее время не применяется в расчетах на прочность.

3. Гипотеза наибольших касательных напряжений Ш. Кулона (1773 г.) утверждает: причиной возникновения текучести и вязкого разрушения материала являются наибольшие касательные напряжения:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leq [\tau].$$

Для линейного напряженного состояния

$$\tau_{max} = \frac{\sigma}{2}, \text{ следовательно, } [\tau] = \frac{[\sigma]}{2}.$$

Подставляем в исходное неравенство и получаем

$$\sigma_{\text{экв}III} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma].$$

Гипотеза не содержит главных напряжений σ_2, однако подтверждается экспериментом и широко применяется при расчетах тел, изготовленных из пластичных материалов.

4. Энергетическая теория прочности Дж. К. Максвелла (1856 г.) и Р. Мизеса (1913 г.) предполагает: причиной текучести или объемного вязкого разрушения в окрестности рассматриваемой точки является энергия изменения формы, которая не должна превышать допускаемого значения, определенного при простом растяжении ($u_{\text{ф}} \leq [u]$). Условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{\text{экв}IV} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma].$$

Третья и четвертая теории применяются для пластичных материалов, которые одинаково сопротивляются одноосному растяжению и сжатию.

В настоящее время не существует универсального критерия прочности. Каждый из существующих критериев находит ограниченное применение: для материала конкретного вида и узкого диапазона напряженных состояний. Например, критерий Ю. И. Ягна применяют для проверки прочности чугуна, некоторых цветных металлов и поливинилхлорида. Критерий В. П. Сдобырева — для оценки длительной прочности жаропрочных сталей, критерий И. И. Гольденблатта и В. А. Копнова — для плоского напряженного состояния в термопластах и анизотропных материалах, критерий Л. К. Лукши (1978 г.) — для двухосного сжатия бетонов.

7. РАСЧЕТ СОЕДИНЕНИЙ НА СРЕЗ (СДВИГ) И СМЯТИЕ

7.1. Напряжения при сдвиге

Деформация, при которой в поперечном сечении стержня действует один силовой фактор — поперечная сила Q, *называется сдвигом.*

Деформация сдвига характеризуется взаимным смещением параллельных слоев материала под действием приложенных сил при неизменном расстоянии между слоями (рис. 7.1).

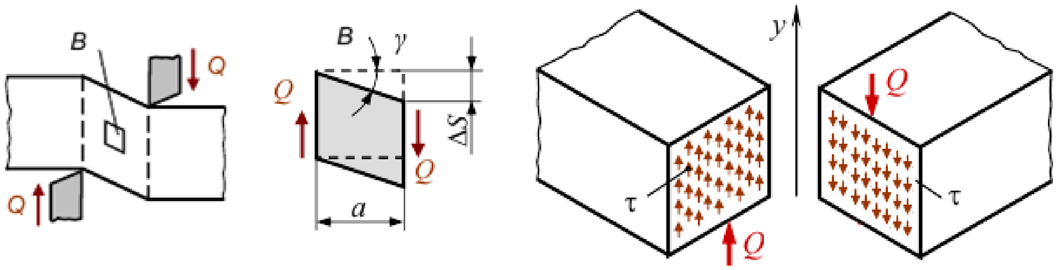


Рис. 7.1. Механизм возникновения деформаций и напряжений сдвига

Поперечная сила Q является равнодействующей внутренних касательных напряжений, распределенных по площади A поперечного сечения стержня:

$$Q = \int_{\mathrm{A}} \tau \cdot dA.$$

Среднее значение касательных напряжений, действующих в поперечном сечении стержня при сдвиге, определяется по формуле

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{Q}{A}.$$

Малое поперечное смещение ΔS под действием поперечной силы Q правого сечения стержня относительно левого ΔS называется *абсолютным сдвигом*. Малый угол γ (в радианах), который образуется, вследствие деформации сдвига, называется *углом сдвига. Относительный сдвиг* численно равен углу сдвига

$$\gamma \approx tg\gamma = \frac{\Delta S}{a}.$$

В соответствии с законом Гука касательные напряжения, возникающие в поперечном сечении стержня при сдвиге, прямо пропорциональны относительному сдвигу:

$$\tau = G \cdot \gamma,$$

где G — модуль сдвига.

Модулем сдвига G или модулем упругости II рода называется физическая величина, характеризующая способность материала сопротивляться упругим угловым деформациям, вызванным действием касательных напряжений. Модуль сдвига G, модуль упругости E и коэффициент Пуассона μ связаны между собой равенством:

$$G = \frac{E}{(1+\mu)}.$$

Пусть при сдвиге по граням выделенного элемента B действуют только касательные напряжения $\tau_{yz} = -\tau_{zy}$ (рис. 7.2).

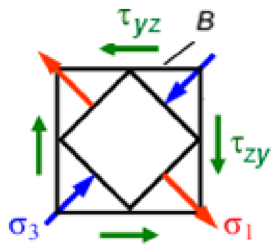


Рис. 7.2. Распределение напряжений в плоском элементе стержня

В данном случае по граням элемента действуют только касательные напряжения, следовательно, имеет место *чистый сдвиг.*

Определим положения главных площадок по отношению к направлению касательных напряжений чистого сдвига:

$$tg2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{zy}}{\sigma_y - \sigma_z} = \infty, \quad 2\alpha_0 = 90^0, \qquad \alpha_0 = 45^0.$$

Главные площадки расположены под углом 45^0, главные напряжения равны

$$\sigma_{max,\ min} = \sigma_{1,\ 3} = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\frac{(\sigma_y - \sigma_z)^2}{4} + \tau_{yz}^2} = \pm\tau_{yz}.$$

Для деталей, работающих на срез (болты, заклепки, шпонки и др.), средние значения касательных напряжений не должны превышать допускаемых значений:

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{Q}{A} \leq [\tau].$$

Допускаемые напряжения $[\tau]$ зависят от свойств материала:

— для хрупких материалов в соответствии с первой теорией прочности

$$\sigma_{\text{экв}(I)} = \sigma_1 \leq [\sigma],$$

но поскольку $\sigma_1 = \tau$, то $[\tau] = [\sigma]$.

— для пластичных материалов в соответствии с третьей теорией прочности:

$$\sigma_{\text{экв}}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma],$$

где $\sigma_1 = \tau$,

$\sigma_3 = -\tau$,

отсюда следует $\qquad 2[\tau] = [\sigma] \qquad [\tau] = 0{,}5 \cdot [\sigma]$.

— для пластичных материалов в соответствии с четвертой теорией прочности (при $\sigma_2 = 0$) имеем:

$$\sigma_{\text{экв}}^{IV} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1)^2 + (-\sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sqrt{\frac{1}{2}[\tau^2 + \tau^2 + 4\tau^2]},$$

$$\sqrt{3}\,\tau \le [\sigma], \qquad [\tau] = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot [\sigma] = 0{,}587 \cdot [\sigma], \qquad [\tau] \approx 0{,}6 \cdot [\sigma].$$

Таким образом, для деталей из пластичных материалов, работающих на срез (болты, заклепки, шпонки и др.)

$$[\tau] = (0{,}5 - 0{,}6) \cdot [\sigma].$$

7.2. Условие прочности при смятии

Смятие — вид местной пластической деформации, возникающей в местах контакта твердых тел при сжатии (рис. 7.3).

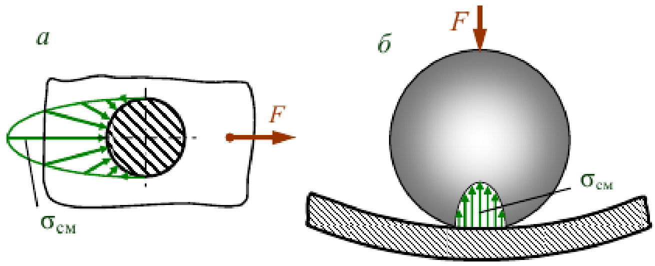


Рис. 7.3. Распределение напряжений смятия под заклепкой (а) и в подшипнике (б)

Смятие наблюдается в различных соединениях, является технологическим процессом холодной и горячей обработки металлов: прокатки, вальцовки, ковки.

Размеры участка смятия зависят от рода материала, величины действующей силы, времени ее действия, температуры и др. факторов.

В большинстве случаев давления смятия распределяются неравномерно по площадке смятия, однако, в практике проектирования, используют условное (среднее) его значение, которое получается отношением действующей силы к площади смятия, перпендикулярной силе. Например, форма площадки смятия металла под заклепкой — прямоугольник, стороны которого равны диаметру заклепки d и толщине t наиболее тонкого из соединяемых слоев.

Величину средних напряжений смятия в соединениях конструкций ограничивают допускаемым напряжением смятия $[\sigma_{\text{см}}]$:

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{F}{A_{\text{см}}} \le [\sigma_{\text{см}}].$$

7.3. Расчет болтовых и заклепочных соединений

Болтовые и заклепочные соединения рассчитывают на прочность по касательным напряжениям (на срез), а затем выполняют проверочный расчет соединения по нормальным напряжениям (на смятие). Соединения на болтах и заклепках осуществляют внахлест без накладок или с накладками (рис. 7.4).

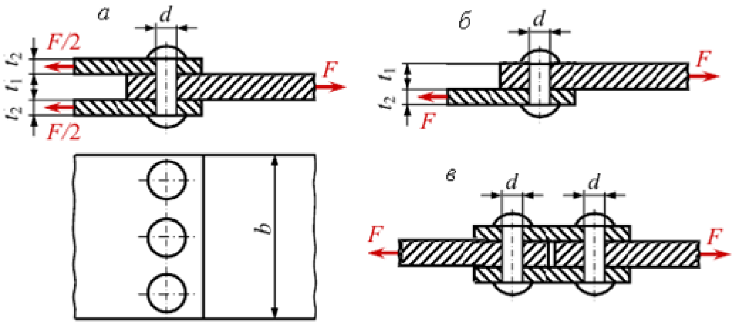


Рис. 7.4. Соединения внахлест без накладок (*а, б*) и с накладками (*в*)

При расчете на срез и смятие болтовых и заклепочных соединений используют следующие допущения:

1. нагрузка равномерно распределяется между рядами и отдельными болтами или заклепками в ряду;
2. силы трения между соединяемыми деталями в расчете не учитывают;
3. изгибающий момент болта или заклёпки, вызванный действием сдвигающей силой, незначителен, поэтому в расчете не учитывается;
4. напряжения среза распределяются равномерно по площади поперечного сечения болта или заклепки;
5. напряжения смятия распределяются равномерно по проекции цилиндрической поверхности контакта на диаметральную плоскость.

Проверочный расчет заключается в проверках прочности соединения:

$$\tau = \frac{F}{A_{\text{ср}}} = \frac{4F}{\pi \cdot d_1^2 \cdot n \cdot m} \leq [\tau];$$

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{F}{A_{\text{см}}} = \frac{F}{d \cdot t_{min} \cdot n} \leq [\sigma_{\text{см}}],$$

где d и d_1 — наружный и внутренний диаметры резьбы болта (для заклепок d);

n — число болтов (заклепок);

m — число плоскостей среза.

Проектный расчет заключается в определении требуемого количества болтов (заклепок) в соединении. Окончательно принимают наибольшее из полученных значений.

$$n_{\text{ср}} = \frac{4F}{\pi \cdot d_1^2 \cdot m \cdot [\tau]};$$

$$n_{\text{см}} = \frac{F}{d \cdot t_{min} \cdot [\sigma_{\text{см}}]}.$$

Проверку прочности на разрыв проводят в сечении, ослабленном рядом отверстий под болты или заклепки (рис. 7.5),

$$\sigma = \frac{F}{A_{\text{нт}}} \leq [\sigma],$$

где $A_{\text{нт}} = (b \cdot t_{min} - A_{\text{отв}})$ — площадь нетто опасного сечения пластины.

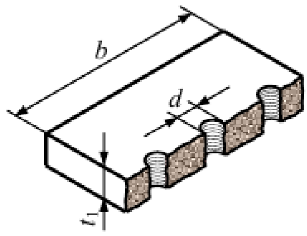


Рис. 7.5. Наиболее опасное сечение пластины

7.4. Расчет сварных соединений

Чаще всего сворные швы выполняют внахлест. В зависимости от расположения сварного шва относительно действующей силы различают: лобовой шов, фланговый шов и косой шов (рис. 7.6).

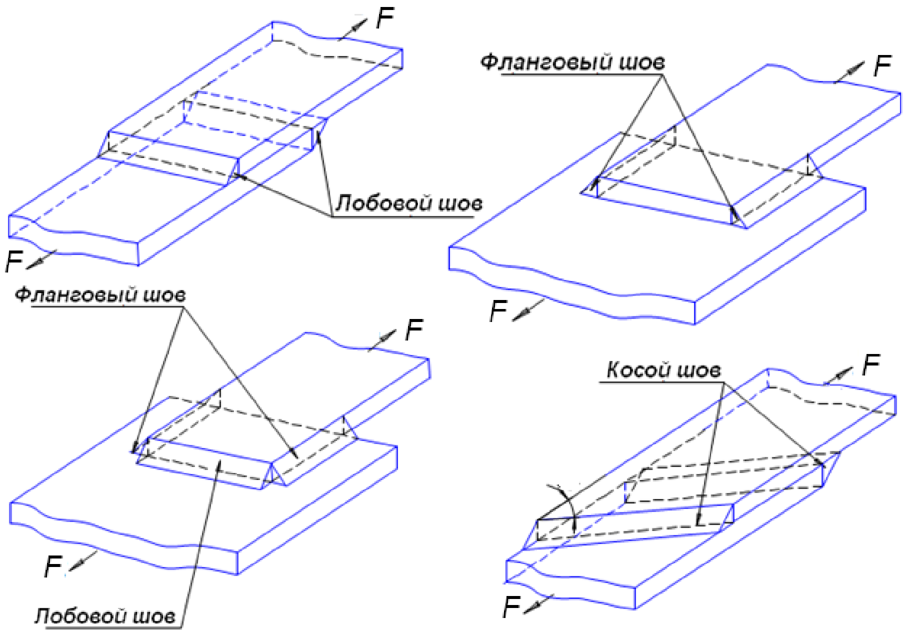


Рис. 7.6. Виды сварных швов внахлест

Фланговые швы считаются более вязкими, они разрушаются после значительных остаточных деформаций. Лобовые швы разрушаются при малых остаточных деформациях и плохо сопротивляются повторным и ударным нагрузкам.

Допущения при расчете сварных швов:

1. нормальные напряжения оказывают незначительное влияние на прочность шва, поэтому их можно не учитывать;
2. касательные напряжения равномерно распределены по сечению шва;
3. сечение шва имеет вид прямоугольного равнобедренного треугольника;
4. опасное сечение совпадает с биссектрисой прямого угла (рис. 7.7).

