

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Филиал Федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования**

**«Воронежский государственный технический университет»
в городе Борисоглебске**

Кафедра строительства

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

**к выполнению практических работ
для студентов технических направлений
всех форм обучения**

Воронеж 2024

УДК 514.742.4
ББК 22.16

Составители: Т. В. Зульфикарова, Л. И. Матвеева

Элементы векторного анализа: методические указания к выполнению практических работ для студентов технических направлений всех форм обучения / ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»; сост.: Т. В. Зульфикарова, Л. И. Матвеева. Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2024. – 42 с.

Методические указания предназначены для поддержки практических работ по дисциплинам «Физика», «Тепломассообмен», «Механика жидкости и газа», «Теория упругости» и др.

Предназначены для студентов технических направлений всех форм обучения.

Методические указания подготовлены в электронном виде и содержатся в файле МУ_ЭВА_ПР.pdf.

Ил. 53. Библиогр.: 7 назв.

УДК 514.742.4
ББК 22.16

Рецензент - заведующий кафедрой естественнонаучных и общеобразовательных дисциплин Борисоглебского филиала ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университета, кандидат физико-математических наук, доцент
С.Е.Зюзин.

*Издается по решению редакционно-издательского совета
Воронежского государственного технического университета*

ВВЕДЕНИЕ

В данных методических указаниях разъясняется смысл основных понятий и операций векторного анализа, приводятся примеры решения типовых задач.

Векторный анализ (другое название – теория поля) – это раздел математики, в котором изучаются скалярные, векторные, тензорные поля с применением дифференциального и интегрального исчисления. Теория поля изучает основные свойства полей, устанавливает и исследует связи между величинами, характеризующими поле.

В методических указаниях много внимания уделяется графическому сопровождению математических операций и преобразований, как в декартовых координатах, так и в других системах отсчетов, соответствующих симметрии исследуемого поля.

Со скалярными и векторными полями студенты технических направлений встречаются при изучении таких дисциплин, как «Физика», «Тепломассообмен», «Теория упругости», «Механика жидкостей и газов» и др. Данные методические указания помогут студентам приобрести исходный уровень знаний и навыков, необходимый для успешного освоения этих дисциплин.

1. СКАЛЯРНЫЕ ПОЛЯ

1.1. Понятие скалярного поля

Если каждой точке плоской (пространственной) области G поставлено в соответствие некоторое число, то говорят, что в области G задано скалярное поле.

Понятие скалярного поля фактически ничем не отличается от понятия функции нескольких переменных, поэтому и обозначаются скалярные поля аналогично: $\varphi(M)$, $\psi(x, y, z)$, $F(\vec{r})$ и т. д.

Примеры скалярных полей

В метеорологии часто рассматривают поле температур. Для наглядного изображения плоских скалярных полей используются линии уровня:

$$\varphi(x, y) = C_i,$$

где $C_i = C_{i-1} + \Delta C$ – постоянная величина, изменяемая с некоторым шагом ΔC .

Некоторые линии уровня имеют специальные названия: изотермы (рис.1), изобары (линии одинакового давления) и т. д.

Распределение электростатического потенциала также является пространственным скалярным полем.

Для наглядного изображения пространственных скалярных полей часто используют поверхности одинакового значения поля, – так называемые поверхности уровня: $\varphi(x, y, z) = C$.

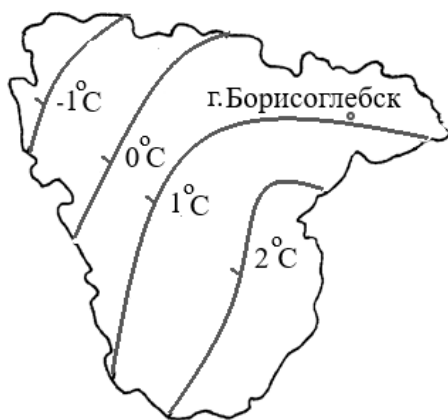


Рис. 1. Изотермы поля температур Воронежской области

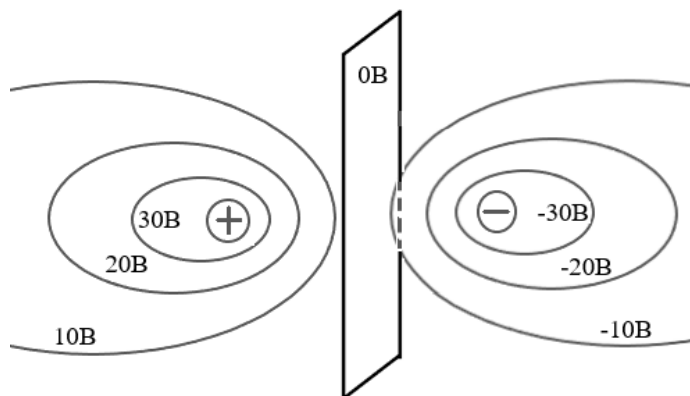


Рис. 2. Эквипотенциальные поверхности поля точечных зарядов и пластины

Для изображения электростатического поля часто используют эквипотенциальные поверхности – поверхности одинакового потенциала (рис. 2).

Чем гуще в данной области плоскости (пространства) расположены линии (поверхности) одинакового значения поля, тем сильнее меняется поле в этой области.

1.2. Производная скалярного поля по направлению

Производной скалярного поля $\varphi(\vec{r})$ в точке с радиус-вектором $\vec{r}$ по направлению $\vec{n}$ называется предел

$$\frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial \vec{n}} = \varphi'_{\vec{n}}(\vec{r}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(\vec{r} + \varepsilon \vec{n}) - \varphi(\vec{r})}{\varepsilon}.$$

Здесь $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta)$ – единичный вектор на плоскости (рис. 3), указывающий направление; $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ – единичный вектор в пространстве (рис. 4).

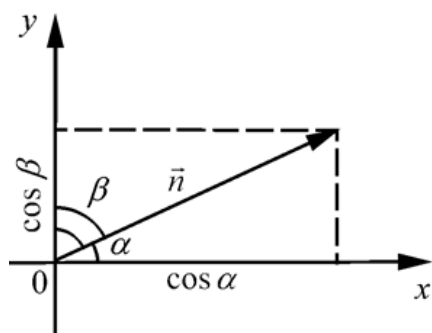


Рис. 3. Проекции единичного вектора $\vec{n}$ на координатные оси плоскости

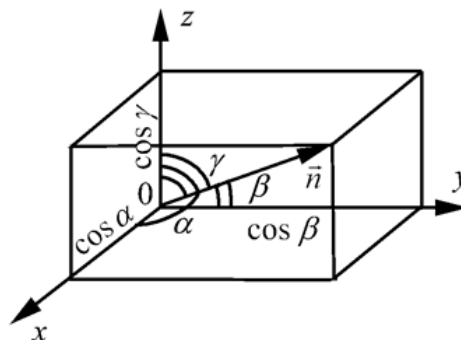


Рис. 4. Проекции единичного вектора $\vec{n}$ на координатные оси в пространстве

Свойства производной по направлению

Рассмотрим плоское скалярное поле деформаций $u = \varphi(x, y)$. Если $\frac{\partial \varphi(M)}{\partial \vec{n}} > 0$, то в данном направлении $\vec{n}$ скалярное поле возрастает, если $\frac{\partial \varphi(M)}{\partial \vec{n}} < 0$, то поле убывает. Из рисунка 5 видно, что скалярное поле деформаций возрастает по направлению $\vec{n}_1$ и убывает по направлению $\vec{n}_2$:

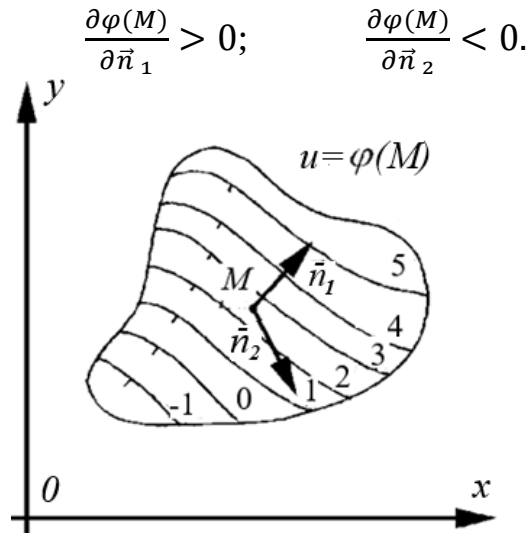


Рис. 5. Схема изолиний плоского поля деформаций

Модуль частной производной по направлению $\left| \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \right|$ характеризует скорость изменения поля в заданном направлении. В приведенном примере

$$\left| \frac{\partial \varphi(M)}{\partial \vec{n}_1} \right| > \left| \frac{\partial \varphi(M)}{\partial \vec{n}_2} \right|.$$

Для производной скалярного поля по направлению, как и для производной функции одной переменной, верны следующие свойства:

– производная алгебраической суммы скалярных полей по направлению равна сумме производных этих полей по данному направлению

$$(\varphi \pm \Psi)'_{\vec{n}} = \varphi'_{\vec{n}} \pm \Psi'_{\vec{n}};$$

– производная произведения скалярного поля на число равна произведению данного числа на производную скалярного поля

$$(c \cdot \varphi)'_{\vec{n}} = c \cdot \varphi'_{\vec{n}};$$

– производная произведения двух скалярных полей по заданному направлению соответствует производной произведения двух функций одной переменной

$$(\varphi \cdot \Psi)'_{\vec{n}} = \varphi'_{\vec{n}} \cdot \Psi + \varphi \cdot \Psi'_{\vec{n}};$$

– производная частного скалярных полей по заданному направлению соответствует производной частного двух функций одной переменной

$$\left(\frac{\varphi}{\Psi} \right)'_{\vec{n}} = \frac{\varphi'_{\vec{n}} \cdot \Psi - \varphi \cdot \Psi'_{\vec{n}}}{\Psi^2}.$$

Задача 1. Доказать, что для плоских скалярных полей справедливо равенство

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos \beta.$$

Здесь $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta)$ – единичный вектор.

Решение

По определению дифференцируемой функции двух переменных имеем

$$\varphi(\vec{r} + \Delta \vec{r}) - \varphi(\vec{r}) = \frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial y} dy + o(\Delta \vec{r}).$$

Пусть $\Delta \vec{r} = \varepsilon \vec{n}$, тогда перемещение в заданном направлении можно рассматривать, как $\Delta \vec{r} = (\varepsilon \cdot \cos \alpha, \varepsilon \cdot \cos \beta)$, отсюда

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r} + \varepsilon \vec{n}) - \varphi(\vec{r}) &= \frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial x} \varepsilon \cdot \cos \alpha + \frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial y} \varepsilon \cdot \cos \beta + o(\varepsilon), \\ \frac{\varphi(\vec{r} + \varepsilon \vec{n}) - \varphi(\vec{r})}{\varepsilon} &= \frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial y} \cos \beta + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Перейдя к пределу (при $\varepsilon \rightarrow 0$), получим

$$\frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial y} \cos \beta.$$

Аналогичное равенство можно получить для пространственных скалярных полей

$$\frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial z} \cos \gamma.$$

1.3. Градиент скалярного поля

Градиентом плоского скалярного поля в точке M называется вектор, определяемый равенством $\text{grad } \varphi(M) = \frac{\partial \varphi(M)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi(M)}{\partial y} \vec{j}$.

Для пространственного поля градиент имеет вид

$$\text{grad } \varphi(M) = \frac{\partial \varphi(M)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi(M)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi(M)}{\partial z} \vec{k}.$$

Основное свойство градиента

Градиент определяет максимальную скорость изменения скалярного поля, как по величине, так и по направлению. Действительно, из задачи 1 имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(M)}{\partial \vec{n}} &= \frac{\partial \varphi(M)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \varphi(M)}{\partial y} \cos \beta = \text{grad } \varphi(M) \cdot \vec{n} = \\ &= |\text{grad } \varphi(M)| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos \theta = |\text{grad } \varphi(M)| \cdot \cos \theta. \end{aligned}$$

Из полученного равенства следует, что производная $\frac{\partial \varphi(M)}{\partial \vec{n}}$ максимальна, когда $\theta = 0$. Отсюда очевидно, что направление вектора $\text{grad } \varphi(M)$ указывает направление наибольшего возрастания поля (рис. 6), а модуль $|\text{grad } \varphi(M)|$ ха-

характеризует наибольшую скорость возрастания поля по величине:
 $|grad \varphi(M)| = \left(\frac{\partial \varphi(M)}{\partial \vec{n}} \right)_{max}.$

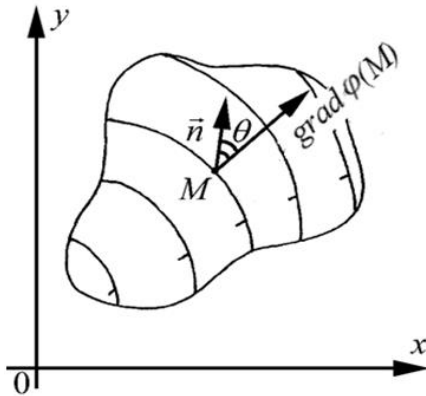


Рис. 6. Направление градиента скалярного поля

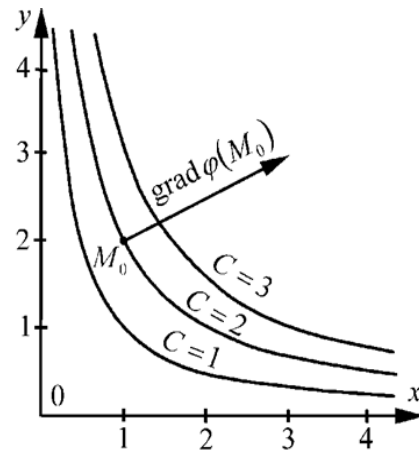


Рис. 7. Линии уровня поля $\varphi(M) = x \cdot y$ и вектор градиента поля в точке $M_0(1,2)$

Задача 2. Дано скалярное поле $\varphi(M) = x \cdot y$.

Найти $grad \varphi(M_0)$ в точке M_0 с координатами $x = 1, y = 2$.

Показать, что $grad \varphi(M_0)$ имеет направление наибольшего возрастания поля в точке M_0 , следовательно, его вектор ориентирован перпендикулярно линии уровня поля, проходящей через точку M_0 .

Решение

Построим линии уровня данного поля, находящиеся в первом квадранте (рис.7). Вектор градиента определим по его проекциям на координатные оси:

$$grad \varphi(M_0) = \frac{\partial \varphi(M_0)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi(M_0)}{\partial y} \vec{j} = y \cdot \vec{i} + x \cdot \vec{j} = 2\vec{i} + 1\vec{j}.$$

Из рисунка 7 видно, что вектор $grad \varphi(M_0)$ направлен перпендикулярно линии уровня $\varphi(M) = x \cdot y = 2$, т.е. показывает, в каком направлении поле растет наиболее быстро.

1.4. Оператор Лапласа

Оператором Лапласа называется дифференциальный оператор, обозначаемый Δ и определенный для плоских полей равенством

$$\Delta \varphi(x, y) = \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2}.$$

Для пространственных полей равенством

$$\Delta \varphi(x, y, z) = \frac{\partial^2 \varphi(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x, y, z)}{\partial z^2}.$$

Отсюда операторное обозначение оператора Лапласа будет иметь вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

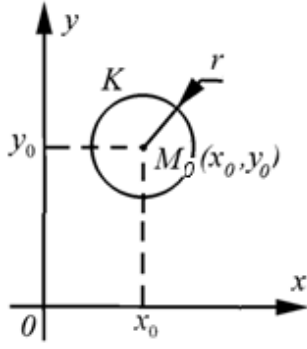


Рис. 8. Схема вычисления оператора Лапласа

Значение оператора Лапласа в точке (M_0) показывает, как соотносится значение поля в этой точке со средним значением поля в окрестности этой точки.

Докажем это свойство оператора Лапласа для плоских полей. Определим среднее значение поля $\varphi(x, y)$ в круге K радиуса r (рис.8), очерченном вокруг точки $M_0(x_0, y_0)$:

$$\varphi_{\text{ср}}(K) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_K \varphi(x, y) ds.$$

Используем разложение функции $\varphi(x_0, y_0)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$:

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{ср}}(K) &= \frac{1}{\pi r^2} \iint_K [\varphi(x_0, y_0) + \varphi'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + \varphi'_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &\quad + \varphi''_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2\varphi''_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) \\ &\quad + \varphi''_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 + \dots] ds = \\ &= \frac{1}{\pi r^2} [\varphi(x_0, y_0) \iint_K ds + \varphi'_x(x_0, y_0) \iint_K (x - x_0) ds + \varphi'_y(x_0, y_0) \iint_K (y - y_0) ds + \\ &\quad + \varphi''_{xx}(x_0, y_0) \iint_K (x - x_0)^2 ds + 2\varphi''_{xy}(x_0, y_0) \iint_K (x - x_0)(y - y_0) ds + \\ &\quad + \varphi''_{yy}(x_0, y_0) \iint_K (y - y_0)^2 ds + \dots] \end{aligned}$$

Здесь

$$\iint_K (x - x_0) ds = \iint_K (y - y_0) ds = \iint_K (x - x_0)(y - y_0) ds = 0;$$

$$\iint_K ds = \pi r^2; \quad \iint_K (x - x_0)^2 ds = \iint_K (y - y_0)^2 ds = I > 0.$$

Обозначим $k = \frac{I}{\pi r^2} > 0$, тогда $\varphi_{\text{ср}}(K) = \varphi(x_0, y_0) + k(\varphi''_{xx}(x_0, y_0) + \varphi''_{yy}(x_0, y_0)) + \dots = \varphi(x_0, y_0) + k \cdot \Delta \varphi(x_0, y_0) + \dots$

Окончательно получаем

$$\Delta\varphi(x_0, y_0) = \frac{1}{k} \left(\varphi_{\text{ср}}(K) - \varphi(x_0, y_0) \right) - \dots,$$

что соответствует определению оператора Лапласа.

Пусть $\varphi(x, y)$ – распределение температур в плоской пластине.

Если в точке $M_0(x_0, y_0)$ значение оператора $\Delta\varphi(x_0, y_0) < 0$, то имеем $\varphi_{\text{ср}}(K) < \varphi(x_0, y_0)$ – температура в данной точке выше, чем средняя температура вокруг нее, следовательно, в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ температура падает тем быстрее, чем больше модуль оператора Лапласа $|\Delta\varphi(x_0, y_0)|$;

Если $\Delta\varphi(x_0, y_0) > 0$, то $\varphi_{\text{ср}}(K) > \varphi(x_0, y_0)$ – температура в точке $M_0(x_0, y_0)$ ниже, чем средняя температура вокруг нее, следовательно, при удалении от данной точки температура растет тем быстрее, чем больше модуль оператора Лапласа;

Если $\Delta\varphi(x_0, y_0) = 0$, то это значит, что $\varphi_{\text{ср}}(K) = \varphi(x_0, y_0)$ – температура в точке $M_0(x_0, y_0)$ равна средней температуре вокруг нее, следовательно, температура в окрестности данной точки постоянна.

Следует заметить, что оператор Лапласа, вычисленный в окрестности выбранной точки, дает ответ на вопрос, как изменяется скалярное поле вблизи этой точки: убывает, растет или остается постоянным. В других областях скалярного поля потребуется дополнительное исследование.

2. ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

2.1. Понятие векторного поля

Если каждой точке плоской (пространственной) области G поставлен в соответствие некоторый вектор, то будем говорить, что в области G задано векторное поле.

Обозначения векторных полей: $\vec{A}(\vec{r})$, $\vec{E}(M)$, $\vec{a}(x, y, z)$ и т.п.

Примеры векторных полей

1. В метеорологии часто рассматривают плоское векторное поле воздушных потоков. При этом каждой точке местности соответствует вектор скорости ветра, направленный по касательной к линии потока (рис. 9).