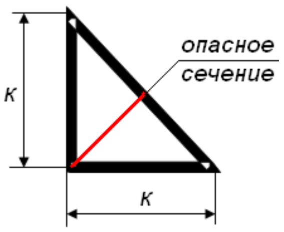


Рис. 7.7. Форма сечения сварного шва и опасное сечение

Проверочный расчет сварного шва:

$$\tau = \frac{F}{A_{\text{ср}}} = \frac{F}{0,7k \cdot (l_{\text{ф}} + l_{\text{л}})} \le [\tau_{\text{св}}],$$

где $[\tau_{\text{св}}]$ — допускаемое напряжение среза для сварного шва, которое принимается равным:

$[\tau_{\text{св}}] = 0{,}65\ [\sigma]$ при автоматической дуговой сварке;

$[\tau_{\text{св}}] = 0{,}6\ [\sigma]$ при ручной дуговой сварке;

Проектный расчет сварного шва:

$$l \ge \frac{F}{0,7k \cdot [\tau_{\text{св}}]}.$$

8. РАБОТА СТЕРЖНЕЙ НА КРУЧЕНИЕ

Кручением называют вид деформации, при котором в поперечном сечении стержня действует только один внутренний силовой фактор — крутящий момент. Стержень, в поперечном сечении которого действует крутящий момент, называется *валом.*

Внутренний крутящий момент в рассматриваемом сечении равен алгебраической сумме внешних крутящих моментов, приложенных к валу по одну сторону от сечения.

В расчетах на прочность и жесткость знак крутящего момента особого значения не имеет, но для построения эпюр положительным удобно считать внутренний крутящий момент, направленный по ходу часовой стрелки при взгляде со стороны внешней нормали к сечению (рис. 8.1).

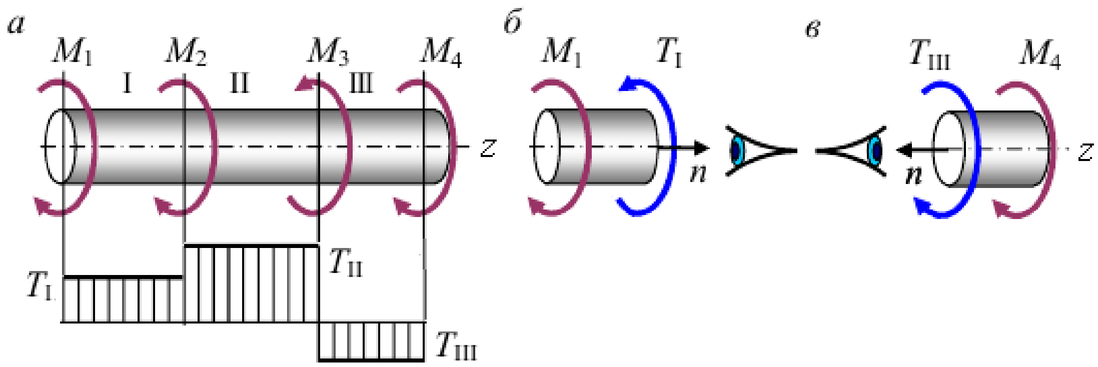


Рис. 8.1. Эпюра крутящих моментов вала (а), правило знаков (б, в)

Внутренний положительный крутящий момент противоположен внешним крутящим моментам, что удобно при составлении уравнений равновесия:

$\sum M_{z,\ I} = 0;$ $M_1 - T_I = 0;$ $T_I = M_1;$

$\sum M_{z,\ II} = 0;$ $M_1 + M_2 - T_{II} = 0;$ $T_{II} = M_1 + M_2;$

$\sum M_{z,\ III} = 0;$ $-M_4 - T_{III} = 0;$ $T_{III} = -M_4.$

Валы, обычно имеют круглое или кольцевое поперечное сечения. Основные допущения теории деформаций кручения:

1. поперечные сечения вала, плоские и нормальные к его оси до деформации, остаются плоскими и нормальными к оси, и после деформации;
2. деформации кручения не влияют на форму и размеры поперечного сечения вала;
3. расстояния между поперечными сечениями также не изменяются.

8.1. Напряжения и деформации кручения

При кручении возникают касательные напряжения сдвига, которые подчиняются закону Гука:

$$\tau = G \cdot \gamma,$$

где G — модуль сдвига материала;

γ — относительные деформации сдвига.

Рассмотрим элемент цилиндрического вала (рис. 8.2) длиной dz и радиусом ρ. В результате деформации кручения сечение получает угловой поворот $d\varphi$, при этом образующая цилиндрической поверхности отклоняется от исходного положения на угол γ, который можно вычислить из зависимости

$$dS = \gamma \cdot dz = \rho \cdot d\varphi; \qquad \gamma = \frac{d\varphi}{dz} \cdot \rho.$$

Из закона Гука следует, что касательные напряжения в поперечных сечениях вала распределены по линейному закону, их значение прямо пропорционально расстоянию от данной точки до центра сечения

$$\tau = G \cdot \frac{d\varphi}{dz} \cdot \rho = G \cdot \theta \cdot \rho,$$

здесь $\theta = \frac{d\varphi}{dz}$ — относительный угол закручивания элементарного участка.

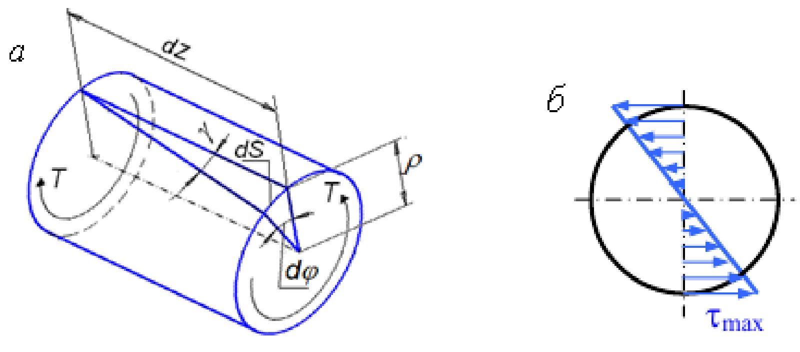


Рис. 8.2. Деформации элемента вала (а), распределение касательных напряжений (б)

Касательные напряжения в каждой точке поперечного сечения вала направлены перпендикулярно радиусу, соединяющему эту точку с центром сечения.

Внутренний крутящий момент можно выразить через полярный момент инерции $I_p = \int_A \rho^2 \cdot dA$:

$$T = \int_A \tau \cdot \rho \cdot dA = \int_A G \cdot \frac{d\varphi}{dz} \cdot \rho^2 \cdot dA = G \cdot \frac{d\varphi}{dz} \int_A \rho^2 \cdot dA = G \cdot \frac{d\varphi}{dz} \cdot I_p.$$

Отсюда получаем относительный угол кручения, который подставляем в закон Гука для кручения:

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{T}{G \cdot I_p}, \qquad \tau = G \cdot \frac{T}{G \cdot I_p} \cdot \rho = \frac{T}{I_p} \cdot \rho.$$

Касательные напряжения в геометрическом центре сечения отсутствуют, а на поверхности вала ($\rho = r$) принимают наибольшие значения (рис. 8.2, б)

$$\tau = \tau_{max} = \frac{T}{I_p} \cdot r = \frac{T}{W_p},$$

где $W_p = \frac{I_p}{r}$ — полярный момент сопротивления.

8.2. Расчеты на прочность и жесткость при кручении

Условие прочности при кручении: наибольшие касательные напряжения вала не должны превышать соответствующих допускаемых значений.

Условие прочности вала при проверочном расчете на кручении можно представить в виде

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_p} \le [\tau].$$

Для вала круглого поперечного сечения

$$I_P = \frac{\pi D^4}{32}, \qquad W_P = \frac{\pi D^3}{16}.$$

Для поперечного сечения вала в форме кольца

$$I_P = \frac{\pi D^4}{32}(1 - \alpha^4), \qquad W_P = \frac{\pi D^3}{16}(1 - \alpha^4),$$

где $\alpha = d/D$ — коэффициент пустотелости сечения.

Проектный расчет предполагает определение диаметра D вала, при котором соблюдается условие его прочности по касательным напряжениям:

— для круглого поперечного сечения

$$D \ge \sqrt[3]{\frac{16\,T}{\pi \cdot [\tau]}};$$

— для сечения в форме кольца с известным коэффициентом α

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16\,T}{\pi \cdot (1-\alpha^4) \cdot [\tau]}}.$$

Наибольший крутящий момент, который способен передавать вал с заданным поперечным сечением, равен

$$T_{max} \leq [\tau] \cdot W_P.$$

Условие жесткости при кручении: наибольший относительный угол закручивания вала не должен превышать соответствующих допускаемых значений

$$\theta_{max} = [\theta],$$

где $[\theta] = 0{,}0045 - 0{,}02$ рад/м — допускаемый относительный угол закручивания.

Абсолютный угол закручивания вала на каждом характерном участке следует из закона Гука

$$\tau = G \cdot \frac{\varphi}{l} \cdot \rho, \qquad \text{где} \qquad \tau = \frac{T}{I_p} \cdot \rho, \rightarrow \varphi = \frac{T \cdot l}{G \cdot I_p}.$$

Суммарный угол закручивания вала на конечном (n) числе участков определяется алгебраической суммой

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \frac{T_i \cdot l_i}{G \cdot I_{pi}}.$$

9. ПЛОСКИЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

Под ***плоским изгибом*** понимают такой вид деформации стержня, при которой в поперечном сечении возникает внутренний изгибающий момент, от действия которого продольная ось прямого стержня претерпевает плоское искривление, а плоская ось кривого стержня изменяет радиус кривизны. Стержень с прямой осью, в поперечном сечении, которого действует изгибающий момент, называется ***балкой***.

Балки, рассматриваемые в сопротивлении материалов должны удовлетворять следующим условиям:

1. сечение балки должны иметь хотя бы одну ось симметрии;
2. все внешние силы должны лежать в плоскости симметрии балки или в главной плоскости балки (рис. 9.1).

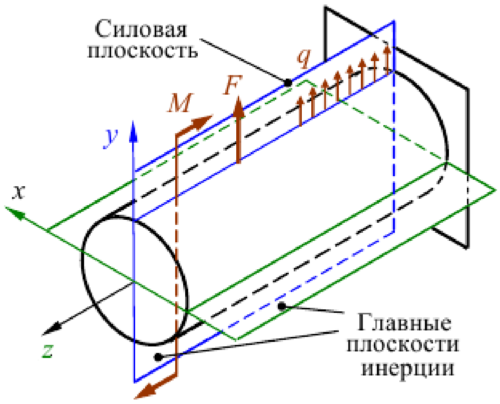


Рис. 9.1. Расположение силовой плоскости и плоскостей симметрии балки

Различают два вида плоского изгиба: чистый и поперечный изгиб.

При ***чистом изгибе*** в поперечных сечениях балки действует только один силовой фактор — изгибающий момент (рис. 9.2).

Под плоским ***поперечным изгибом*** понимают такой вид деформации, при которой в поперечном сечении балки действуют два силовых фактора: изгибающий момент M и поперечная сила Q.

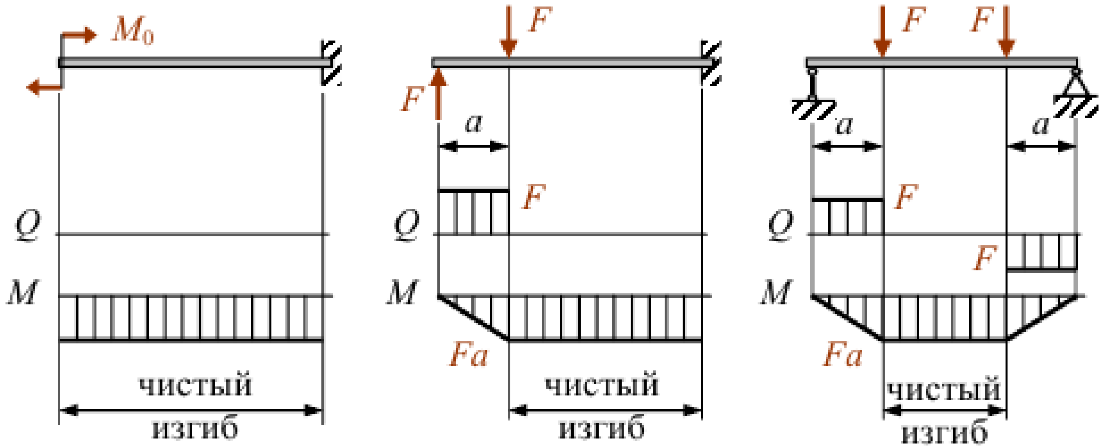


Рис. 9.2. Схемы балок с зонами чистого изгиба

Поперечная сила Q считается положительной, если равнодействующая внешних сил, приложенная слева от выбранного сечения направлена вверх и отрицательной, если она направлена вниз (рис. 9.3).

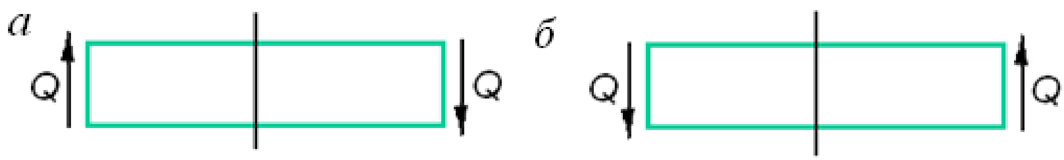


Рис. 9.3. Положительные (*а*) и отрицательные (*б*) направления поперечной силы

Изгибающий момент считается положительным, если он вызывает сжатие верхней части балки и растяжение нижней части (рис. 9.4).

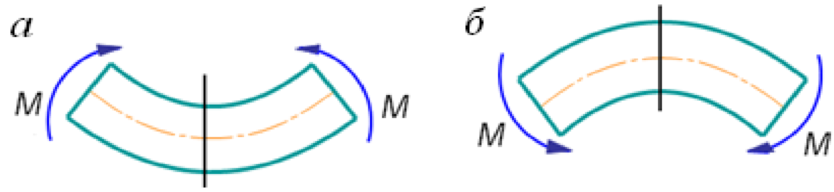


Рис. 9.4. Положительные (*а*) и отрицательные (*б*) направления изгибающего момента

Положительные значения изгибающего момента на эпюре обычно строят со стороны сжатой зоны сечения, но удобнее со стороны растянутой.

Для определения изгибающего момента M и поперечной силы Q в балке, подверженной поперечному изгибу, используют ***метод сечений*** (рис. 9.5):

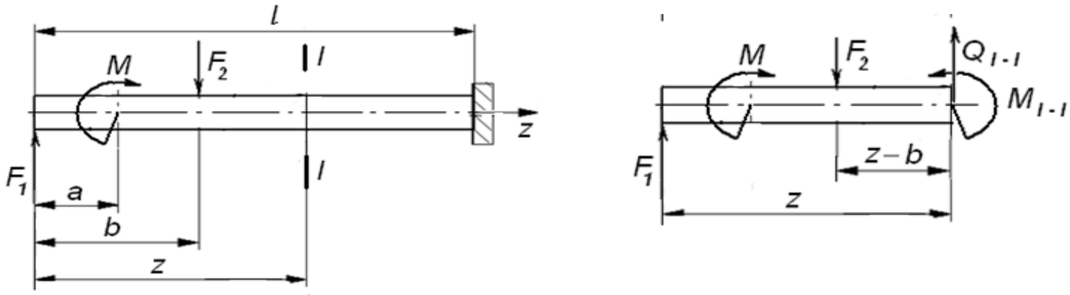


Рис. 9.5. Применение метода сечений к определению внутренних усилий балки

— изгибающий момент в любом сечении балки равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения

$$M_{I-I} = F_1 \cdot z + M - F_2(z - b);$$

— поперечная сила в сечении равна сумме проекций на нормаль к оси балки всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения

$$Q_{I-I} = F_1 - F_2.$$

9.1. Дифференциальные зависимости при изгибе

Рассмотрим балку (рис. 9.6), находящуюся в равновесии под действием произвольной плоской системы сил. В зоне действия распределенной поперечной нагрузки выделим элемент длиной dz.