2. Распределение напряженности электрического поля также является векторным полем, но уже пространственным (рис.10). Вектор напряженности в каждой точке поля направлен по касательной к линии напряженности.

Таким образом, для наглядного изображения векторных полей используют векторные линии – кривые, касательные к которым в каждой точке имеют направление вектора поля.

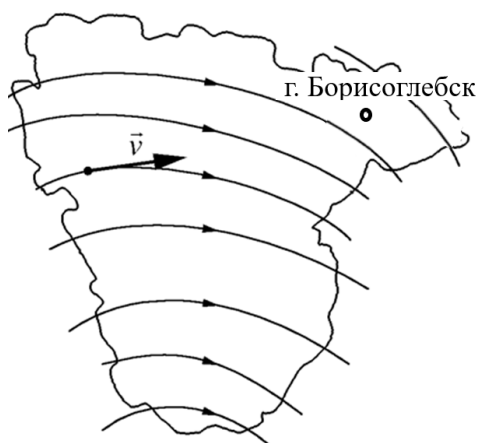


Рис. 9. Схема векторного поля скоростей воздушных потоков

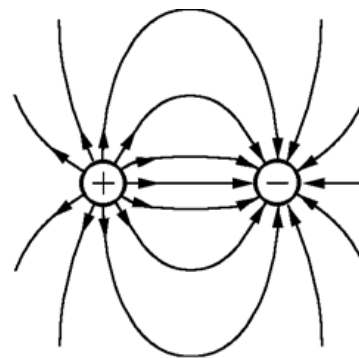


Рис. 10. Линии напряженности электростатического поля зарядов

Векторные линии некоторых физических полей имеют определенный физический смысл и собственные наименования, например:

- 1) в поле скоростей движущейся жидкости векторными линиями являются линии тока жидкости;
- 2) в электрическом поле векторными линиями являются силовые линии, а в магнитном – линии магнитной индукции.

Задача 3. Построить векторные линии поля, заданного уравнением $\vec{A}(x, y) = x \cdot \vec{i} + 3y \cdot \vec{j}$.

Решение. Пусть (L) – векторная линия некоторого поля (рис. 11). Рассмотрим малую дугу АВ, которую можно приближенно считать отрезком. Так как вектор $\vec{AB} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j}$, опирающийся на дугу АВ, сонаправлен вектору $\vec{A}(x, y) = A_x(x, y) \cdot \vec{i} + A_y(x, y) \cdot \vec{j}$, касательному векторной линии, то их компоненты пропорциональны

$$\frac{dx}{A_x(x, y)} = \frac{dy}{A_y(x, y)}, \text{ следовательно, } \frac{dy}{dx} = \frac{A_y(x, y)}{A_x(x, y)}.$$

Следовательно, получили дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y}{x}.$$

Для решения разделяем переменные и выполняем интегрирование:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} &= 3 \frac{dx}{x}, & \int \frac{dy}{y} &= 3 \int \frac{dx}{x}, \\ \ln|y| &= 3 \ln|x| + \ln C & C > 0, & |y| = C \cdot |x|^3, \\ & y = C \cdot x^3. \end{aligned}$$

Получено уравнение, описывающее систему кубических парабол, и представляющее общее решение задачи 3. Множество векторных линий, описываемых уравнением $y = C \cdot x^3$ ($C \in \mathbb{R}$) показано на рисунке 12.

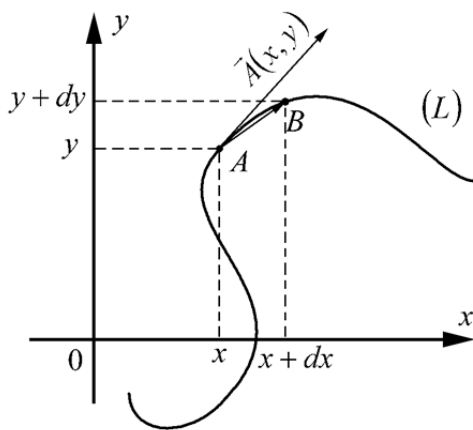


Рис. 11. Схема получения решения

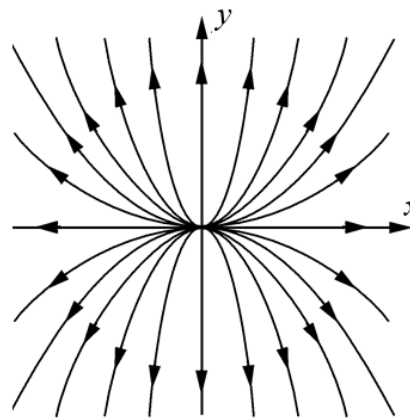


Рис. 12. Векторные линии поля $\vec{A}(x, y)$

Все векторные линии исходят из начала координат при $x = 0$, $y = 0$. При $C > 0$ векторные линии поля расположены в 1 и 3 квадрантах, а при $C < 0$ – в 2 и 4 квадрантах.

Аналогично, векторные линии пространственного поля

$$\vec{A}(x, y, z) = A_x(x, y, z) \cdot \vec{i} + A_y(x, y, z) \cdot \vec{j} + A_z(x, y, z) \cdot \vec{k}$$

должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{A_x(x, y, z)} = \frac{dy}{A_y(x, y, z)} = \frac{dz}{A_z(x, y, z)}.$$

2.2. Взаимное положение векторных линий

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что через точку $M_0(x_0, y_0)$ проходит единственная интегральная кривая уравнения $y' = f(x, y)$, если функция $f(x, y)$ непрерывна, а ее производная $f'_y(x, y)$ конечна в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 13).

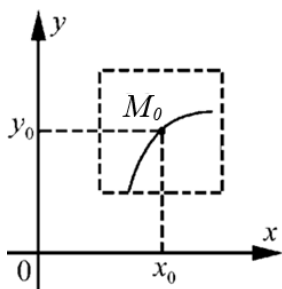


Рис. 13. Интегральная кривая уравнения $y' = f(x, y)$ вблизи точки M_0

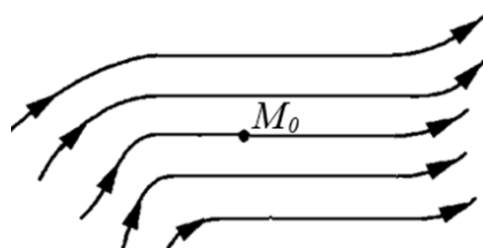


Рис. 14. Вид векторных линий вблизи не особых точек

Следовательно, если хотя бы одно из уравнений $y' = \frac{A_y(x,y)}{A_x(x,y)}$ или $x' = \frac{A_x(x,y)}{A_y(x,y)}$ конечно в окрестности точки M_0 , то через точку M_0 будет проходить единственная векторная линия. Такие точки называются **не особыми**. Вблизи них векторные линии имеют вид почти параллельных, слегка искривленных линий (рис. 14).

Если оба уравнения не удовлетворяют данному условию даже в самой малой окрестности точки M_0 , то такая точка называется **особой**. Векторное поле в окрестности таких точек может иметь сложный вид (рис. 15).



Рис. 15 Вид векторных линий вблизи особых точек

В реальных физических векторных полях особые точки обычно возникают, когда проекции векторного поля A_x , A_y , A_z обращаются в бесконечность. В качестве примера приведем электростатическое поле точечного заряда с напряженностью (рис.16)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot \vec{r}.$$

Для большинства векторных полей, имеющих физический смысл (поле скоростей текущей жидкости, гравитационные, электрические, магнитные и др. поля) справедливо утверждение: чем больше густота векторных линий, тем больше значение модуля векторного поля (рис. 16, 17).

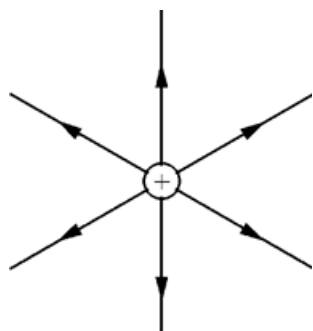


Рис. 16. Поле напряженности точечного заряда

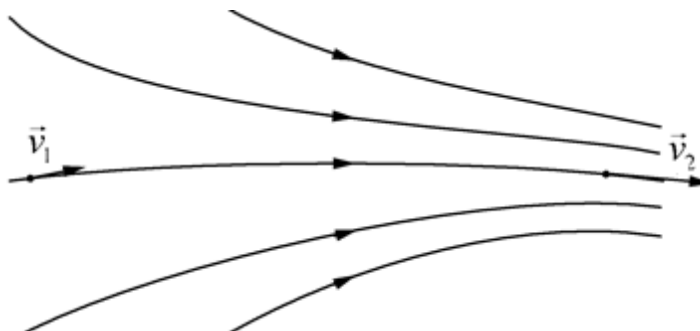


Рис. 17. Поле скоростей текущей жидкости

2.3. Формула Остроградского–Гаусса

В случае существования обоих интегралов верно равенство

$$\begin{aligned} & \iiint_{(V)} \left(\frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial A_z(x, y, z)}{\partial z} \right) dV = \\ & = \oiint_{(S)} (A_x(x, y, z) \cos \alpha + A_y(x, y, z) \cos \beta + A_z(x, y, z) \cos \gamma) dS. \end{aligned}$$

Здесь $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ – направляющие косинусы вектора внешней нормали $\vec{n}$, проведенного к поверхности (S) в точке с координатами (x, y, z) .

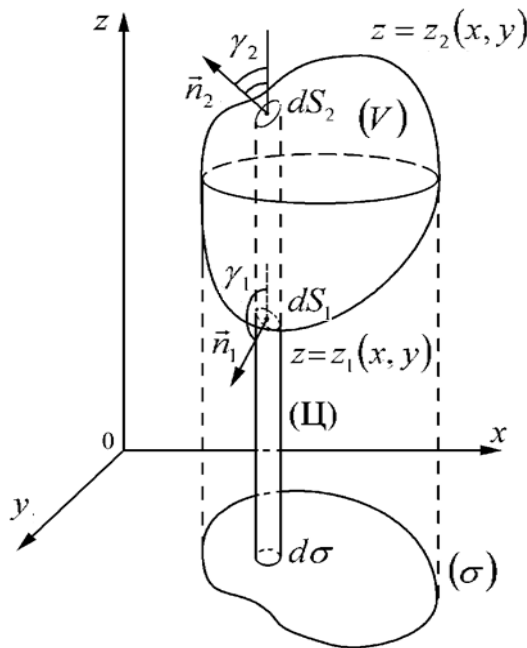


Рис. 18. Схема к доказательству формулы Остроградского-Гаусса

Доказательство

Пусть некоторая область объема (V) ограничена замкнутой поверхностью (S) , которая является объединением двух поверхностей (рис. 18): нижней S_H с уравнением $z = z_1(x, y, z)$ и верхней $S_B - z = z_2(x, y, z)$.

Пусть (σ) – проекция области (V) , на плоскость xOy . Рассмотрим очень узкий цилиндр (Π) пересекающий поверхность (S) по двум площадкам dS_1 и dS_2 .

Тогда справедливо равенство

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial A_z}{\partial z} dV = \iint_{(\sigma)} d\sigma \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial A_z}{\partial z} dz.$$

Используем формулу Ньютона-Лейбница

$$\begin{aligned} \iint_{(\sigma)} A_z \Big|_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} d\sigma &= \iint_{(\sigma)} (A_z(x, y, z_2(x, y)) - A_z(x, y, z_1(x, y))) d\sigma = \\ &= \iint_{(\sigma)} A_z(x, y, z_2(x, y)) d\sigma - \iint_{(\sigma)} A_z(x, y, z_1(x, y)) d\sigma. \end{aligned}$$

Так как по верхней части поверхности $d\sigma = \cos \gamma_2 \cdot ds$, а по нижней части поверхности $d\sigma = -\cos \gamma_1 \cdot ds$, получаем

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial A_z}{\partial z} dV = \iint_{(S_B)} A_z(x, y, z) \cos \gamma \cdot ds - \iint_{(S_H)} A_z(x, y, z) (-\cos \gamma) \cdot ds =$$

$$= \oint_S A_z(x, y, z) \cos \gamma \cdot ds.$$

Аналогично рассуждая, запишем

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial A_x}{\partial x} dV = \oint_S A_x(x, y, z) \cos \alpha \cdot ds,$$

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial A_y}{\partial y} dV = \oint_S A_y(x, y, z) \cos \beta \cdot ds.$$

Здесь α и β – углы между $\vec{n}$ и координатными осями Ox и Oy . Сложим три полученных равенства и окончательно получим

$$\iiint_{(V)} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dV = \oint_S (A_x \cos \alpha + A_y \cos \beta + A_z \cos \gamma) ds.$$

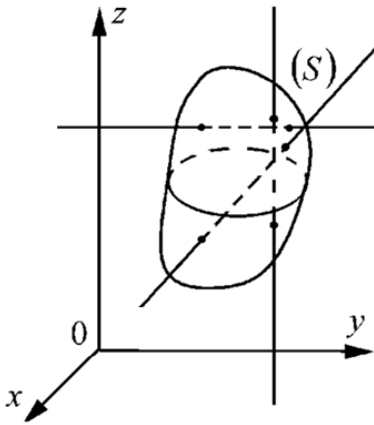


Рис. 19. Схема замкнутой области простой формы

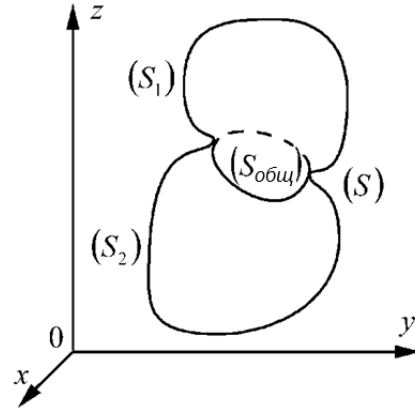


Рис. 20. Схема замкнутой области сложной формы

Формула Остроградского–Гаусса доказана для областей, граница которых пересекается с любыми прямыми, параллельными осям, не более, чем в двух точках (рис. 19). Однако, формула верна и для более сложных областей, если их можно разбить на несколько областей вышеуказанного вида (рис. 20).

Действительно, рассмотрим область (V) (рис. 20). Разделим ее на области (V_1) и (V_2) , для которых верна формула Остроградского–Гаусса.

$$\iiint_{(V)} = \iiint_{(V_1)} + \iiint_{(V_2)} = \oint_{(S_1)} + \oint_{(S_2)} = \oint_{(S)} + \oint'_{(S_{общ})} + \oint''_{(S_{общ})} = \oint_{(S)}.$$

Формула Остроградского–Гаусса верна, т.к. два интеграла последней суммы берутся по разным сторонам поверхности $S_{общ}$, следовательно, их сумма равна нулю:

$$\oint\limits_{(S_{\text{общ}})}' + \oint\limits_{(S_{\text{общ}})}'' = 0.$$

2.4. Поток векторного поля

Пусть дано векторное поле $\vec{A}(M) = A_x(x, y, z)\vec{i} + A_y(x, y, z)\vec{j} + A_z(x, y, z)\vec{k}$ и некоторая замкнутая поверхность (S) , тогда число

$$P = \iint_{(S)} (\vec{A}, \vec{n}) ds$$

называется потоком векторного поля $\vec{A}(M)$ через поверхность (S) . Здесь $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности (S) . Если поверхность (S) незамкнута, то внутренняя и внешняя стороны поверхности выбираются произвольно (рис. 21).

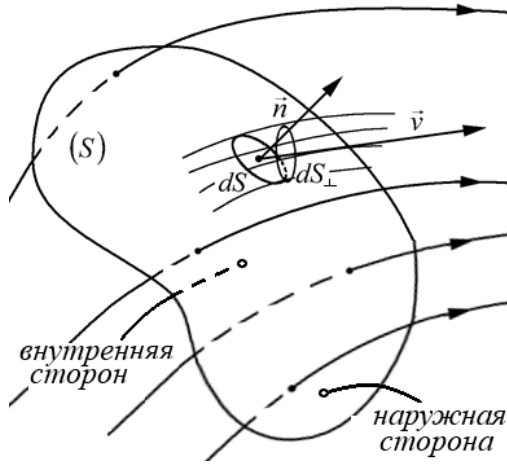


Рис. 21. Схема для определения потока векторного поля через площадку

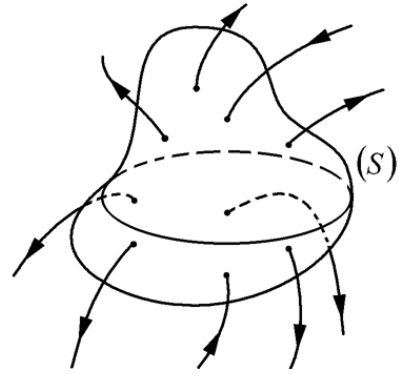


Рис. 22. Схема определения потока поля через замкнутую поверхность

Пусть векторное поле $\vec{A}(M)$ является полем скоростей движущейся жидкости. Определим объем жидкости, прошедшей через данную поверхность (S) за единицу времени. Выделим участок поверхности dS . Тогда у струи жидкости, вытекающей через этот участок, площадь поперечного сечения будет $dS_{\perp} = \cos\alpha \cdot dS$ и вытекающий за единицу времени объем жидкости будет равен

$$dP = v dS_{\perp} = v \cdot \cos\alpha \cdot dS = |\vec{v}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos\alpha \cdot dS = (\vec{v}, \vec{n}) \cdot dS.$$

Проинтегрируем равенство и получим поток через поверхность (рис. 22)

$$P = \iint_{(S)} (\vec{v}, \vec{n}) \cdot dS.$$

Итак, поток представляет собой объем жидкости, прошедшей через данную поверхность (S) за единицу времени, если скорость движения жидкости в точке задается векторным полем $\vec{A}(M)$.

Если поверхность расположена так, что поле пересекает его изнутри наружу, то $(\vec{v}, \vec{n}) > 0$, то поток векторного поля $P > 0$, а если поле пересекает поверхность снаружи вовнутрь $(\vec{v}, \vec{n}) < 0$, то $P < 0$. Очевидно, что если поменять местами наружную и внутреннюю стороны поверхности, то поток только поменяет знак.

В большинстве полей, имеющих физический смысл (поле скоростей текущей жидкости, гравитационное, электрическое, магнитное и др.), поток можно оценивать количеством векторных линий, пересекающих данную поверхность.

2.5. Дивергенция

Рассмотрим замкнутую поверхность (S) (рис. 22). Пусть поток векторного поля $\vec{A}(M)$ через нее положителен. Интерпретируя $\vec{A}(M)$ как поле скоростей движущейся жидкости, получим, что из поверхности (S) вытекает больше жидкости, чем втекает в нее. Тогда внутри (S) находятся источники жидкости. Если поток векторного поля $\vec{A}(M)$ отрицателен, то внутри (S) находятся поглотители (стоки) жидкости.

Очевидно, что для изучения свойств поля $\vec{A}(M)$ нужно оценивать мощности источников и стоков. Для этого служит характеристика векторного поля, называемая дивергенцией.