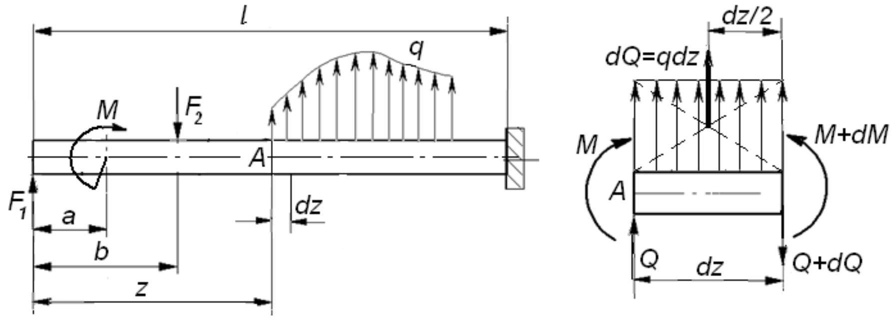


Рис. 9.6. Схема консольной балки, подверженной поперечному изгибу

Выделенный элемент находится в равновесии под действием внутренних и внешних сил, составим для него уравнения равновесия:

$$\sum F_y = 0, \quad Q + q \cdot dz - (Q + dQ) = 0, \qquad \rightarrow \; dQ = q \cdot dz;$$
$$\sum M_{xA} = 0, \quad -M + q \cdot dz \cdot \frac{dz}{2} + (M + dM) - (Q + dQ) \cdot dz = 0.$$

После преобразования второго уравнения равновесия и удаления из него слагаемых второго порядка малости ($q \cdot dz \cdot \frac{dz}{2} \approx 0,\ dQ \cdot dz \approx 0$) получаем:

— первая производная поперечной силы по координате оси балки равна интенсивности распределенной нагрузки, перпендикулярной оси балки

$$q = \frac{dQ}{dz};$$

— первая производная изгибающего момента по координате оси балки равна поперечной силе

$$Q = \frac{dM}{dz};$$

— вторая производная изгибающего момента по координате оси балки равна интенсивности распределенной нагрузки, перпендикулярной к ее оси

$$q = \frac{dQ}{dz} = \frac{d^2M}{dz^2}.$$

Полученные зависимости справедливы для правой системы координат, когда продольная ось z возрастает от левого конца балки к правому. В левой системе координат знаки поперечной силы Q и распределенной нагрузки q противоположные.

9.2. Нормальные напряжения при изгибе

В теории плоского поперечного изгиба приняты следующие допущения:

— при плоском изгибе продольная ось балки искривляется по дуге окружности;

— поперечные сечения балки плоские до изгиба, остаются плоскими и после деформации изгиба (рис. 9.7);

— поперечные сечения балки, перпендикулярные ее оси до деформации остаются перпендикулярными оси и после деформации изгиба.

Определим нормальные напряжения в стержне, подверженном деформации плоского изгиба в результате действия по его концам изгибающих моментов M.

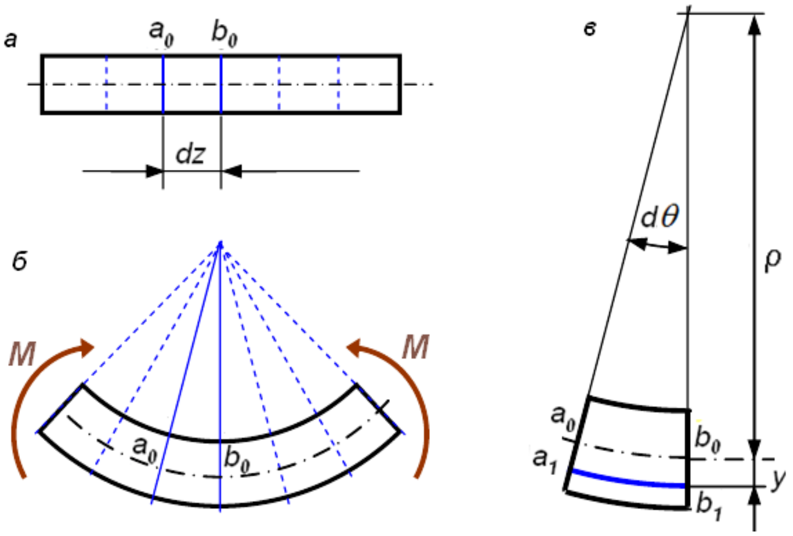


Рис. 9.7. Схема балки до (*а*) и после (*б, в*) деформации чистого изгиба

Задача определения нормальных напряжений при изгибе является статически неопределимой и для ее решения необходимо рассмотреть три стороны задачи:

— статическую;

— геометрическую;

— физическую.

Рассмотрим простейший случай изгиба — ***чистый изгиб***, при котором в балке действует постоянный изгибающий момент, а поперечная сила отсутствует ($dM/dz = 0$).

Совокупность волокон, не изменяющих своей длины при изгибе балки, называется *нейтральным слоем*.

Линия, по которой поперечное сечение балки пересекается с нейтральным слоем балки, называется *нейтральной линией сечения*.

Действующая нагрузка вызывает изгиб балки относительно оси x:

$$M_X = \int_A \sigma \cdot y \cdot dA \neq 0; \qquad M_Y = 0; \qquad Q_Y = 0.$$

Если к балке приложен положительный изгибающий момент, то верхние ее волокна укорачиваются, а нижние удлиняются. Длина нейтрального волокна остается неизменной

$$dz = a_0 b_0 = \rho \cdot d\theta.$$

Длина слоя, смещенного на расстояние y от нейтральной линии равна

$$a_1 b_1 = (\rho + y) \cdot d\theta.$$

Относительная деформация слоя ($a_1 b_1$) составляет

$$\varepsilon = \frac{a_1 b_1 - a_0 b_0}{a_0 b_0} = \frac{y}{\rho}.$$

Продольные относительные деформации вызывают, в соответствии с законом Гука, нормальные напряжения в балке (рис. 9.8)

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = \frac{E}{\rho} \cdot y.$$

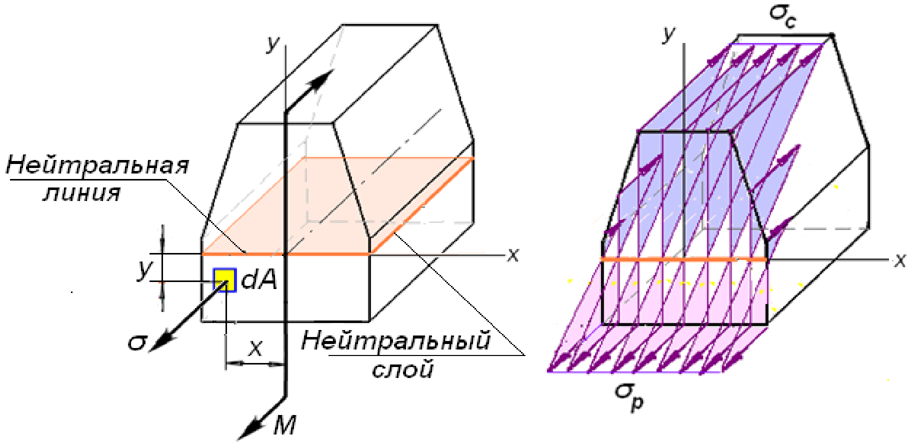


Рис. 9.8. Схема распределения нормальных напряжений в сечении балки

Представим внутренний изгибающий момент через напряжения

$$M_X = \int_A \sigma \cdot y \cdot dA = \int_A E \cdot \frac{y}{\rho} \cdot y \cdot dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 \cdot dA = \frac{E}{\rho} \cdot I_X,$$

где $I_X = \int_A y^2 \cdot dA$ — момент инерции сечения балки относительно оси x.

Из последнего равенства найдем отношение

$$\frac{E}{\rho} = \frac{M_X}{I_X}.$$

Формула для расчета нормальных напряжений в произвольном слое, смещенном на координату y от нейтральной линии, полученная А. Навье в 1826 году, имеет вид

$$\sigma = \frac{M_X}{I_X} \cdot y.$$

Отсюда следует: нормальные напряжения на нейтральной линии сечения равны нулю, наибольшие по величине напряжения возникают в слоях, наиболее удаленных от нейтрального слоя (в крайних верхних и крайних нижних слоях).

9.3. Расчеты на прочность по нормальным напряжениям

При поперечном изгибе материал балки находится в неоднородном напряженном состоянии. Наиболее удаленные от нейтральной линии точки сечения имеют максимальные деформации и напряжения растяжения и сжатия, следовательно, требуют проверки по прочности.

Проверочный расчет прочности по нормальным напряжениям выполняется в опасном сечении, где действует максимальный изгибающий момент

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{I_X} \cdot y_{max} = \frac{M_{max}}{W_X} \leq [\sigma],$$

где $W_X = \frac{I_X}{y_{max}}$ — осевой момент сопротивления сечения, который равен:

— для прямоугольного сечения $W_X = \frac{b \cdot h^2}{6}$;

— для круглого сечения $W_X = \frac{\pi \cdot D^3}{32} \approx 0{,}1\ D^3$;

— для кольцевого сечения $W_X = \frac{\pi \cdot D^3}{32}(1 - \alpha^4) \approx 0{,}1\ D^3(1 - \alpha^4)$.

Здесь $\alpha = d/D$, D и d – наружный и внутренний диаметры сечения.

При выполнении проектного расчета сначала из условия прочности находят требуемое значение момента сопротивления, а затем подбирают размеры сечения, согласованные с требованиями ГОСТов. Прокатные профили выбирают из таблиц сортамента:

$$W_{\text{тр}} \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]}.$$

Требуемые размеры прямоугольного сечения со сторонами $h = k \cdot b$:

$$h \geq \sqrt[3]{6 \cdot k \cdot W_{\text{тр}}}.$$

Требуемый диаметр круглого сечения

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot W_{\text{тр}}}{\pi}} \approx \sqrt[3]{\frac{\cdot W_{\text{тр}}}{0{,}1}}.$$

Требуемый внешний диаметр кольцевого сечения

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot W_{\text{тр}}}{\pi \cdot (1-\alpha^4)}} \approx \sqrt[3]{\frac{\cdot W_{\text{тр}}}{0{,}1 \cdot (1-\alpha^4)}}.$$

Если момент сопротивления сечения выбран меньше требуемого, то необходимо выполнить поверочный расчет и убедиться, что перенапряжение не превышаете 5 %.

Вычисление допускаемого значения изгибающего момента на балку, а, следовательно, допускаемой нагрузки на нее при известных характеристиках материала и заданных размерах производят по формуле

$$M_{max} = W \cdot [\sigma].$$

9.4. Расчеты на прочность по касательным напряжениям

Касательные напряжения $\tau_у$ вызваны действием в поперечном сечении балки поперечной силы Q_y. Для их определения приняты допущения:

— касательные напряжения $\tau_у$ параллельны поперечной силе Q_y

— касательные напряжения однородны по ширине сечения балки, их распределение по высоте сечения соответствует формуле Д. И. Журавского

$$\tau_у = \frac{Q_y \cdot S_X^{отс} \cdot}{I_X \cdot b},$$

где Q_y — поперечная сила в рассматриваемом сечении балки;

$S_X^{отс}$ — статический момент отсеченной части поперечного сечения балки относительно оси x;

I_X — осевой момент инерции сечения балки относительно оси x;

b — ширина поперечного сечения балки в исследуемом месте сечения.

Знак касательных напряжений определяется знаком поперечной силы.

Условие прочности сечения по касательным напряжениям имеет вид:

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} \cdot S_X^{отс} \cdot}{I_X \cdot b} \leq [\tau].$$

Исследуем характер распределения касательных напряжений в прямоугольном сечении балки с размерами hxb:

— момент инерции сечения $I_X = \frac{b \cdot h^3}{12}$;

— статический момент произвольной отсеченной части сечения

$$S'_X = A' \cdot y'_c = b\left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + y\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) = \frac{b \cdot h^2}{8}\left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right).$$

Статический момент отсеченной части сечения изменяется по параболическому закону относительно координаты y, что определяет характер распределения касательных напряжений по высоте сечения (рис. 9.9):

$$\tau_у = \frac{Q_y \cdot S'_X \cdot}{I_X \cdot b} = \frac{12 \cdot Q_y \cdot b \cdot h^2}{8 \cdot b \cdot h^3 \cdot b}\left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right) = \frac{3}{2}\frac{Q_y}{A}\left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right).$$

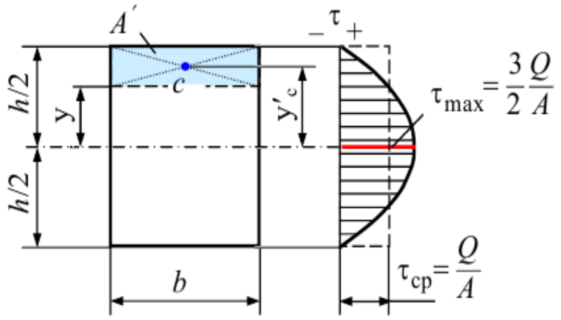


Рис. 9.9. Схема распределения касательных напряжений в сечении балки

Таким образом, наибольшие касательные напряжения τ_{max} приходятся на участки сечения, расположенные вблизи нейтральной оси, в то время как наибольшие нормальные напряжения σ_{max} соответствуют максимально удаленным от нейтральной оси кромкам сечения.

Сопоставим значения наибольших нормальных и касательных напряжений на примере прямоугольного сечения балки

$$\frac{\sigma_{max}}{\tau_{max}} = \frac{12 \cdot M_{max}}{b \cdot h^3} \frac{2 \cdot b \cdot h}{3 \cdot Q_{max}} = \frac{8 \cdot M_{max}}{h^2 \cdot Q_{max}}.$$

Максимальные нормальные напряжения σ_{max} определяются значением изгибающего момента балки, который существенно зависит от пролета балки. Максимальные касательные напряжения τ_{max} напротив, зависят от высоты сечения балки. Следовательно, по мере уменьшения величины пролета балки, роль нормальных напряжений снижается по сравнению с касательными напряжениями.

В сложившейся практике проектирования балок подбор размеров поперечного сечения выполняют по максимальным нормальным напряжениям (как при чистом изгибе), а затем проводят проверку прочности сечения по максимальным касательным напряжениям.