Дивергенцией векторного поля $\vec{A}(M)$ в точке M_0 называют число, равное пределу отношения потока поля $\vec{A}(M)$ через замкнутую поверхность (S), окружающую точку M_0 , к объему (V), ограниченному этой поверхностью, при условии, что поверхность стягивается в точку M_0

$$\operatorname{div} \vec{A}(M_0) = \lim_{(S) \rightarrow M_0} \frac{\oint_{(S)} (\vec{A}, \vec{n}) ds}{V}.$$

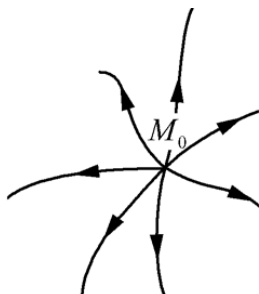


Рис. 23. Схема поля с источником в точке M_0

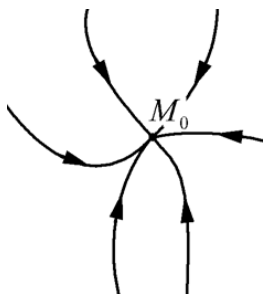


Рис. 24. Схема поля с поглотителем в точке M_0

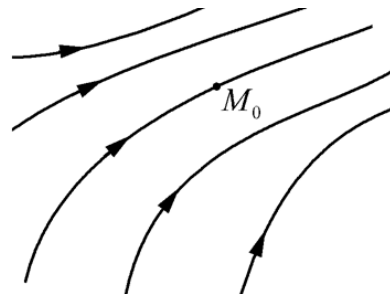


Рис. 25. Схема поля без источников и поглотителей

Очевидно, что если $\operatorname{div} \vec{A}(M_0) > 0$, то в точке M_0 находится источник поля (рис. 23), если $\operatorname{div} \vec{A}(M_0) < 0$, то в точке M_0 находится сток поля (рис. 24), если $\operatorname{div} \vec{A}(M_0) = 0$, то источников и стоков поля в точке M_0 нет (рис. 25).

Дивергенция в декартовых координатах

Вычислим дивергенцию векторного поля $\vec{A}(x, y, z)$ в окрестности точки M_0 , используя формулу Остроградского–Гаусса

$$\operatorname{div} \vec{A}(M_0) = \lim_{(S) \rightarrow M_0} \frac{\oint_{(S)} (\vec{A}, \vec{n}) ds}{V} = \lim_{(S) \rightarrow M_0} \frac{\iiint_{(V)} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dV}{V}.$$

По теореме о среднем значении функции

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})V, \text{ где } \bar{M}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in (V)$$

имеем
$$\operatorname{div} \vec{A}(M_0) = \lim_{(S) \rightarrow M_0} \left(\frac{\partial A_x(\bar{M})}{\partial x} + \frac{\partial A_y(\bar{M})}{\partial y} + \frac{\partial A_z(\bar{M})}{\partial z} \right).$$

Так как $\bar{M}$ находится внутри поверхности (S) , а $(S) \rightarrow M_0$ то $\bar{M} \rightarrow M_0$, следовательно,

$$\operatorname{div} \vec{A}(M_0) = \frac{\partial A_x(M_0)}{\partial x} + \frac{\partial A_y(M_0)}{\partial y} + \frac{\partial A_z(M_0)}{\partial z}.$$

Таким образом, дивергенция векторного поля в декартовых координатах вблизи точки M определяется по формуле

$$\operatorname{div} \vec{A}(M) = \frac{\partial A_x(M)}{\partial x} + \frac{\partial A_y(M)}{\partial y} + \frac{\partial A_z(M)}{\partial z}.$$

Задача 4. Определить дивергенцию векторного поля $\vec{A}(M) = A_x(x, y, z)\vec{i} + A_y(x, y, z)\vec{j} + A_z(x, y, z)\vec{k}$ в точке $M(x, y, z)$.

Решение

Построим элементарный параллелепипед $MNKL M_1 N_1 K_1 L_1$ с вершиной в точке M так, чтобы его ребра были параллельны осям координат (рис. 26).

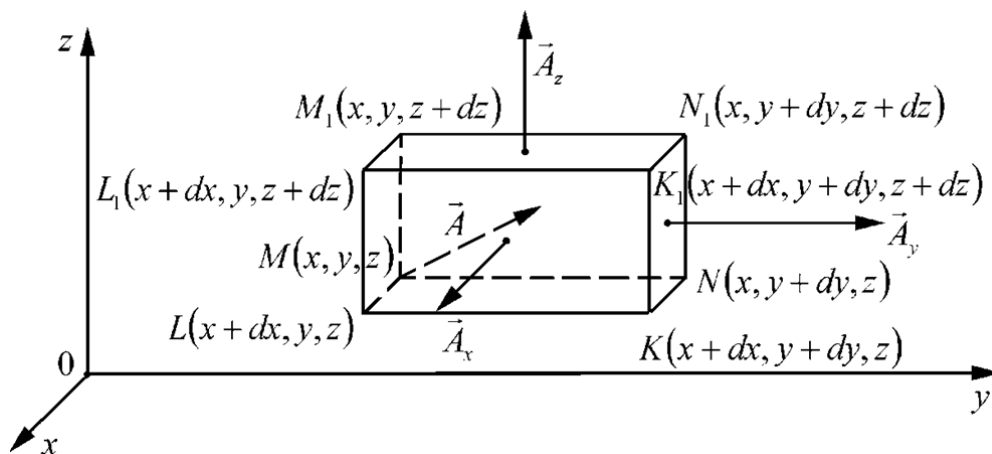


Рис. 26. Вид замкнутой поверхности для расчета дивергенции

В силу малости сторон считаем, что функции $A_x(M)$, $A_y(M)$, $A_z(M)$ постоянны на гранях параллелепипеда.

По определению дивергенции имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{A}(M) &\cong \frac{P}{V} \cong \frac{(A_x(x+dx, y, z) - A_x(x, y, z))dydz}{V} \\ &+ \frac{(A_y(x, y+dy, z) - A_y(x, y, z))dxdz + (A_z(x, y, z+dz) - A_z(x, y, z))dxdy}{\text{знаменатель тот же}} \cong \\ &\cong \frac{\frac{\partial A_x(M)}{\partial x} dxdydz + \frac{\partial A_y(M)}{\partial y} dydxdz + \frac{\partial A_z(M)}{\partial z} dzdxdy}{dxdydz} = \\ &= \frac{\partial A_x(M)}{\partial x} + \frac{\partial A_y(M)}{\partial y} + \frac{\partial A_z(M)}{\partial z}. \end{aligned}$$

Итак, дивергенция в декартовых координатах имеет вид

$$\operatorname{div} \vec{A}(M) = \frac{\partial A_x(M)}{\partial x} + \frac{\partial A_y(M)}{\partial y} + \frac{\partial A_z(M)}{\partial z}.$$

2.6. Формула Стокса

В случае существования в векторном поле $\vec{A}(M) = A_x(x, y, z)\vec{i} + A_y(x, y, z)\vec{j} + A_z(x, y, z)\vec{k}$ линейного и поверхностного интегралов, справедливо равенство, которое называют формулой Стокса

$$\begin{aligned} &\oint_{(L)} (A_x dx + A_y dy + A_z dz) = \\ &= \iint_{(S)} \left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] dS. \end{aligned}$$

Направления линейного и поверхностного интегрирования должны быть согласованы.

Пусть поверхность (S) задана уравнением $z = z(x, y)$, тогда,

$$\oint_{(L)} A_x(x, y, z) dx = \oint_{(L)} A_x(x, y, z(x, y)) dx.$$

Далее используем формулу Грина

$$\iint_{(\sigma)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma = \oint_{(L)} P dx + \oint_{(L)} Q dy.$$

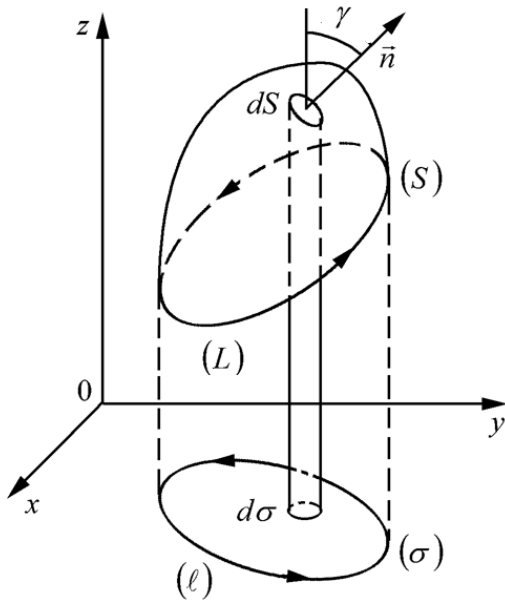


Рис. 27. Схема к доказательству формулы Стокса

Предположим, что в формуле Грина $P = A_x(x, y, z(x, y))$, тогда

$$\begin{aligned}
 \oint_{(L)} A_x(x, y, z(x, y)) dx &= \\
 &= - \iint_{(\sigma)} \frac{\partial A_x(x, y, z(x, y))}{dy} d\sigma = \\
 &= - \iint_{(\sigma)} \left(\frac{\partial A_x}{dy} + \frac{\partial A_x}{dz} z'_y \right) d\sigma = \\
 &= - \iint_{(\sigma)} \frac{\partial A_x}{dy} d\sigma + \iint_{(\sigma)} \left(- \frac{\partial A_x}{dz} z'_y \right) d\sigma.
 \end{aligned}$$

Здесь $d\sigma = \cos\gamma \cdot dS$, в этом случае первый интеграл принимает вид

$$\iint_{(\sigma)} \frac{\partial A_x}{dy} d\sigma = \iint_{(\sigma)} \frac{\partial A_x}{dy} \cos\gamma \cdot dS.$$

Поскольку поверхность (S) задана уравнением $z = z(x, y)$, нормальный вектор к ней имеет координаты $(z'_x, z'_y, -1)$. С другой стороны единичный вектор, нормальный поверхности, имеет координаты $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Воспользуемся пропорцией координат

$$\frac{z'_y}{\cos\beta} = \frac{-1}{\cos\gamma}, \text{ тогда } z'_y = - \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}.$$

Учитывая равенство $d\sigma = \cos\gamma \cdot dS$, получаем

$$-z'_y d\sigma = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} \cos\gamma \cdot dS = \cos\beta \cdot dS.$$

Отсюда второй интеграл преобразуем к виду

$$\iint_{(\sigma)} \left(- \frac{\partial A_x}{dz} z'_y \right) d\sigma = \iint_{(\sigma)} \frac{\partial A_x}{dz} \cos\beta \cdot dS.$$

Окончательно получаем

$$\oint_{(L)} A_x(x, y, z(x, y)) dx = \iint_{(\sigma)} \left(\frac{\partial A_x}{dz} \cos\beta - \frac{\partial A_x}{dy} \cos\gamma \right) dS.$$

Рассуждая аналогично, составим еще два уравнения:

$$\oint_{(L)} A_y(x, y, z(x, y)) dy = \iint_{(S)} \left(-\frac{\partial A_y}{\partial z} \cos \alpha + \frac{\partial A_y}{\partial x} \cos \gamma \right) dS;$$

$$\oint_{(L)} A_z(x, y, z(x, y)) dz = \iint_{(S)} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} \cos \alpha - \frac{\partial A_z}{\partial x} \cos \beta \right) dS.$$

Если сложить левые и правые части полученных равенств, то можно убедиться в справедливости формулы Стокса.

Формула Стокса будет верна и для сложных поверхностей, которые можно разбить на части (рис. 28), задаваемые уравнениями вида $z = z(x, y)$.

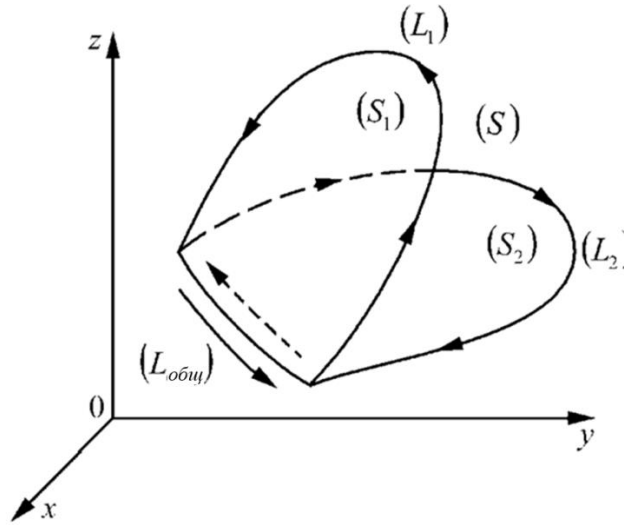


Рис. 28. Схема разбиения сложной площадки (S) на две простые (S_1) и (S_2) с общим контуром $(L_{общ})$

Поскольку два последних интеграла берутся по одной дуге в разных направлениях, следовательно, их сумма равна нулю:

$$\iint_{(S)} = \iint_{(S_1)} + \iint_{(S_2)} = \oint_{(L_1)} + \oint_{(L_2)} = \oint_{(L)} + \oint'_{(L_{общ})} + \oint''_{(L_{общ})} = \oint_{(L)}.$$

2.7. Циркуляция

Пусть дано векторное поле $\vec{A}(M) = A_x(x, y, z)\vec{i} + A_y(x, y, z)\vec{j} + A_z(x, y, z)\vec{k}$ и некоторый замкнутый контур (L) , тогда число C , определенное формулой

$$C = \oint_{(L)} (\vec{A}, d\vec{l}) = \oint_{(L)} (A_x dx + A_y dy + A_z dz),$$

называется циркуляцией векторного поля $\vec{A}(M)$ по контуру (L) .

Физический смысл циркуляции

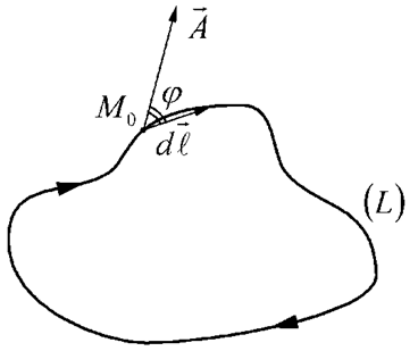


Рис. 29. Схема к определению циркуляции векторного поля

Пусть векторное поле $\vec{A}(x, y, z)$ является полем силы $\vec{F}$, действующей на тело, находящееся в точке M_0 . Рассмотрим задачу о работе сил поля при прохождении тела по некоторому замкнутому контуру (L) .

При перемещении тела по элементарному отрезку $|\vec{dl}|$ поле сил совершает работу (рис. 29)

$$dA = F(M_0) \cos \varphi dl = (\vec{F}, \vec{dl}).$$

Проинтегрировав это равенство по всему контуру (L) , получим, работу сил поля по перемещению тела вдоль этого контура

$$A = \oint_{(L)} (\vec{F}, \vec{dl}).$$

Таким образом, циркуляция поля $\vec{A}(x, y, z) = \vec{F}$ вдоль контура (L) равна работе сил поля по перемещению тела вдоль контура (L) .

Если на контуре (L) работа $(\vec{A}, \vec{dl}) > 0$, то значение циркуляции будет положительным, а если всегда $(\vec{A}, \vec{dl}) < 0$, то значение циркуляции будет отрицательным.

2.8. Ротор

Рассмотрим векторное поле скоростей текущей жидкости. Пусть в точке M_0 находится маленькое колесико с радиально расположенными лопатками (рис. 30).

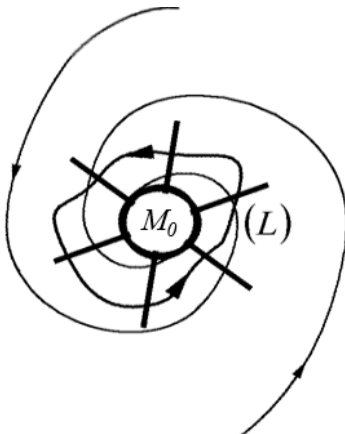


Рис. 30. Физический смысл ротора векторного поля

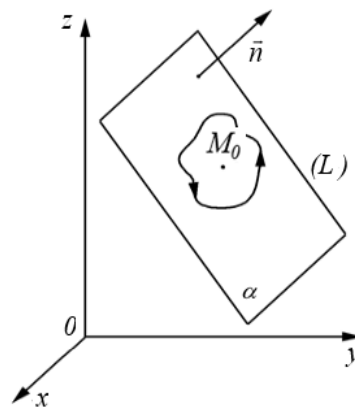


Рис. 31. Схема к определению ротора векторного поля

Пусть через точку M_0 проходит произвольная плоскость α (рис. 31), определяемая вектором нормали $\vec{n}$. Тогда ротором (вихрем) векторного поля $\vec{A}(x, y, z)$ в точке M_0 и в направлении $\vec{n}$ называют число, равное пределу отношения циркуляции векторного поля $\vec{A}(x, y, z)$ по замкнутому контуру $(L) \subset \alpha$ к площади, ограниченной этим контуром, при стягивании этого контура в точку M_0 :

$$\text{rot}_{\vec{n}} \vec{A}(M_0) = \lim_{(L \rightarrow M_0)} \frac{\oint_{(L)} (\vec{A}, d\vec{l})}{S}.$$

Очевидно, что если циркуляция поля скоростей вдоль контура (L) положительна, то колесико будет вращаться против часовой стрелки (рис. 32), если отрицательна, то по часовой стрелке (рис. 33), и, наконец, если циркуляция равна нулю, то колесико вращаться не будет (рис. 34). Таким образом, ротор векторного поля характеризует «вращательную» способность векторного поля в данной точке и в данном направлении.

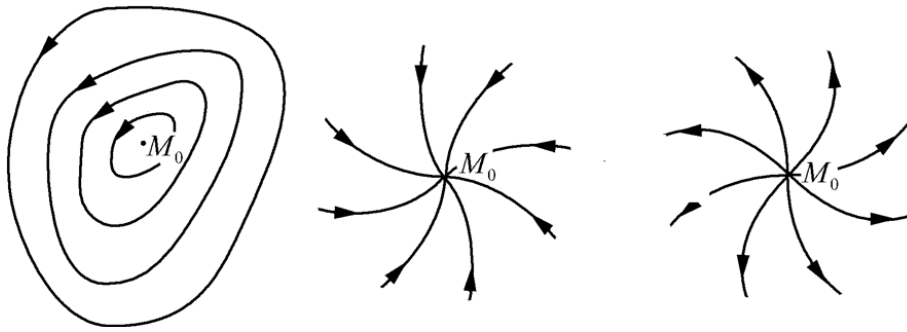


Рис. 32. Схемы векторных линий поля в плоскости α дающее значение $\text{rot}_{\vec{n}} \vec{A}(M_0) > 0$

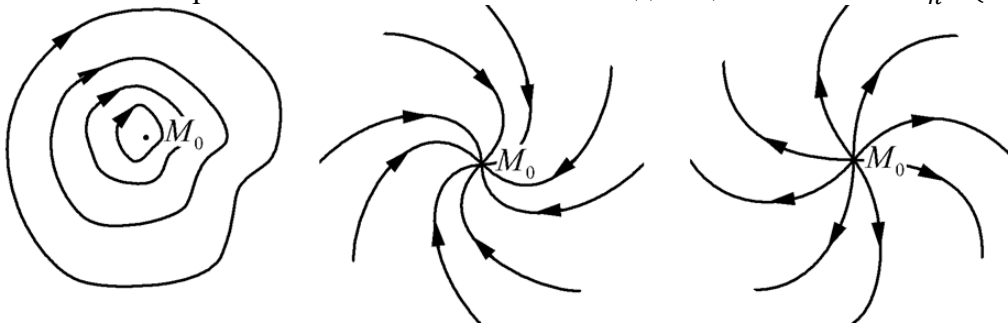


Рис. 33. Схемы векторных линий поля в плоскости α дающее значение $\text{rot}_{\vec{n}} \vec{A}(M_0) < 0$

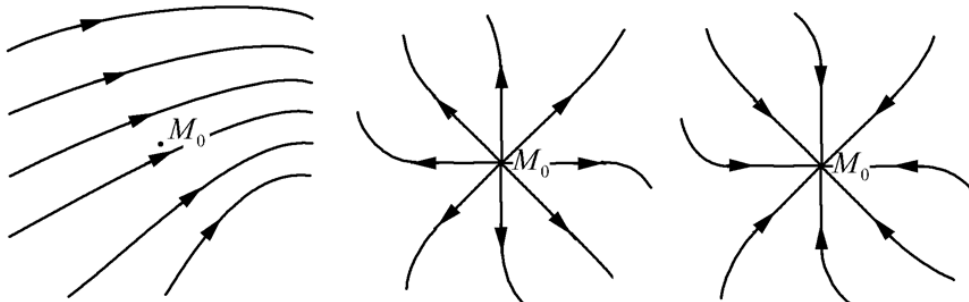


Рис. 34. Схемы векторных линий поля в плоскости α дающее значение $\text{rot}_{\vec{n}} \vec{A}(M_0) = 0$.