В двутавровом сечении балки ширина поперечного сечения резко уменьшается в месте соединения полок со стенкой, что приводит к совместному действию нормальных и касательных напряжений (точка К на рис. 9.10):

$$\sigma_K = \frac{M_{max}}{I_X} \cdot y_K; \qquad \tau_K = \frac{Q_y \cdot S'_X \cdot}{I_X \cdot d},$$

где $y_K = \frac{h}{2} - t,\ S'_X = b \cdot t\left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right)$.

Эквивалентные напряжения в точке K вычисляют по одной из теорий прочности, соответствующей свойствам материала.

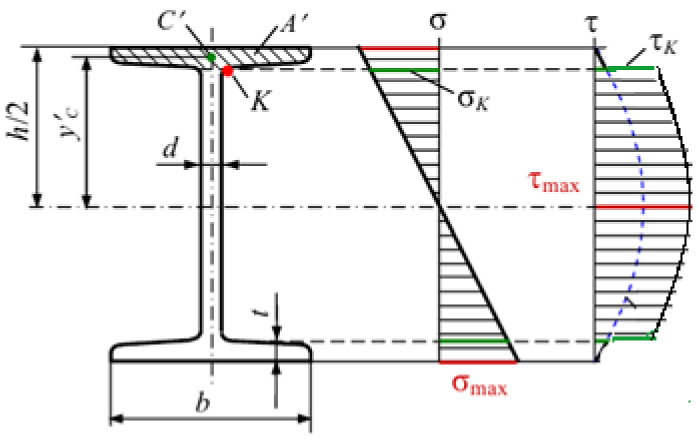


Рис. 9.10. Схема распределения напряжений в двутавровом сечении балки:
1 — распределение касательных напряжений при ширине сечения d;
2 — то же при ширине сечения b

9.5. Проверка жесткости балки

Под расчетом на жесткость понимают оценку упругой податливости балки под действием приложенных нагрузок и подбор таких размеров поперечного сечения, при которых перемещения не будут превышать установленных нормами пределов:

$$f \leq [f].$$

Перемещение оси сечения балки под действием поперечной нагрузки называется ***прогибом***. Прогиб соответствует координатной оси y. Наибольший прогиб в пролете или на конце консоли балки называется ***стрелой прогиба*** и обозначается буквой f.

При изгибе оси балки под действием поперечной силы каждое ее сечение поворачивается по отношению к своему первоначальному положению на ***угол поворота*** θ.

Угол поворота сечения определяется производной прогиба по координате z , соответствующей оси балки:

$$y' = \frac{dy}{dz} = tg\theta \approx \theta.$$

Угол поворота считается положительным, при повороте сечения против хода часовой стрелки и отрицательным — по часовой стрелке.

Из теории дифференциального исчисления известно, что если плоская кривая задана явной функцией $y = y(z)$, то радиус кривизны кривой вычисляется по формуле

$$\rho = \frac{[1+(y')^2]^{3/2}}{y''}.$$

Ввиду малости угловых деформаций y', ее квадратом $(y')^2$ пренебрегаем, в этом случае

$$\rho = \frac{1}{y''}.$$

Как было доказано раньше (см. 9.4), радиус кривизны упругой линии балки в какой-либо точке обратно пропорционален изгибающему моменту

$$\frac{E}{\rho} = \frac{M(z)}{I_X} \quad \rightarrow \quad y'' = \frac{d^2y}{dz^2} = \frac{M(z)}{E \cdot I_X}.$$

Для решения данного дифференциального ***уравнения упругой линии балки*** существуют три метода:

— метод непосредственного интегрирования;

— метод Клебша;

— метод Верещагина.

Рассмотрим наиболее простой метод определения деформаций балки – метод Клебша, который требует единого уравнения моментов $M(z)$, для чего:

• начало координат необходимо расположить на левом конце балки, а секущую плоскость вблизи правого конца;

• ввести в уравнение моментов координаты действующих нагрузок, при включении в уравнение момента M его также необходимо умножить на скобку $(z-a)^0$, где a - координата сечения, в котором приложен момент;

• в случае обрыва распределенной нагрузки ее продлевают до правого конца балки, а для восстановления прежних (действительных) условий вводят «компенсирующую» нагрузку обратного направления;

• интегрирование дифференциального уравнения упругой линии балки рекомендуется проводить, не раскрывая скобок.

Пусть на балку действуют нагрузки, создающие растяжение нижних волокон: в координате $z = a$ действует внешний момент M, в координате $z = b$ сосредоточенная F, распределенная нагрузка q приложена на участке $c \leq z \leq d$. Тогда уравнение моментов примет вид

$$M(z) = M(z-a)^0 + F(z-b) + q\frac{(z-c)^2}{2} - q\frac{(z-d)^2}{2}.$$

После двукратного интегрирования уравнения упругой линии получают выражение для углов поворота сечений и уравнение прогибов балки:

$$E \cdot I_X \cdot y' = E \cdot I_X \cdot \theta(z) = \int M(z) \cdot dz + C.$$

$$E \cdot I_X \cdot y(z) = \iint M(z) \cdot dz + C \cdot z + D.$$

Постоянные интегрирования (C и D) определяют из условий, задаваемых в местах опирания балки.

10. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Под *сложным сопротивлением* подразумевают такие деформации бруса, при которых в его поперечных сечениях возникает одновременно несколько внутренних силовых факторов. В соответствии с принципом суперпозиции сложное сопротивление рассматривают как комбинацию простых видов сопротивления: растяжения (сжатия), среза, кручения и изгиба. Наибольший интерес представляют сложные сопротивления трех видов: косой и сложный изгиб, изгиб с растяжением (сжатием), а также изгиб с кручением.

10.1. Косой и сложный изгибы

Косым изгибом называется такой вид изгиба, при котором плоскость изгибающего момента не совпадает ни с одной из главных осей инерции поперечного сечения стержня (рис. 10.1, а).

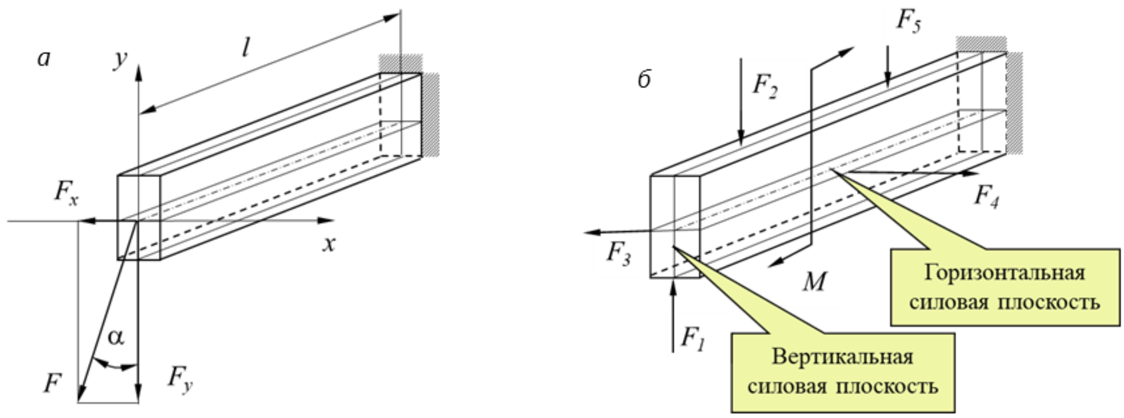


Рис. 10.1. Балки, испытывающие действия косого (а) и сложного (б) изгиба

В большинстве случаев в опасной точке поперечного сечения бруса касательные напряжения, либо равны нулю, либо малы по сравнению с нормальными напряжениями, поэтому расчеты на прочность при косом и сложном изгибе ведут с учетом только нормальных напряжений.

Для определения нормальных напряжений при *косом изгибе* изгибающий момент, вызванный действием внешней нагрузки, проецируют на две главные изгиба *xOz* и *yOz*. В этом случае проекции силы и изгибающего момента соответственно равны:

$$F_x = F \cdot sin\alpha; \qquad F_y = F \cdot cos\alpha;$$
$$M_x = M \cdot cos\alpha; \quad M_y = M \cdot sin\alpha.;$$

Каждая из проекций изгибающих моментов вызывает линейное напряженное состояние, результирующее нормальное напряжение в произвольной точке сечения с координатами *x* и *y* определяют в соответствии с принципом суперпозиции суммой напряжений σ_x и σ_y:

$$\sigma = \sigma_x + \sigma_y = \pm \frac{M_x}{I_X} \cdot y \pm \frac{M_y}{I_y} \cdot x,$$

где: M_x, M_y — изгибающие моменты относительно главных осей сечения;

I_X и I_y — главные моменты инерции сечения;

Наиболее опасными являются те точки сечения, в которых складываются нормальные напряжения одного знака (растяжения или сжатия):

$$\sigma_{max,min} = \pm M \left(\frac{y_{max}}{I_X} \cdot cos\alpha + \frac{x_{max}}{I_y} \cdot sin\alpha \right).$$

Условия прочности при косом изгибе имеют вид:

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{W_X} + \frac{M_y}{W_y} \le [\sigma_p]; \quad \text{или} \quad \sigma_{max} = \frac{M}{W_X}\left(cos\alpha + \frac{W_x}{W_y} sin\alpha \right) \le [\sigma_p];$$

$$\sigma_{min} = -\frac{M_x}{W_X} - \frac{M_y}{W_y} \le [\sigma_c]; \quad \text{или} \quad \sigma_{min} = -\frac{M}{W_X}\left(cos\alpha + \frac{W_x}{W_y} sin\alpha \right) \le [\sigma_c].$$

Здесь: α — угол между осью y и следом плоскости действия полного изгибающего момента М; W_X и W_y — главные осевые моменты сопротивления сечения; $[\sigma_p]$ и $[\sigma_c]$ — допускаемые напряжения растяжения и сжатия. Наибольшие нормальные напряжения растяжения и сжатия соответствуют точкам 1 и 2, наиболее удаленным от нейтральной линии сечения (рис. 10.2).

Нейтральной линией сечения называют геометрическое место точек сечения, нормальные напряжения в которых равны нулю. Уравнение нейтральной линии сечения при косом изгибе определяем из условия

$$\sigma = M\left(\frac{y}{I_X}\cdot cos\alpha + \frac{x}{I_y}\cdot sin\alpha\right) = 0, \qquad \frac{y}{I_X}\cdot cos\alpha + \frac{x}{I_y}\cdot sin\alpha = 0.$$

Нейтральная линия сечения проходит через центр тяжести сечения с угловым коэффициентом:

$$k = tg\beta = \frac{x}{y} = -\frac{I_X\cdot sin\alpha}{I_y\cdot cos\alpha} = -\frac{I_X}{I_y}tg\alpha.$$

Отсюда следует, что нейтральная линия сечения и след силовой плоскости располагаются в разных четвертях системы координат. В отличие от плоского поперечного изгиба при косом изгибе нейтральная линия не перпендикулярна силовой плоскости.

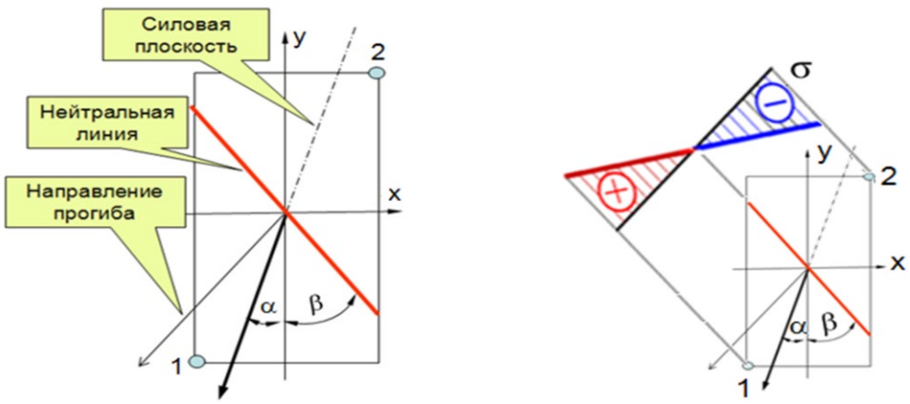


Рис. 10.2. Положение нейтральной линии сечения и линейное распределение нормальных напряжений при косом изгибе

При *сложном изгибе* (см. рис. 10.1, б) внешние силы могут действовать в разных силовых плоскостях, которые проходят через геометрическую ось балки, что исключает появление в ней деформаций кручения.

После проецирования всех внешних нагрузок на главные оси и построения эпюр внутренних усилий в проекциях на главные оси, получаем распределение полных нормальных напряжений в сечении, аналогичное косому изгибу

$$\sigma = \sigma_x + \sigma_y = \pm\frac{M_x}{I_X}\cdot y \pm \frac{M_y}{I_y}\cdot x.$$

Условия прочности при сложном изгибе имеют вид:

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{W_X} + \frac{M_y}{W_y} \le [\sigma_p]; \qquad \sigma_{min} = -\frac{M_x}{W_X} - \frac{M_y}{W_y} \le [\sigma_c].$$

Положение нейтральной линии при сложном изгибе определяем в каждом сечении из условия

$$\sigma = \frac{M_x}{I_X} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot x = 0, \qquad \text{отсюда} \qquad k = tg\beta = \frac{x}{y} = -\frac{M_y \cdot I_X}{M_x \cdot I_y}.$$

Деформацию балок при косом и сложном изгибе определяют путем геометрического сложения векторов прогибов в направлениях главных центральных осей инерции. Суммарный прогиб балки лежит в плоскости перпендикулярной нейтральной линии сечения и определяется равенством:

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} \le [f].$$

10.2. Изгиб с растяжением (сжатием)

Изгиб с растяжением (сжатием) — сложное напряженное состояние, вызванное действием продольной и поперечной нагрузки, под действием которых в сечениях стержня возникают пять внутренних силовых факторов: продольная сила N, изгибающие моменты M_x и M_y, поперечные силы Q_x и Q_y. В результате в сечениях стержня возникают нормальные и касательные напряжения.