Выясним, в каком направлении вращательная способность поля максимальна. Применим к ротору векторного поля в точке M_0 формулу Стокса

$$\begin{aligned} \text{rot}_{\vec{n}} \vec{A}(M_0) &= \lim_{(L \rightarrow M_0)} \frac{\oint_{(L)} (\vec{A}, d\vec{l})}{S} = \\ &= \lim_{(L \rightarrow M_0)} \frac{\iint_{(S)} \left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] dS}{S}. \end{aligned}$$

Применим теорему о среднем значении функции

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) V, \text{ где } \bar{M}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in (V).$$

Продолжим преобразования:

$$\begin{aligned} \text{rot}_{\vec{n}} \vec{A}(M_0) &= \\ &= \lim_{(L \rightarrow M_0)} \left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \cos \gamma \right]_{M_0 = \bar{M}} = \\ &= \left(\frac{\partial A_z(M_0)}{\partial y} - \frac{\partial A_y(M_0)}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial A_x(M_0)}{\partial z} - \frac{\partial A_z(M_0)}{\partial x} \right) \cos \beta \\ &\quad + \left(\frac{\partial A_y(M_0)}{\partial x} - \frac{\partial A_x(M_0)}{\partial y} \right) \cos \gamma = (\text{rot} \vec{A}(M_0), \vec{n}). \end{aligned}$$

Таким образом, ротором (вихрем) векторного поля $\vec{A}(M) = A_x(x, y, z)\vec{i} + A_y(x, y, z)\vec{j} + A_z(x, y, z)\vec{k}$ в точке M_0 называется вектор, определяемый равенством

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{A}(M_0) &= \left(\frac{\partial A_z(M_0)}{\partial y} - \frac{\partial A_y(M_0)}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A_x(M_0)}{\partial z} - \frac{\partial A_z(M_0)}{\partial x} \right) \vec{j} \\ &\quad + \left(\frac{\partial A_y(M_0)}{\partial x} - \frac{\partial A_x(M_0)}{\partial y} \right) \vec{k}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\text{rot}_{\vec{n}} \vec{A}$ – это проекция вектора $\text{rot} \vec{A}$ на направление $\vec{n}$. Тогда максимальное значение $\text{rot}_{\vec{n}} \vec{A}(M_0)$ будет в том случае, если вектор $\text{rot} \vec{A}(M_0) \uparrow \vec{n}$.

Направление ротора векторного поля перпендикулярно плоскости, в которой вращательная способность векторного поля наибольшая.

Модуль ротора векторного поля количественно характеризует максимальную вращательную способность поля. Для определения компонент ротора векторного поля $\text{rot} \vec{A}$ удобно использовать определитель третьего порядка вида

$$\text{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}.$$

Векторная форма записи формулы Стокса

Если заменить в левой и правой части формулы Стокса подынтегральные выражения на $(\vec{A}, \vec{dl})$ и $(\text{rot} \vec{A}, \vec{n})$ соответственно, получим векторную форму записи формулы Стокса

$$\oint_{(L)} (\vec{A}, \vec{dl}) = \iint_{(S)} (\text{rot} \vec{A}, \vec{n}) dS.$$

Отсюда следует, что циркуляция векторного поля $\vec{A}(x, y, z)$ по замкнутому контуру (L) равна потоку вектора $\text{rot} \vec{A}(x, y, z)$ через любую поверхность, опирающуюся на контур (L) .

Задача 5. Получить формулу ротора векторного поля $\vec{A}(x, y, z)$ в декартовой системе координат.

Решение

Найдем проекцию ротора на направление оси Oz . Для этого рассмотрим произвольную точку M и построим замкнутый прямоугольный контур $MNKL$ с дифференциально малыми сторонами, перпендикулярной оси Oz (рис. 35).

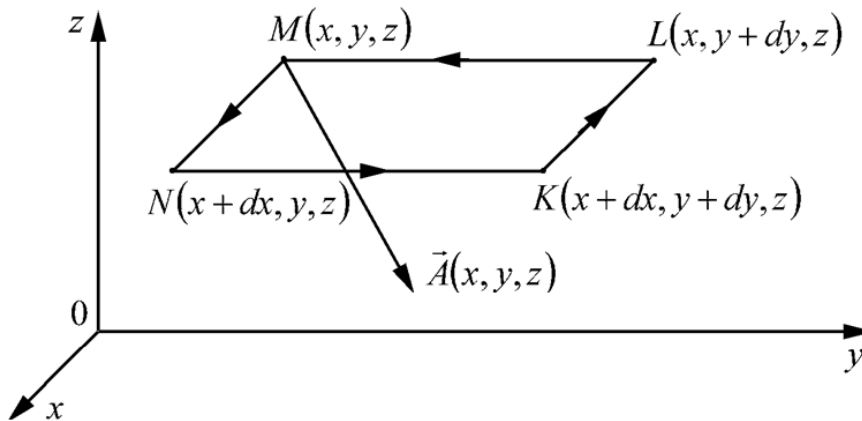


Рис. 35. Схема к определению проекции ротора на ось Oz

Выберем направление обхода контура так, чтобы оно соответствовало направлению правого винта. Согласно определению проекции ротора

$$\text{rot}_z \vec{A}(M) \cong \frac{\oint_{(MNKL)} (\vec{A}, \vec{dl})}{S_{MNKL}}.$$

Считаем поле $\vec{A}(x, y, z)$ постоянным на сторонах малого контура $MN = dy$, $KL = dx$, тогда

$$\begin{aligned} \text{rot}_z \vec{A}(M) &\cong \\ &\cong \frac{A_x(x, y, z)|dx| + A_y(x + dx, y, z)|dy| - A_x(x, y + dy, z)|dx| - A_y(x, y, z)|dy|}{dx \cdot dy} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(A_y(x+dx, y, z) - A_y(x, y, z))dy - (A_x(x, y+dy, z) - A_x(x, y, z))dx}{dx \cdot dy} = \\
&= \frac{\frac{\partial A_y}{\partial x} dx \cdot dy - \frac{\partial A_x}{\partial y} dy \cdot dx}{dx \cdot dy} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Проведя перестановку переменных, по правилу (рис. 36), получим

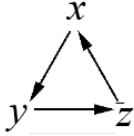


Рис. 36. Правила перестановки переменных

$$\begin{aligned}
rot_x \vec{A} &\cong \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \\
rot_y \vec{A} &\cong \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}.
\end{aligned}$$

Таким образом, ротор векторного поля равен

$$rot \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

3. $\vec{\nabla}$ - ИСЧИСЛЕНИЕ

3.1. Оператор Гамильтона "набла"

Оператором набла $\vec{\nabla}$ называется оператор, определяемый равенством

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Все три основные операции векторного исчисления *grad*, *div* и *rot* можно символически записать с помощью оператора набла $\vec{\nabla}$:

$$\begin{aligned}
grad \varphi &= \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \vec{\nabla} \varphi; \\
div \vec{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} A_x + \frac{\partial}{\partial y} A_y + \frac{\partial}{\partial z} A_z = (\vec{\nabla}, \vec{A}); \\
rot \vec{A} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = [\vec{\nabla}, \vec{A}].
\end{aligned}$$

При действиях с оператором $\vec{\nabla}$ следует придерживаться следующих правил:

1. Оператор $\vec{\nabla}$ является линейным, для него выполняются равенства:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}(x \pm y) &= \vec{\nabla}x \pm \vec{\nabla}y; \\
\vec{\nabla}(cx) &= c\vec{\nabla}x, \quad \text{где } c = const.
\end{aligned}$$

2. При действии $\vec{\nabla}$ на произведения двух переменных величин (например: $\varphi\Psi, \varphi\vec{A}, (\vec{A}, \vec{B}), [\vec{A}, \vec{B}]$) применяют оператор $\vec{\nabla}$ к каждому из сомножителей отдельно, считая другой сомножитель постоянным; полученные результаты складывают. Это свойство аналогично формуле производной произведения двух функций $(uv)' = u'v + uv'$.

3. Оператор $\vec{\nabla}$ условно считают вектором, к которому применяют правила векторной алгебры.

3.2. Основные свойства *grad*, *div* и *rot*

С помощью оператора $\vec{\nabla}$ легко доказываются свойства основных операций векторного исчисления.

1. Свойства *grad*:

- $\text{grad } C = 0$, где $C = \text{const}$;
- $\text{grad } (\varphi \pm \Psi) = \text{grad } \varphi \pm \text{grad } \Psi$;
- $\text{grad } (C\varphi) = C \text{grad } \varphi$;
- $\text{grad } (\varphi\Psi) = \Psi \text{grad } \varphi + \varphi \text{grad } \Psi$;
- $\text{grad } f(\varphi) = f'(\varphi) \cdot \text{grad } \varphi$.

2. Свойства *div*:

- $\text{div } \vec{C} = 0$, где $\vec{C} = \text{const}$;
- $\text{div } (\vec{A} \pm \vec{B}) = \text{div } \vec{A} \pm \text{div } \vec{B}$;
- $\text{div } (C\vec{A}) = C \text{div } \vec{A}$;
- $\text{div } (\varphi\vec{A}) = (\text{grad } \varphi, \vec{A}) + \varphi \text{div } \vec{A}$;
- $\text{div } [\vec{A}, \vec{B}] = (\vec{B}, \text{rot } \vec{A}) - (\vec{A}, \text{rot } \vec{B})$.

3. Свойства *rot*:

- $\text{rot } \vec{C} = 0$, где $\vec{C} = \text{const}$;
- $\text{rot } (\vec{A} \pm \vec{B}) = \text{rot } \vec{A} \pm \text{rot } \vec{B}$;
- $\text{rot } (C\vec{A}) = C \text{rot } \vec{A}$;
- $\text{rot } (\varphi\vec{A}) = [\text{grad } \varphi, \vec{A}] + \varphi \text{rot } \vec{A}$.