Как показывает опыт проектирования для длинных стержней ($l > 10h$) касательные напряжения от действия поперечных сил Q_x и Q_y ничтожно малы по сравнению с нормальными напряжениями, вызванными действием продольной силы N и изгибающих моментов M_x и M_y. В результате имеет место линейное напряженное состояние, при котором результирующее нормальное напряжение в произвольной точке сечения определяется равенством:

$$\sigma = \pm\sigma_N \pm \sigma_x \pm \sigma_y = \pm\frac{N}{A} \pm \frac{M_x}{I_X} \cdot y \pm \frac{M_y}{I_y} \cdot x.$$

При растяжении с изгибом условия прочности имеют вид:

$$\sigma_{max} = \sigma_{\text{р}} + \sigma_x + \sigma_y = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_X} + \frac{M_y}{W_y} \le [\sigma_p] \text{ (рис. 10.3, а)};$$

$$\sigma_{min} = \sigma_{\text{р}} + \sigma_x + \sigma_y = \frac{N}{A} - \frac{M_x}{W_X} - \frac{M_y}{W_y} \le [\sigma_c].$$

При сжатии с изгибом наибольшие нормальные напряжения растяжения и сжатия должны удовлетворять условиям:

$$\sigma_{max} = \sigma_{\text{с}} + \sigma_x + \sigma_y = -\frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_X} + \frac{M_y}{W_y} \le [\sigma_p];$$

$$\sigma_{min} = \sigma_{\text{с}} + \sigma_x + \sigma_y = -\frac{N}{A} - \frac{M_x}{W_X} - \frac{M_y}{W_y} \le [\sigma_c] \text{ (рис. 10.3, б)}.$$

Рис. 10.3. Точки сечения, испытывающие наибольшие напряжения растяжения (*а*) и сжатия (*б*)

10.3. Внецентренное растяжение (сжатие)

Внецентренное растяжение (сжатие) — сложное напряженное состояние, при котором стержень подвержен действию продольной силы $N = F$ и, изгибающих моментов M_x, M_y, вызванных внецентренным приложением продольной силы (рис. 10.4):

$$M_x = F \cdot e_y; \qquad M_y = F \cdot e_x;$$

Точка A, в которой приложена продольная силы F называется *полюсом давления*. Расстояние между геометрической осью стержня и линией действия силы F называется *эксцентриситетом* e.

Координаты полюса давления являются эксцентриситетами e_x и e_y силы F относительно главных осей инерции.

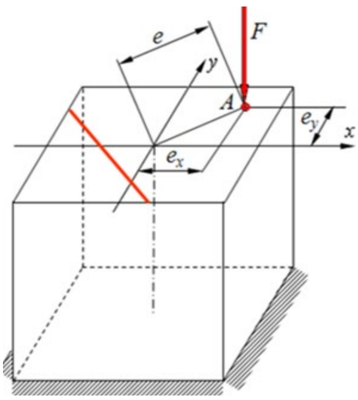


Рис. 10.4. Схема внецентренно сжатого стержня

Нормальные напряжения в произвольной точке сечения с координатами x и y определяются так же, как в случае сжатия с изгибом:

$$\sigma = -\frac{N}{A} \pm \frac{M_x}{I_X} \cdot y \pm \frac{M_y}{I_y} \cdot x = -\frac{F}{A} \pm \frac{F \cdot e_y}{I_X} y \pm \frac{F \cdot e_x}{I_y} x.$$

Нормальные напряжения в сжатой зоне сечения равны

$$\sigma = -\frac{F}{A}\left(1 + \frac{e_y}{I_X/A} y + \frac{e_x}{I_y/A} x\right) = -\frac{F}{A}\left(1 + \frac{e_y}{i_x^2} y + \frac{e_x}{i_y^2} x\right),$$

где i_X и i_y — радиусы инерции сечения.

Геометрическое место точек, в которых нормальные напряжения равны нулю, определяются уравнением нейтральной линии сечения (рис. 10.5)

$$\sigma = -\frac{F}{A}\left(1 + \frac{e_y}{i_x^2}y + \frac{e_x}{i_y^2}x\right) = 0, \qquad 1 + \frac{e_y}{i_x^2}y + \frac{e_x}{i_y^2}x = 0.$$

Для построения нейтральной линии найдем точки ее пересечения главными осями сечения: при $x = 0$, $\quad y_n = -\frac{i_x^2}{e_y}$; при $y = 0$, $x_n = -\frac{i_y^2}{e_x}$.

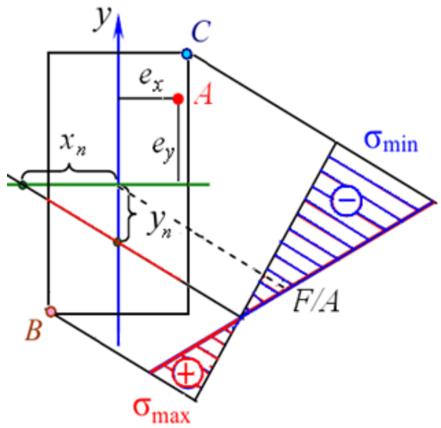


Рис. 10.5. Распределение нормальных напряжений при внецентренном сжатии

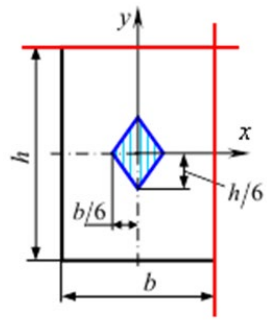


Рис. 10.6. Ядро сечения прямоугольной формы

Нейтральная линия не проходит через центр тяжести сечения, она пересекает координатные оси в точках, принадлежащих квадранту, противоположному тому, в котором находится точка приложения силы (рис. 10.5).

Если материал слабо сопротивляется напряжениям растяжения (бетон, кирпичная кладка и др.), необходимо создать в области сечения напряжения сжатия. Для этого строят ядро сечения (рис. 10.6) — область вокруг геометрического центра, в которой следует расположить полюс давления, чтобы совсем исключить напряжения положительного знака: если уравнение нейтральной линии $y_n = \frac{\mathrm{h}}{2}$, то координата полюса $y_A = -\frac{i_x^2}{y_n} = -\frac{\mathrm{h}}{6}$; если уравнение нейтральной линии $x_n = \frac{b}{2}$, координата полюса давления $x_A = -\frac{i_y^2}{x_n}$.

10.4. Изгиб с кручением

Изгиб с кручением — сложное напряженное состояние, при котором в поперечных сечениях стержня возникают пять внутренних силовых факторов: крутящий момент $T = M_z$, изгибающие моменты M_x и M_y, поперечные силы Q_x и Q_y. Совместное воздействие изгиба и кручения является наиболее характерным случаем работы валов, плоских и пространственных рам.

От действий поперечных сил и крутящего момента возникают касательные напряжения τ_{Qx}, τ_{Qy}, τ_T, от действия изгибающих моментов — нормальные напряжения σ_x и σ_y (рис. 10.7, а).

Для длинных стержней ($l > 10\ d$) влиянием поперечных сил Q_x и Q_y допускается пренебречь в силу их малости. Таким образом, при расчете на изгиб с кручением учитывают крутящий момент $T = M_z$, вызывающий касательные напряжения τ_T, и изгибающие моменты M_x, M_y, вызывающие нормальные напряжения σ_x, σ_y (рис. 10.7, б).

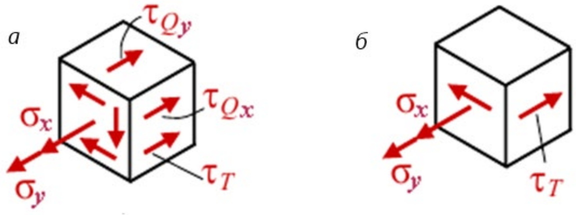


Рис. 10.7. Напряжения, действующие фактически (*а*) и учитываемые в расчете на прочность (*б*)

Таким образом, в опасном сечении стержня возникает плоское напряженное состояние, для которого актуально распределение напряжений:

$$\sigma = \sigma_x + \sigma_y = \frac{M_x}{I_X} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot x;$$
$$\tau = \frac{M_z}{I_p} \rho.$$

Наиболее рациональными поперечными сечениями стержней, работающих на изгиб с кручением, являются сечения в форме круга и трубы, для которых справедливы геометрические соотношения:

— осевой момент сопротивления $W_{oc} = W_X = W_y = \frac{W_p}{2}$;

— полярный момент сопротивления $W_p = 2W_{oc}$.

Изгибающий момент в опасном сечении стержня определяется равенством $M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$, тогда наибольшие нормальные и касательные напряжения на внешнем контуре сечения

$$\sigma = \sigma_x + \sigma_y = \frac{M_x}{W_X} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{M_u}{W_{oc}}; \qquad \tau = \frac{M_z}{W_p} = \frac{M_z}{2W_{oc}}.$$

При совместном действии нормальных и касательных напряжений их приводят к эквивалентным напряжениям, используя соответствующую теорию прочности:

— для пластичных материалов применяют теорию наибольших касательных напряжений (III теорию прочности);

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]; \qquad \sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sqrt{\left(\frac{M_u}{W_{oc}}\right)^2 + 4\left(\frac{M_z}{2W_{oc}}\right)^2} = \frac{M_{\text{пр}}^{\text{III}}}{W_{oc}} \leq [\sigma],$$

где $M_{\text{пр}}^{\text{III}} = \sqrt{M_u^2 + M_z^2}$ – приведенный момент сечения;

— для непластичных материалов применяют энергетическую теорию (IV теорию прочности);

$$\sigma_{экв}^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \le [\sigma]; \qquad \sigma_{экв}^{IV} = \sqrt{\left(\frac{M_u}{W_{oc}}\right)^2 + 3\left(\frac{M_z}{2W_{oc}}\right)^2} = \frac{M_{пр}^{IV}}{W_{oc}} \le [\sigma],$$

где $M_{пр}^{IV} = \sqrt{M_u^2 + 0{,}75M_z^2}$.

Отсюда следует порядок расчета стержней на изгиб с кручением:

— строят эпюры изгибающих моментов M_x и M_y;

— вычисляют результирующий изгибающий момент $M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$:

— строят эпюру крутящих моментов M_z и определяют опасное сечение;

— выполняют проверочный расчет прочности заданного сечения в опасном месте или проектный расчет подбора сечения стержня, если оно не задано.

11. УСТОЙЧИВОСТЬ ТОНКИХ СТЕРЖНЕЙ

Устойчивостью называют способность тела сохранять положение и форму упругого равновесия при действии продольной сжимающей силы F. С увеличением сжимающей силой F до некоторой критической величины $F_{кр}$ стержень начинает искривляться (рис. 11.1).

Опасность потери устойчивости особенно велика для тонкостенных конструкций, стержней, пластинок и оболочек. Потеря устойчивости происходит внезапно, при низких значениях напряжений, когда прочность еще не исчерпана. С наступления критического состояния деформации системы нарастают крайне быстро вплоть до разрушения, нет времени предотвратить его, поэтому критическая нагрузка подобна разрушающей при расчете на прочность:

$$F_{max} \le F_{кр}; \qquad \sigma_{max} \le [\sigma] = \frac{F_{кр}}{A}.$$

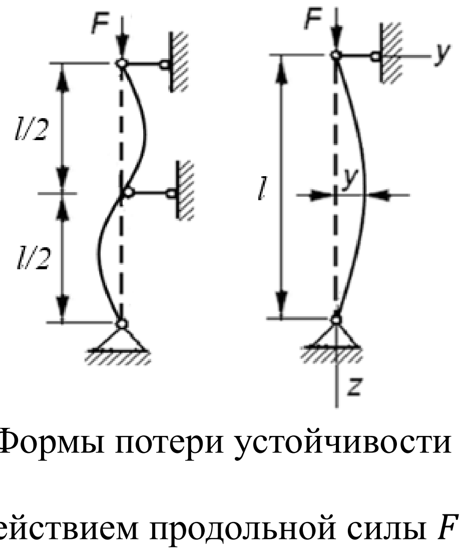


Рис. 11.1. Формы потери устойчивости стержней

Положим, что под действием продольной силы F стержень получил малое искривление оси, вследствие чего в сечении z появился прогиб y и изгибающий момент $M = -F \cdot y$.

Для определения критической силы воспользуемся дифференциальным уравнением упругой линии стержня:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{M(z)}{E \cdot I_X} = -\frac{F \cdot y}{E \cdot I_X} = -k^2 y; \qquad \frac{d^2y}{dz^2} + k^2 y = 0,$$

где E — модуль Юнга;

I_x — момент инерции сечения относительно оси x;

EI_x — жесткость стержня при изгибе;

$k^2 = F/EI_x$.

Решением дифференциального уравнения является гармоническая функция вида

$$y(z) = C_1 \cdot \sin(kz) + C_2 \cdot \cos(kz).$$

Постоянные C_1 и C_2 уравнения определяют из граничных условий:

— при $z = 0$ прогиб $y = 0$, тогда $C_2 = 0$, а уравнение прогиба имеет вид

$$y(z) = C_1 \cdot \sin(kz);$$

— при $z = l$ прогиб $y = 0$, тогда $C_1 \cdot \sin(kz) = 0$.

Если учесть, что константа C_1 не равна нулю, то справедливо равенство

$$\sin(kz) = 0.$$

Из свойств синусоиды следует, что $k = \pi n/l$, где n – число полуволн синусоиды ($n = 1, 2, 3 \ldots$), которые укладываются на длине l.

Решая совместно уравнения $k^2 = F/EI_x$ и $k = \pi n/l$, получаем значения критической силы, при которых возможна потеря устойчивости стержня:

$$F_{кр} = \frac{(\pi n)^2 EI_x}{l^2}.$$

Критическая сила принимает наименьшее значение при условии, когда на длине стержня укладывается одна полуволна $n = 1$, а момент инерции стержня имеет наименьшее значение $I_x = I_{min}$.

В этом случае стержень теряет устойчивость относительно той оси, для которой момент инерции сечения стержня имеет наименьшее значение, а критическая сила принимает единственное значение, равное силе Эйлера,

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l^2}.$$

Число полуволн упругой линии стержня, зависит от способа крепления стержня в плоскости потери устойчивости, а, следовательно, влияет на значение критической силы.

11.1. Влияние способа крепления стержня на критическую силу

Рассмотрим стержень длиной L, защемленный одним концом. Изогнутая ось стержня совпадает с изогнутой осью шарнирно закрепленного стержня в верхней половине его длины (рис. 11.2, а). Следовательно, критическая сила стержня длиной L с защемленным концом имеет такое же значение, как и шарнирно закрепленного длиной $2L$

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(2L)^2}.$$

Стержень длиной L защемлен с двух сторон. Из сравнения изогнутых осей следует, что они совпадают в средней части. Таким образом, критическая сила стержня длиной L с двумя защемленными концами имеет такое же значение, что и шарнирно закрепленного длиной $0{,}5L$ (рис. 11.2, б)

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(0{,}5L)^2}.$$

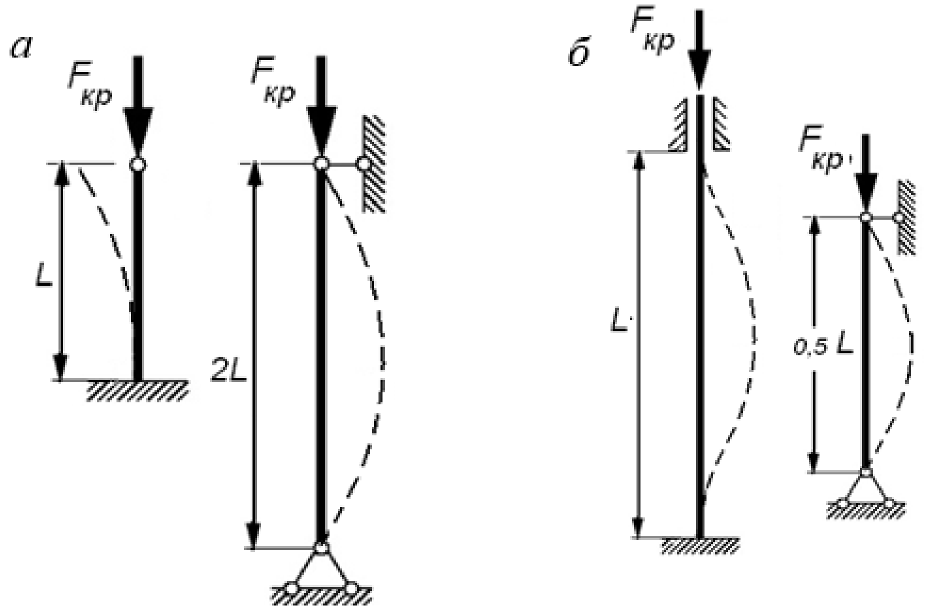


Рис. 11.2. Сравнение форм упругих линий стержня при потере устойчивости

Для учета влияния способа крепления стержня на критическую силу, используют приведенную длину $l_{\text{пр}} = \mu L$. Понятие коэффициента приведения длины μ было введено известным русским ученым Ф. С. Ясинским:

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(\mu L)^2}.$$

Некоторые значения коэффициента приведения длины даны на рис. 11.3.

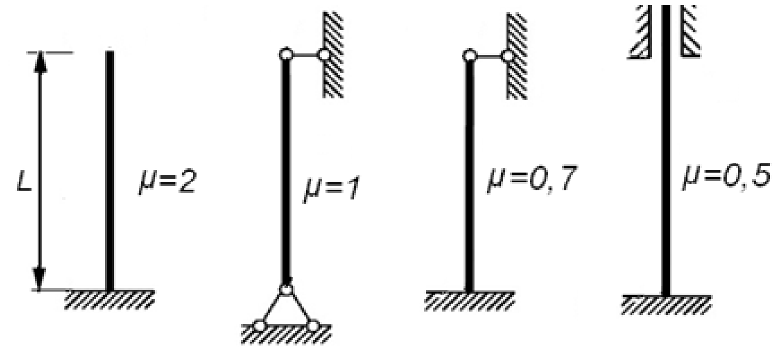


Рис. 11.3. Коэффициенты μ, определяющие способ крепления концов

Критическое напряжение в стержне при потере устойчивости равно

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{F_{\text{кр}}}{A} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{(\mu L)^2 A} = \frac{\pi^2 E \cdot i_{min}^2}{(\mu L)^2},$$

где $i_{min} = \sqrt{I_{min}/A}$ — минимальный радиус инерции сечения стержня.

Если ввести понятие гибкости стержня $\lambda_{max} = \mu L / i_{min} = L_{\text{пр}} / i_{min}$, условие устойчивости стержня принимает вид (формула Эйлера)

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq [\sigma_{\text{пц}}].$$

Формула Эйлера справедлива для упругой стадии работы материала, когда критическое напряжение не превышает предела пропорциональности $\sigma_{\text{пц}}$. Граница применимости формулы Эйлера определяется предельной гибкостью стержня. Например, для малоуглеродистых сталей ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\sigma_{\text{пц}} \approx 200$ МПа) предельная гибкость составляет

$$\lambda_{\text{пр}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{[\sigma_{\text{пц}}]}} = \sqrt{\frac{3{,}14^2 \cdot 2 \cdot 10^{11}}{2 \cdot 10^8}} \approx 100.$$

При гибкости стержня меньше предельного значения, как показали эксперименты, критические напряжения изменяются по закону, близкому линейному

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda.$$

Здесь a и b – величины, зависящие от материала стержня. Например, для малоуглеродистых сталей $a = 310$ МПа, $b = 1{,}14$ МПа.

Нельзя допускать возникновения в стержне критического напряжения, поэтому коэффициент запаса устойчивости определяют по формуле

$$S_{\text{у}} = F_{\text{кр}} / F,$$

Нормируемые значения коэффициента запаса устойчивости зависят от материала стержня: для сталей $[S_у] = 1{,}8 \dots 3$; для чугунов $[S_у] = 5 \dots 5{,}5$; для дерева $[S_у] = 2{,}8 \dots 3{,}2$.

Если гибкость стержня меньше $\lambda \leq 60$, проверки устойчивости стержня не требуется.

11.2. Расчет стержней на устойчивость

Существует три вида расчетов на устойчивость прямолинейных стержней – проектный, проверочный и силовой.

Проектный расчет заключается в определении минимального осевого момента инерции поперечного сечения стержня, при котором упругая устойчивость его будет обеспечена

$$I_{min} = \frac{F_{кр}(\mu L)^2}{\pi^2 E} = \frac{F[S_у](\mu L)^2}{\pi^2 E}.$$

Проверочный расчет заключается в определении действительного коэффициента запаса устойчивости $S_у$ и сравнении его с допускаемым значением

$$S_у = F_{кр}/F \leq [S_у].$$

Силовой расчет заключается в определении допускаемой продольной силы $[F]$ на стержень

$$[F] = F_{кр}/[S_у].$$

Наиболее универсальным проектным расчетом сжатых стержней на устойчивость является метод последовательного приближения, при котором условие устойчивости представляют подобно расчету на простое сжатие. Условие устойчивости имеет вид:

$$\sigma = \frac{F}{\varphi \cdot A} \leq [\sigma],$$

где φ — коэффициент продольного изгиба, который зависит от рода материала стержня и его гибкости λ. Эта зависимость может быть представлена графиком или дискретно, например, данными табл. 11.1.

Таблица 11.1

Зависимость между гибкостью малоуглеродистой стали и коэффициентом продольного изгиба

λ	0	10	20	30	40	50	60
φ	1,00	0,99	0,97	0,95	0,92	0,89	0,86
λ	70	80	90	100	110	120	130
φ	0,81	0,75	0,69	0,60	0,52	0,45	0,40
λ	140	150	160	170	180	190	200
φ	0,36	0,32	0,29	0,26	0,23	0,21	0,19

Поскольку в условии устойчивости имеются две неизвестные величины – площадь поперечного сечения А и коэффициент продольного изгиба φ, задача подбора сечения стержня решается путем ряда попыток.

1. Первоначально задаются коэффициентом φ в пределах от 0,6 до 0,8, что соответствует гибкости стержня λ от 100 до 75.

2. По продольной силе и допускаемому напряжению определяют площадь сечения стержня

$$A \geq \frac{F}{\varphi \cdot [\sigma]}.$$

3. Рассчитывают гибкость стержня и проверяют соответствие ее предельно допустимому значению $\lambda = \mu L / i_{min} \leq \lambda_{max}$.

4. Уточняют коэффициент продольного изгиба φ и выполняют вторую попытку. Расчеты повторяют до тех пор, пока разность $\Delta\varphi$ между соседними попытками не станут меньше 5 %.

12. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

12.1. Определение геометрических характеристик сечения

Поперечное сечение стержня состоит из двух прокатных профилей. Размеры прокатных профилей и формы сечений и указаны в табл. 12.1а, 12.1б.

Требуется:

1) определить положение центра тяжести сечения;

2) вычислить осевые моменты инерции и центробежный момент инерции сечения относительно центральных осей;

3) определить положение главных центральных осей инерции;

4) найти значения главных центральных моментов инерции;

5) вычертить поперечное сечение в масштабе, указать размеры и оси координат, в том числе и главные центральные оси;

6) определить радиусы инерции сечения относительно главных осей.

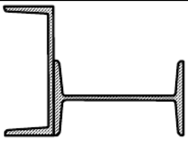
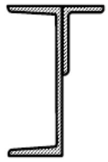
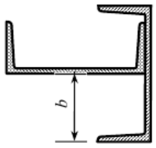
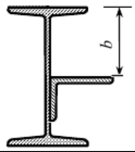
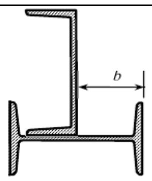
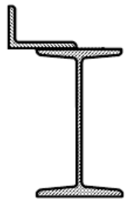
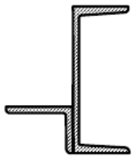
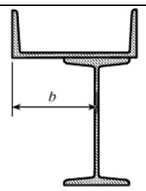
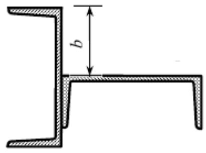
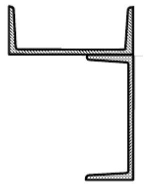
Таблица 12.1а

Прокатные профили, применяемые в сечении

Первая цифра варианта	Швеллер	Двутавр	Уголок равнобокий	Уголок неравнобокий	b, мм
0	18	16	90x90x6	90x56x5,5	60
1	24	24	90x90x9	100x63x6	20
2	30	22	80x80x8	100x63x8	110
3	20	18	100x100x8	110x70x7	40
4	22	30	90x90x8	100x63x6	30
5	18	16	90x90x7	90x56x6	80
6	24	24	90x90x9	100x63x7	100
7	30	22	80x80x6	100x63x10	50
8	20	18	100x100x12	110x70x8	20
9	22	30	90x90x8	100x63x6	70

Таблица 12.1б

Заданная форма сечения

Вторая цифра варианта	Форма сечения	Вторая цифра варианта	Форма сечения
1		2	
3		4	
5		6	
7		8	
9		0	

12.2. Расчет бруса на действие продольных сил

Ступенчатый брус находится под действием продольных сил F_1, F_2 и F_3 (таб. 12.2а), приложенных к его оси (табл. 12.2б). Брус состоит из трех участков с длинами a, b и c, в пределах каждого участка поперечные сечения бруса остаются неизменными.

Требуется:

1) определить внутренние продольные усилия методом сечений и построить эпюру продольных сил N;

2) подобрать квадратное сечение бруса в наиболее напряженном участке, размеры округлить до стандартных значений;

3) построить эпюру нормальных напряжений σ и убедиться, что на всех участках условия прочности выполняются;

4) вычислить продольные деформации каждого участка бруса и построить эпюру Δl перемещений для сечений бруса;

Данные для расчета: модуль упругости материала бруса $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, предел текучести $\sigma_т = 240$ МПа, запас прочности по отношению к пределу текучести $n_т$ =1,5.

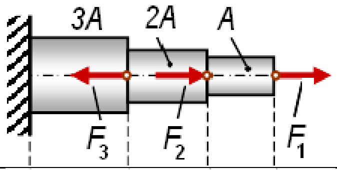
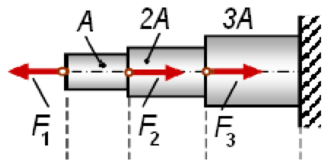
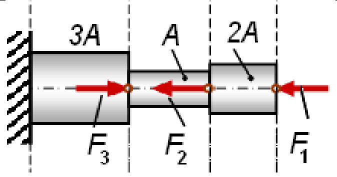
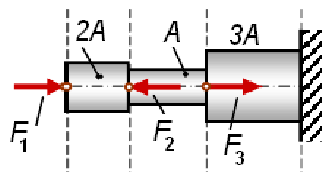
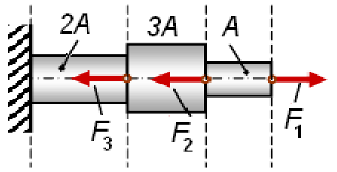
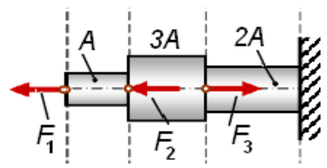
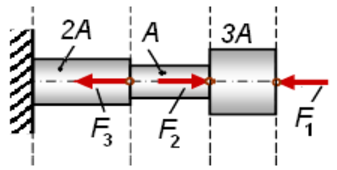
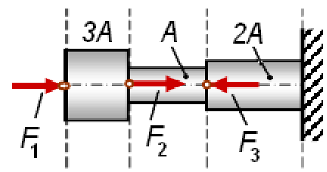
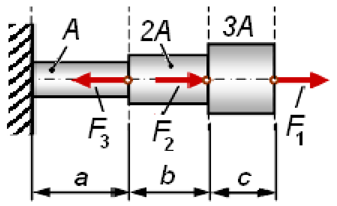
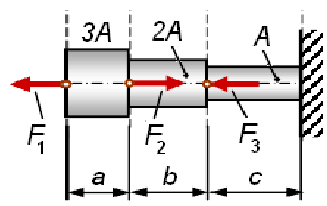
Таблица 12.2а

Данные для расчета бруса

Первая цифра варианта	Продольные силы, кН			Длины участков, м		
	F_1	F_2	F_3	a	b	c
0	40	90	100	0,3	0,5	0,6
1	45	80	120	0,3	0.5	0,5
2	50	85	110	0,4	0,6	0,4
3	35	70	115	0,4	0,6	0,6
4	40	75	100	0,5	0,4	0,3
5	50	80	95	0,5	0,4	0,4
6	60	70	120	0,3	0,2	0,5
7	45	60	115	0,4	0,3	0,6
8	35	65	110	0,2	0,4	0,4
9	30	90	95	0,5	0,5	0,3

Таблица 12.2б

Заданная расчетная схема бруса

Вторая цифра варианта	Расчетная схема бруса	Вторая цифра варианта	Расчетная схема бруса
1		6	
2		7	
3		8	
4		9	
5		0	

12.3. Расчет круглого вала на действие крутящих моментов

Вал переменного сечения находится под действием крутящих моментов M_1, M_2 и M_3. Длины участков вала a, b, c, e и значения крутящих моментов M_1, M_2 и M_3 указаны в табл. 12.3а.

Расчетные схемы вала приведены в табл. 12.3б, диаметры поперечных сечений вала следует принять в соотношении $d/D = 0{,}8$.

Требуется:

1) определить внутренние крутящие моменты на всех участках вала методом сечений и построить эпюру;

2) определить положение наиболее напряженного участка вала и подобрать диаметр круглого сечения, а затем на других участках, диаметры округлить до стандартных значений;

3) построить эпюру касательных напряжений τ в наиболее напряженном сечении вала, убедиться в выполнении условий прочности на всех участках;

4) вычислить угловые деформации каждого участка и построить эпюру угловых φ перемещений характерных сечений вала.

Данные для расчета: модуль сдвига материала $G = 0{,}8 \cdot 10^5$ МПа, допускаемые напряжения $[\tau] = 80$ МПа.

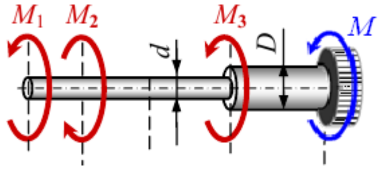
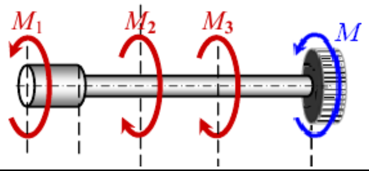
Таблица 12.3а

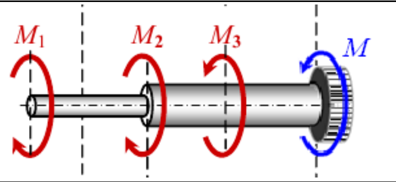
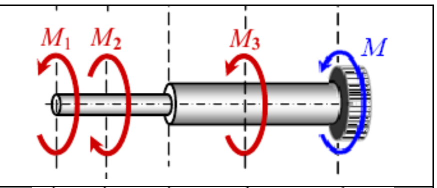
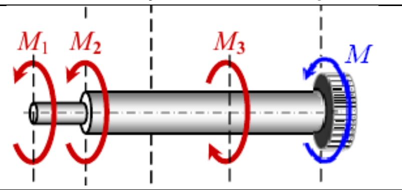
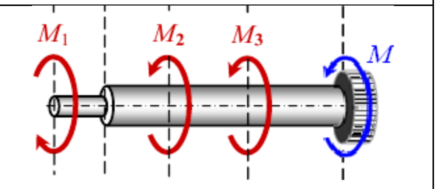
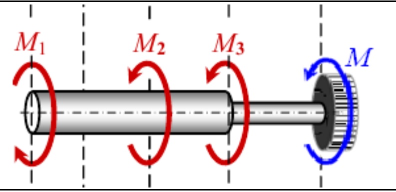
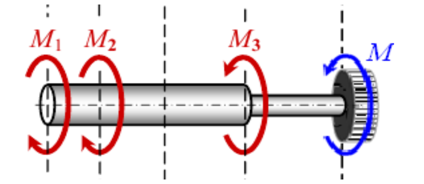
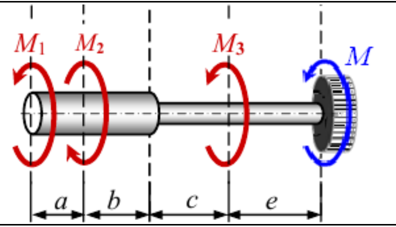
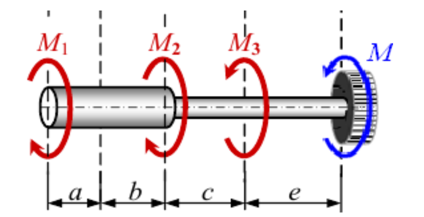
Данные для расчета вала

Первая цифра варианта	Крутящие моменты, кН м			Длины участков, м			
	M_1	M_2	M_3	a	b	c	e
0	10	15	50	0,5	0,6	0,7	0,9
1	15	10	25	0,6	0,7	0,8	0,9
2	20	15	30	0,7	0,8	0,9	1,0
3	25	20	35	0,8	0,9	1,0	1,2
4	40	30	40	0,9	1,4	1,3	0,6
5	50	45	50	1,0	0,8	0,8	0,8
6	35	30	35	0,6	0,4	1,0	1,0
7	30	35	40	0,8	0,6	1,2	1,2
8	25	20	45	0,4	0,8	0,8	0,8
9	20	10	25	1,0	0,9	0,6	0,6

Таблица 12.3б

Заданная расчетная схема вала

Вторая цифра варианта	Расчетная схема вала	Вторая цифра варианта	Расчетная схема вала
1		6	

2		7	
3		8	
4		9	
5		0	

12.4. Расчет балки на поперечный изгиб

Стальная балка находится в состоянии плоского поперечного изгиба (табл. 12.4б). Данные для расчета балки приведены в табл. 12.4а.

Требуется:

1) определить внутренние усилия и построить эпюры изгибающих моментов M и поперечных сил Q;

2) подобрать поперечное сечение балки из условия прочности по нормальным напряжениям в нескольких вариантах исполнения: двутавровое, прямоугольное при отношении высоты к ширине $h/b = 1{,}5$, круглое или трубчатое при отношении $d/D = 0{,}8$;

3) сравнить металлоемкости подобранных сечений и выбрать наиболее рациональное;

4) выполнить проверку прочности экономически обоснованного сечения по касательным напряжениям;

5) построить эпюры нормальных и касательных напряжений в наиболее опасных сечениях балки;

6) если это необходимо, проверить эквивалентные напряжения в опасных точках сечения.

Данные для проектного расчета: допускаемые нормальные напряжения $[\sigma] = 160$ МПа, допускаемые касательные напряжения $[\tau] = 80$ МПа.

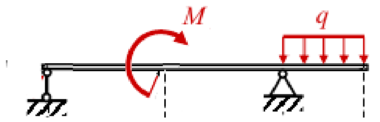
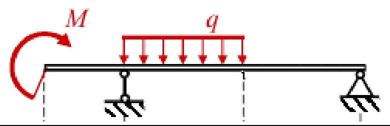
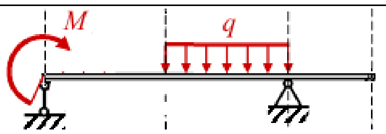
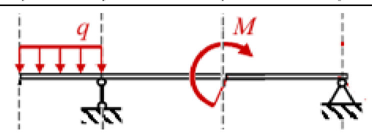
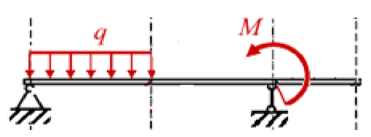
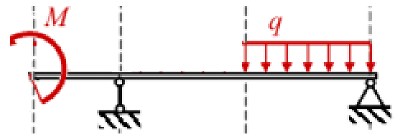
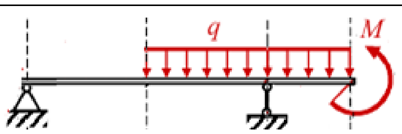
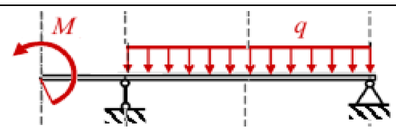
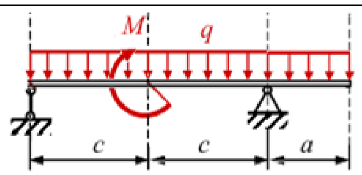
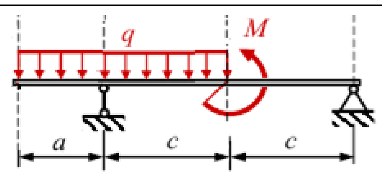
Таблица 12.4а

Данные для расчета балки

Первая цифра варианта	q, кН/м	M, кНм	a, м	с, м
0	40	25	0,5	1,4
1	35	20	0,6	1,5
2	30	15	0,7	1,9
3	25	10	0,8	2,2
4	20	35	0,9	2,3
5	15	45	1,0	1,9
6	30	30	0,5	2,2
7	10	25	0,6	2,3
8	25	20	0,7	0,9
9	20	15	0,8	1,0

Таблица 12.4б

Заданная расчетная схема балки

Вторая цифра варианта	Расчетная схема балки	Вторая цифра варианта	Расчетная схема балки
1		2	
3		4	
5		6	
7		8	
9		0	

12.5. Проверка жесткости балки

Стальная балка двутаврового сечения (табл. 12.4б), подвержена деформациям изгиба, сечение балки удовлетворяет условиям прочности, что подтверждается предыдущим расчетом в задаче 12.4.

Требуется:

1) записать дифференциальное уравнение упругой линии балки, используя рекомендации метода Клебша;

2) выполнить интегрирование уравнения и с помощью начальных параметров получить: уравнение углов поворота θ сечений балки; уравнение прогибов y оси балки;

3) вычислить углы поворота θ на конце консоли и над опорами балки, а также ее прогибы на конце консоли и в середине пролета;

4) проверить соответствие двутаврового сечения балки требованиям допустимых прогибов;

5) если условие жесткости не удовлетворяется, то следует изменить сечение балки на более жесткое.

Данные для проверочного расчета: модуль упругости материала балки $E = 2 \cdot 10^5$ $МПа$, значения допускаемых прогибов $[f]$ принять по табл. 12.5 в зависимости от пролета балки.

Таблица 12.5

Значения допускаемых прогибов балки

Вторая цифра варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$[f]$, м	$\frac{l}{300}$	$\frac{l}{350}$	$\frac{l}{300}$	$\frac{l}{150}$	$\frac{l}{200}$	$\frac{l}{250}$	$\frac{l}{300}$	$\frac{l}{400}$	$\frac{l}{500}$	$\frac{l}{400}$

12.6. Расчет бруса на прочность при внецентренном сжатии

Короткий брус сжимается силой F, действующей параллельно его продольной оси. Поперечное сечение бруса симметрично, его форма указана в табл. 12.6 б. Размеры сечения даны в табл. 12.6а. Сила F приложена в одной из точек сечения: A, B или C.

Требуется:

1) вычислить геометрические характеристики заданного сечения бруса: площадь, координаты центра тяжести; осевые моменты инерции, радиусы инерции;

2) определить внутренние усилия в сечениях бруса, вызванные внецентренным воздействием сжимающей силы F;

3) составить уравнение нейтральной линии сечения бруса;

4) определить наиболее опасные точки сечения;

5) из условия прочности при внецентренном сжатии определить величину допускаемой сжимающей силы $[F]$ на брус, если расчетные сопротивления материала при растяжении и сжатии соответственно равны $R_{\text{Р}} = 2$ МПа, $R_{\text{С}} = 15$ МПа;

6) при допускаемом значении силы $[F]$, вычислить нормальные напряжения в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии;

7) построить эпюру нормальных напряжений.

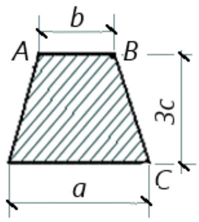
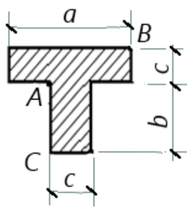
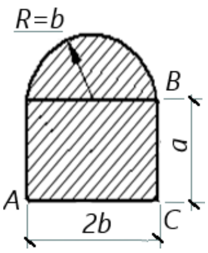
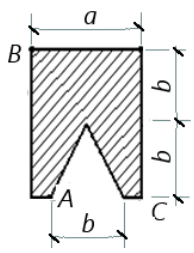
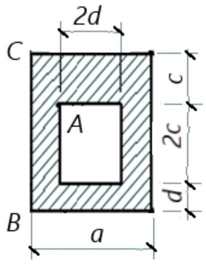
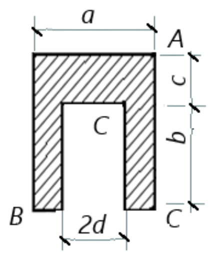
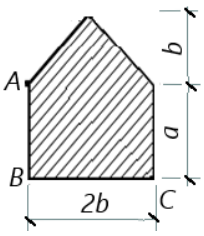
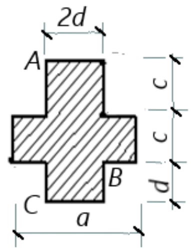
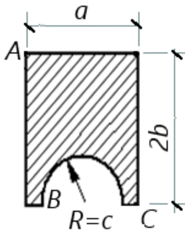
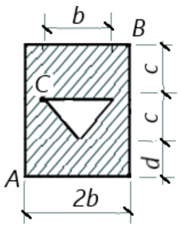
Таблица 12.6а

Данные для расчета бруса

Первая цифра варианта	a, см	b, см	c, см	d, см	Полюс силы F
0	30	20	15	2	A
1	24	18	12	4	B
2	22	15	10	3	C
3	28	12	8	4	A
4	18	10	6	3	B
5	15	8	4	2	C
6	16	10	5	3	A
7	10	8	6	4	B
8	25	20	10	4	C
9	24	15	14	3	A

Таблица 12.6б

Заданные формы поперечного сечения бруса

Вторая цифра варианта	Поперечное сечение стержня	Вторая цифра варианта	Поперечное сечение стержня
1		6	
2		7	
3		8	
4		9	
5		0	

12.7. Расчет стержня на прочность при изгибе с кручением

Стержень трубчатого сечения с ломаной осью, жестко защемленный одним концом, находится под действием вертикальных и горизонтальных сил. Расчетные схемы стержня приведены в табл. 12.7б. Длины участков стержня и другие данные для расчета приведены в табл. 12.7а.

Требуется:

1) определить внутренние усилия, вызванные действием внешних сил, на разных участках ломаного стержня;
2) построить эпюры изгибающих и крутящих внутренних моментов, используя для их изображения аксонометрические проекции;
3) установить опасное сечение стержня и определить приведенный момент, используя 3-ю теорию прочности;
4) подобрать трубчатое сечение стержня при заданном соотношении внутреннего и наружного диаметров d/D;
5) проверить прочность подобранного сечения.

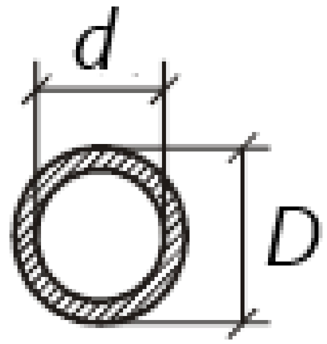


Рис. 12.1. Форма сечения ломаного стержня

Данные для расчета: допускаемые нормальные напряжения материала стержня $[\sigma] = 160$ МПа.

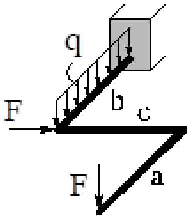
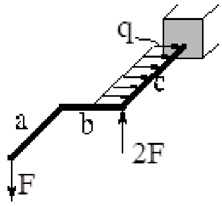
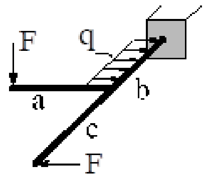
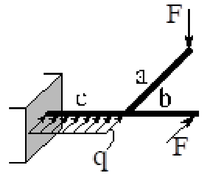
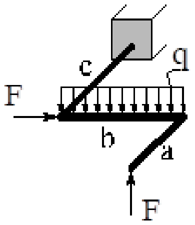
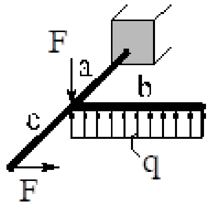
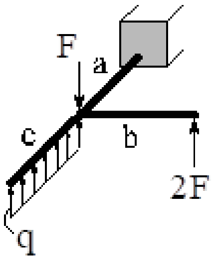
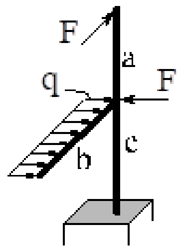
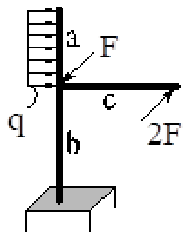
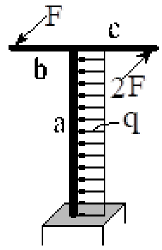
Таблица 12.7а

Данные для расчета стержня с ломаной осью

Первая цифра варианта	Длины участков стержня			Нагрузки		d/D
	a, м	b, м	c, м	q, кН/м	F, кН	
0	1,2	2,0	0,8	8	20	0,8
1	1,4	1,8	1,2	9	15	0,9
2	1,5	2,0	2,2	10	25	0,7
3	1,6	2,2	1,2	15	20	0,8
4	1,8	1,4	1,6	14	25	0,6
5	1,5	1,2	1,8	13	30	0,7
6	1,4	1,4	1,5	12	36	0,8
7	2,0	1,5	1,6	10	18	0,7
8	1,8	1,6	1,2	18	25	0,8
9	2,2	1,8	1,4	12	22	0,6

Таблица 12.7б

Заданная расчетная схема стержня

Вторая цифра варианта	Расчетная схема стержня	Вторая цифра варианта	Расчетная схема стержня
1		6	
2		7	
3		8	
4		9	
5		0	

12.8. Расчет тонкого стержня на устойчивость

Тонкий прямой стержень заданного прокатного профиля, закрепленный в двух плоскостях, как показано в табл. 12.8б, находится под действием сжимающей силы F. Значение силы и длина стержня указаны в табл. 12.8а.

Требуется:

1. определить приведенные длины стержня в каждой из двух вертикальных плоскостей и расположить прокатный профиль так, чтобы обеспечить его максимальную устойчивость в целом;

2. методом последовательного приближения подобрать наименьший номер прокатного профиля, который соответствует условию устойчивости стержня под действием приложенной силы;

3. итерации повторять до тех пор, пока разность $\Delta\varphi$ между соседними попытками не станут меньше 5 %;

4. на каждом этапе подбора сечения следует проверять соответствие гибкости стержня предельно допустимому значению $\lambda \leq \lambda_{max}$.

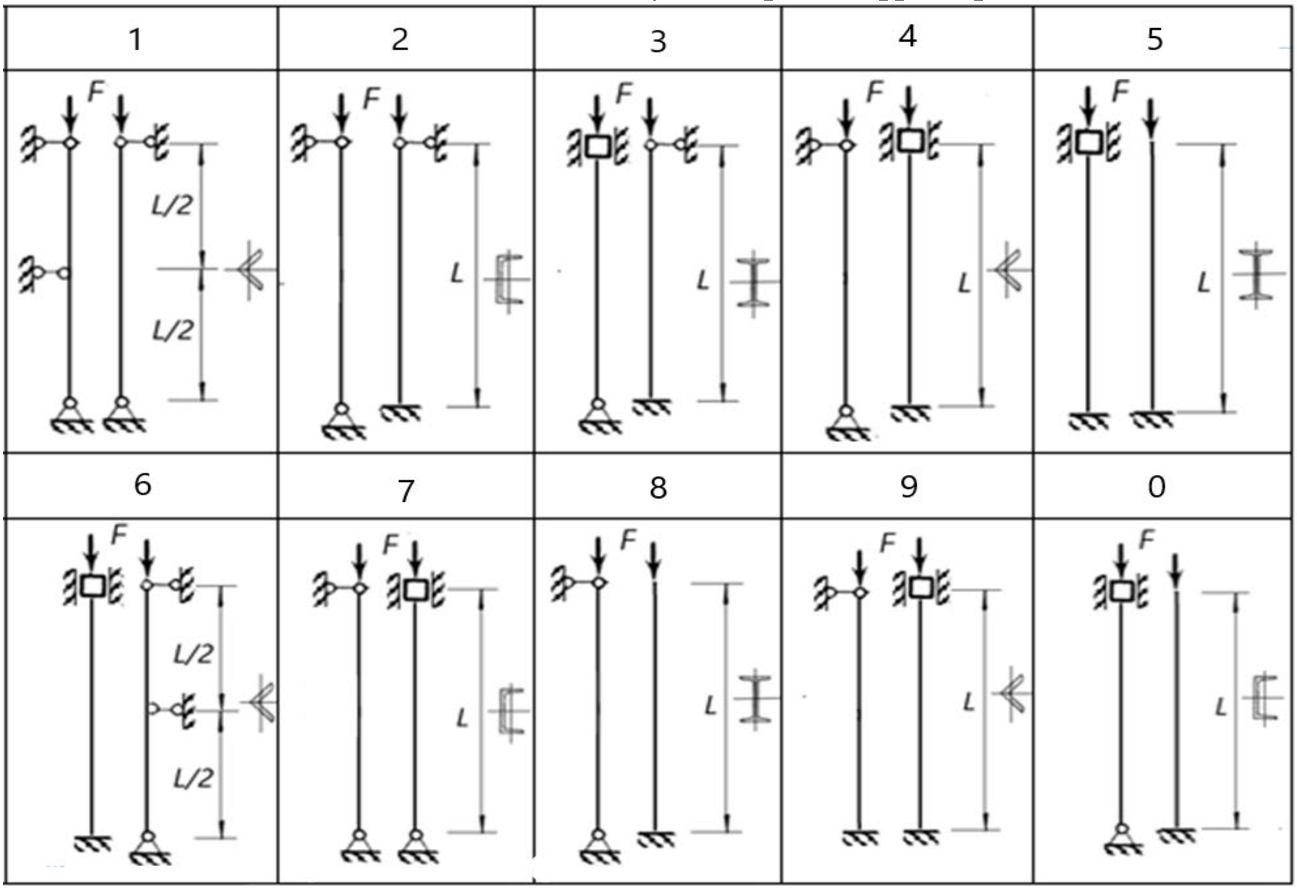
Таблица 12.8а

Данные для расчета стержня

Первая цифра варианта	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F, кН	100	120	160	180	200	140	260	220	240	250
L, м	3,8	2,6	2,4	2,5	2,0	2,7	2,2	2,9	3,0	3,2

Таблица 12.8б

Расчетная схема соответствует второй цифре варианта



ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Какие задачи решаются в разделе сопротивление материалов.
2. Какие объекты изучаются в разделе сопротивления материалов?
3. Что понимают под надежностью элементов конструкции?
4. Какие гипотезы и допущения приняты в сопротивлении материалов?
5. Как составляется расчетная схема конструкции?
6. Назовите элементы расчетной схемы.
7. Что принято считать внутренними усилиями, чем они вызваны?
8. В чем смысл метода сечений, каков порядок его применения?
9. Назовите внутренние усилия в поперечных сечениях стержней, укажите правила знаков.
10. Чем вызваны нормальные, касательные и полные напряжения? Какова их размерность?
11. Запишите интегральные зависимости между внутренними усилиями и напряжениями.
12. Чем вызваны линейные и угловые деформации? Назовите их размерности.
13. Назовите геометрические характеристики плоских сечений, их размерности.
14. Как определяют статический осевой момент сечения?
15. Как определяются координаты центра тяжести сечения?
16. Какие оси называют центральными?
17. Как определяются осевой, центробежный и полярный моменты инерции сечения относительно центральных осей?
18. Как изменятся осевые моменты инерции и центробежный момент инерции сечения при параллельном переносе осей?
19. Как изменятся осевые моменты инерции и центробежный момент инерции сечения при угловом повороте осей?
20. Что понимают под главными центральными осями сечения, как их определить?
21. Что называется радиусом инерции сечения?
22. Какие существуют методы определения физико-механических характеристик конструкционных материалов.
23. Как определяют напряжения в характерных точках диаграммы испытаний стандартных образцов на растяжение?
24. Как определяют упругие и остаточные деформации, а также модули упругости материала первого и второго рода?
25. Как определяют опасное и допускаемое напряжения для материалов?
26. Назовите виды напряженного состояния материала, запишите соответствующие тензоры напряжений.
27. Как определить напряжения на наклонных площадках при линейном напряженном состоянии материала?
28. Дайте трактовку законов постоянства суммы нормальных напряжений и парности касательных напряжений при плоском напряженном состоянии.

29. Как определить напряжения на наклонных площадках и наибольшие касательные напряжения при объемном напряженном состоянии материала?

30. Какие существуют критерии прочности, для каких материалов они применяются?

31. Какие напряжения испытывают стержни при действии на них продольных сил?

32. Запишите условие прочности сечения стержня при действии продольных сил.

33. Как выполнить проектный расчет стержня при действии продольных сил?

34. Как определяют деформации стержня при действии продольных сил?

35. Объясните порядок построения эпюр продольных сил, напряжений и деформаций стержня при действии продольных сил?

36. Какие напряжения испытывают стержни при действии на них поперечных сил?

37. Как определить положения главных площадок по отношению к направлению касательных напряжений чистого сдвига и значения главных напряжений?

38. Запишите условие прочности материала при действии напряжений смятия.

39. Как выполнить проектный расчет соединения на болтах или заклепках?

40. Как выполняется проектный расчет соединения на сварке?

41. Какой вид деформации называется кручением?

42. Запишите условие прочности сечения стержня при кручении.

43. Как выглядит эпюра касательных напряжений в поперечном сечении стержня?

44. Как выполнить проектный расчет стержня, при деформации кручения?

45. Как определяют деформации стержня при кручении?

46. Какие внутренние усилия испытывают стержни при чистом изгибе и поперечном изгибе?

47. Какие существуют дифференциальные зависимости при поперечном изгибе?

48. Запишите условия прочности сечения стержня по нормальным, касательным и эквивалентным напряжениям при поперечном изгибе.

49. Как выглядят эпюры нормальных напряжений и касательных напряжений при поперечном изгибе стержня?

50. Запишите уравнение упругой линии стержня при поперечном изгибе?

51. Какие условия накладывает метод Клебша на уравнения упругой линии?

52. Что понимают под сложным напряженным состоянием материала?

53. Какие силовые воздействия вызывают косой изгиб и сложный изгиб?

54. Запишите условия прочности сечения стержня по нормальным напряжениям при косом и сложном изгибе.

55. Как определить положение нейтральной линии сечения и распределение нормальных напряжений при косом и сложном изгибе?

56. Как определить деформации стержня при косом и сложном изгибе?

57. Как определяются нормальные напряжения при сложном сопротивлении стержня продольной силе с изгибом, как формулируются условия прочности?

58. Какой вид сложного сопротивления называется внецентренным сжатием?

59. Как определяются нормальные напряжения при внецентренном сжатии?

60. Запишите уравнение нейтральной линии сечения при внецентренном сжатии.

61. Как проверить прочность по нормальным напряжениям при внецентренном сжатии в наиболее удаленных от нейтральной линии точках сечения?

62. Какие напряжения в поперечном сечении стержня вызывает совместное действие изгиба с кручением?

63. Как распределяются нормальные напряжения и касательные напряжения в сечении стержня при изгибе с кручением?

64. Как проверить прочность опасной точки сечения при изгибе с кручением?

65. Чем опасна потеря устойчивости тонких стержней под действием сжимающей силы, приведите формы потери устойчивости?

66. Какая сила называется критической силой Эйлера, как ее рассчитать?

67. Как влияет способ крепления стержня на величину критической силы?

68. По какой формуле определяется гибкость стержня, предельная гибкость?

69. Как определить критические напряжения в стержне в зависимости от величины гибкости этого стержня?

70. Что называют коэффициентом запаса устойчивости и от чего он зависит?

71. Как записывается условие устойчивости центрально сжатого стержня?

72. Как выполнить проектный расчет центрально сжатого стержня?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Александров А. В. Сопротивление материалов: учеб. для вузов/ А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. — М.: Высш. шк., 2003. — 560 с.

2. Беляев Н. М. Сопротивление материалов / Н. М. Беляев. — М.: Наука, 1976. — 607 с.

3. Водопьянов В. И. Курс сопротивления материалов с примерами и задачами: учеб. пособие / В. И. Водопьянов, А. Н. Савкин, О. В. Кондратьев; ВолгГТУ. — Волгоград, 2012. — 136 с.

4. Горшков А. Г. Сопротивление материалов: учеб. пособие/ А. Г. Горшков, В. Н. Трошин, В. И. Шалашилин. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 544 с.

5. Сопротивление материалов : учеб пособие / Н. А. Костенко [и др]. — М.: Высш. шк., 2004. — 430 с.

6. Подскребко М. Д. Сопротивление материалов: учеб. / М. Д. Подскребко. — Минск : Выш. шк., 2007. — 797 с.

7. Потапова Л. Б. Механика материалов при сложном напряженном состоянии. Как прогнозируют предельные напряжения? — М.: «Издательство Машиностроение – 1», 2005. — 244 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение ... 3
1. Краткие теоретические положения курса ... 4
1.1. Основные понятия сопротивления материалов ... 4
1.2. Допущения и принципы сопротивления материалов ... 5
1.3. Понятие расчетной схемы ... 6
2. Внутренние усилия, напряжения и деформации стержней ... 7
2.1. Метод сечений ... 7
2.2. Внутренние напряжения ... 9
2.3. Деформации и перемещения ... 11
3. Геометрические характеристики плоских сечений ... 12
3.1. Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей ... 13
3.2. Изменение моментов инерции при повороте осей ... 15
3.3. Главные оси и главные моменты инерции сечения ... 16
3.4. Геометрические характеристики практически важных сечений ... 17
4. Механические характеристики материалов ... 19
4.1. Диаграмма испытания стандартного образца на растяжение ... 19
4.2. Опасные и допускаемые напряжения ... 22
5. Расчет стержней на действие продольных сил ... 23
5.1. Расчеты на прочность при растяжении (сжатии) ... 23
5.2. Деформации при центральном растяжении (сжатии) ... 25
6. Напряженно–деформированное состояние ... 25
6.1. Линейное напряженное состояние ... 27
6.2. Плоское напряженное состояние ... 28
6.3. Объемное напряженное состояние ... 30
6.4. Понятия о теориях (гипотезах) прочности ... 31
7. Расчет соединений на срез (сдвиг) и смятие ... 33
7.1. Напряжения при сдвиге ... 33
7.2. Условие прочности при смятии ... 36
7.3. Расчет болтовых и заклепочных соединений ... 36
7.4. Расчет сварных соединений ... 38
8. Работа стержней на кручение ... 39
8.1. Напряжения и деформации кручения ... 40
8.2. Расчеты на прочность и жесткость при кручении ... 41
9. Плоский поперечный изгиб ... 42

9.1. Дифференциальные зависимости при изгибе ... 44
9.2. Нормальные напряжения при изгибе ... 45
9.3. Расчеты на прочность по нормальным напряжениям ... 47
9.4. Расчеты на прочность по касательным напряжениям ... 49
9.5. Проверка жесткости балки ... 51
10. Сложное сопротивление ... 52
10.1. Косой и сложный изгибы ... 52
10.2. Изгиб с растяжением (сжатием) ... 55
10.3. Внецентренное растяжение (сжатие) ... 56
10.4. Изгиб с кручением ... 57
11. Устойчивость тонких стержней ... 59
11.1. Влияние способа крепления стержня на критическую силу ... 61
11.2. Расчет стержней на устойчивость ... 63
12. Задачи для самостоятельного решения ... 64
12.1. Определение геометрических характеристик сечения ... 64
12.2. Расчет бруса на действие продольных сил ... 65
12.3. Расчет круглого вала на действие крутящих моментов ... 67
12.4. Расчет балки на поперечный изгиб ... 68
12.5. Проверка жесткости балки ... 69
12.6. Расчет бруса на прочность при внецентренном сжатии ... 70
12.7. Расчет стержня на прочность при изгибе с кручением ... 72
12.8. Расчет тонкого стержня на устойчивость ... 73
Вопросы для самоконтроля ... 75
Библиографический список ... 78

Учебное издание

Зульфикарова Татьяна Владимировна

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
(СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ)

Учебное пособие

Издается в авторской редакции

Подписано к изданию 15.03.2024.
Объем 3,4 Мб.
Тираж 10 экз.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»
394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84