Все перечисленные свойства доказываются использованием оператора $\vec{\nabla}$ и правил векторной алгебры.

Задача 6. Доказать свойства 2d, 2e, 3d.

Решение

- $\text{div } (\varphi\vec{A}) = (\vec{\nabla}, \varphi\vec{A}) = (\vec{\nabla}, \varphi\vec{A}_{\text{const}}) + (\vec{\nabla}, \varphi_{\text{const}}\vec{A}) = (\vec{\nabla} \varphi, \vec{A}) + \varphi(\vec{\nabla}, \vec{A}) = (\text{grad } \varphi, \vec{A}) + \varphi \text{div } \vec{A}$;
- $\text{div } [\vec{A}, \vec{B}] = (\vec{\nabla}, [\vec{A}, \vec{B}]) = (\vec{\nabla}, [\vec{A}, \vec{B}_{\text{const}}]) + (\vec{\nabla}, [\vec{A}_{\text{const}}, \vec{B}]) =$
 $[\text{Используем преобразование } [\vec{A}, \vec{B}] = -[\vec{B}, \vec{A}].]$

$$\begin{aligned}
&= (\vec{\nabla}, [\vec{A}, \vec{B}_{const}]) - (\vec{\nabla}, [\vec{B}, \vec{A}_{const}]) = \\
&\left[\text{По свойству смешанного произведения } (\vec{A}, [\vec{B}, \vec{C}]) = (\vec{C}, [\vec{A}, \vec{B}]) . \right] \\
&= (\vec{B}, [\vec{\nabla}, \vec{A}]) - (\vec{A}, [\vec{\nabla}, \vec{B}]) = (\vec{B}, \text{rot} \vec{A}) - (\vec{A}, \text{rot} \vec{B}). \\
3. \text{ rot}(\varphi \vec{A}) &= [\vec{\nabla}, \varphi \vec{A}] = [\vec{\nabla}, \varphi \vec{A}_{const}] + [\vec{\nabla}, \varphi_{const} \vec{A}] = \\
&= [\vec{\nabla} \varphi, \vec{A}] + \varphi [\vec{\nabla}, \vec{A}] = [\text{grad} \varphi, \vec{A}] + \varphi \text{rot} \vec{A}.
\end{aligned}$$

3.3. Дифференциальные операции второго порядка

После применения дифференциальной операции к полю получается новое поле, к которому можно снова применить дифференциальную операцию. Очевидно, что не все комбинации операций имеют смысл. Например, $\text{grad} \text{rot} \vec{A}$ существовать не может, так как операция $\text{rot} \vec{A}$ дает новое векторное поле, а операция grad определена только для скалярных полей.

Существуют пять имеющих смысл операций второго порядка:

$$\text{grad div}; \text{div grad}; \text{div rot}; \text{rot grad}; \text{rot rot}.$$

Получим формулы некоторых операций второго порядка.

1. $\text{div grad} \varphi = (\vec{\nabla}, \vec{\nabla} \varphi) = (\vec{\nabla}, \vec{\nabla}) \varphi =$

$$= \left(\left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right), \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right) \varphi =$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi = \Delta \varphi.$$
2. $\text{div rot} \vec{A} = (\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{A}]) = (\vec{A}, [\vec{\nabla}, \vec{\nabla}]) = (\vec{A}, \vec{0}) = 0.$
3. $\text{rot grad} \varphi = [\vec{\nabla}, \vec{\nabla} \varphi] = [\vec{\nabla}, \vec{\nabla}] \varphi = \vec{0} \varphi = \vec{0}.$
4. $\text{rot rot} \vec{A} = [\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{A}]] = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}, \vec{A}) - (\vec{\nabla}, \vec{\nabla}) \vec{A} = \text{grad div} \vec{A} - \Delta \vec{A}.$

Здесь использована замена двойного векторного произведения:

$$\begin{aligned}
[\vec{A}, [\vec{B}, \vec{C}]] &= (\vec{A}, \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A}, \vec{B}) \vec{C}, \\
\Delta \vec{A} &= \Delta A_x \vec{i} + \Delta A_y \vec{j} + \Delta A_z \vec{k}.
\end{aligned}$$

4. СВОЙСТВА ПРОСТЕЙШИХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

4.1. Потенциальные поля

Векторное поле $\vec{A}(M)$ называется потенциальным, если оно является градиентом некоторого скалярного поля $\varphi(M)$:

$$\vec{A}(M) = -\text{grad} \varphi(M).$$

В этом случае скалярное поле $\varphi(M)$ называется потенциалом векторного поля $\vec{A}(M)$.

Свойства потенциальных полей

1. Пусть φ – потенциал векторного поля $\vec{A}$, тогда $\varphi + C$ ($C = \text{const}$) также является потенциалом поля $\vec{A}$.

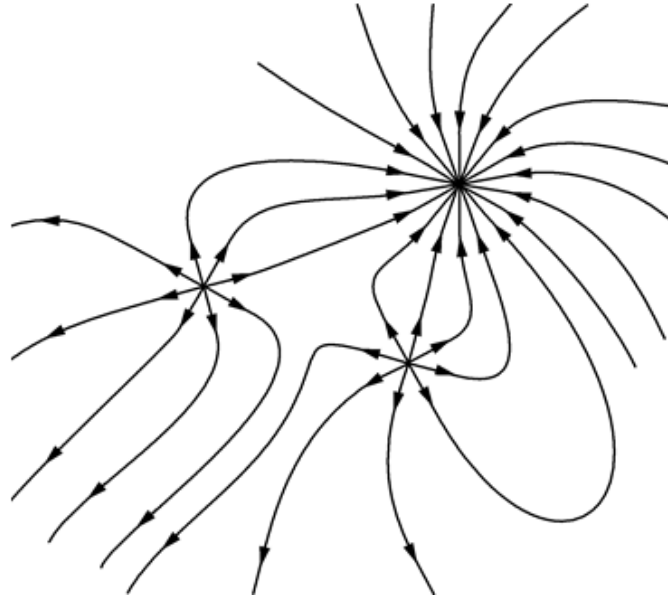


Рис. 37. Схема векторных линий потенциального поля $\vec{A}(M)$

Действительно, $-\text{grad}(\varphi + C) = -\text{grad} \varphi - \text{grad} C = -\text{grad} \varphi = \vec{A}$.

2. Потенциальное поле является безвихревым, т.е. $\text{rot} \vec{A} = 0$ (рис. 37).

Действительно, $\text{rot} \vec{A} = -\text{rot} \text{grad} \varphi = \vec{0}$. Справедливо и обратное утверждение: если $\text{rot} \vec{A} = \vec{0}$, то векторное поле $\vec{A}$ является потенциальным.

3. Циркуляция векторного поля вдоль любого замкнутого контура равна нулю.

$$C = \oint_{(L)} (\vec{A}, \vec{dl}) = 0.$$

В качестве доказательства применим формулу Стокса.

$$\oint_{(L)} (\vec{A}, \vec{dl}) = \iint_{(S)} (\text{rot} \vec{A}, \vec{n}) dS = \iint_{(S)} (\vec{0}, \vec{n}) dS = 0.$$

Физический смысл этого свойства трактуется как равенство нулю работы сил электрического поля при перемещении заряда q по замкнутому контуру:

$$A = \oint_{(L)} (\vec{F}, \vec{dl}) = q \oint_{(L)} (\vec{E}, \vec{dl}) = 0.$$

4. Потенциальные поля складываются векторно, а их потенциалы – скалярно. Пусть φ, Ψ – потенциалы векторных полей $\vec{A}$ и $\vec{B}$ соответственно. Тогда потенциалом векторного поля $\vec{A} + \vec{B}$ будет являться поле $\varphi + \Psi$, действительно

$$\vec{A} + \vec{B} = -grad \varphi - grad \Psi = -grad (\varphi + \Psi).$$

Задача 7. Показать, что электростатическое поле напряженности точечного заряда q $\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$ имеет потенциал $\varphi(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$.

Решение

Рассмотрим градиент потенциала поля.

$$-grad \varphi = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}\right) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r^2} r'_x \cdot \vec{i} - \frac{1}{r^2} r'_y \cdot \vec{j} - \frac{1}{r^2} r'_z \cdot \vec{k}\right).$$

Частные производные модуля радиус-вектора соответственно равны

$$r'_x = \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}, \quad r'_y = \frac{y}{r}, \quad r'_z = \frac{z}{r}.$$

Окончательно получаем

$$-grad \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(\frac{x}{r} \vec{i} + \frac{y}{r} \vec{j} + \frac{z}{r} \vec{k}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{E}.$$

Поскольку любой заряд можно разделить на элементарные заряды, то любое электрическое поле является потенциальным.

Примеры потенциальных полей

1. Электростатическое поле.
2. Поле тяготения.
3. Поле скоростей жидкости при ламинарном течении.

4.2. Соленоидальные поля

Векторное поле $\vec{A}(M)$ называется соленоидальным, если оно является ротором некоторого векторного поля $\vec{B}(M)$: $\vec{A}(M) = rot \vec{B}(M)$.

Векторное поле $\vec{B}(M)$ называется векторным потенциалом векторного поля $\vec{A}(M)$.

Свойства соленоидальных полей

1. Пусть $\vec{B}$ – векторный потенциал поля $\vec{A}$, тогда $\vec{B} + grad \varphi$ (где φ – некоторое скалярное поле) также является векторным потенциалом поля $\vec{A}$.

Действительно, $rot (\vec{B} + grad \varphi) = rot \vec{B} + rot grad \varphi = rot \vec{B} = \vec{A}$.

2. Для соленоидальных полей выполняется равенство $div \vec{A} = 0$, следовательно, соленоидальные поля могут иметь вихри, но не имеют источников и стоков (рис. 38). Векторные линии таких полей являются либо замкнутыми кривыми, либо начинаются и заканчиваются в бесконечности (за пределами поля).

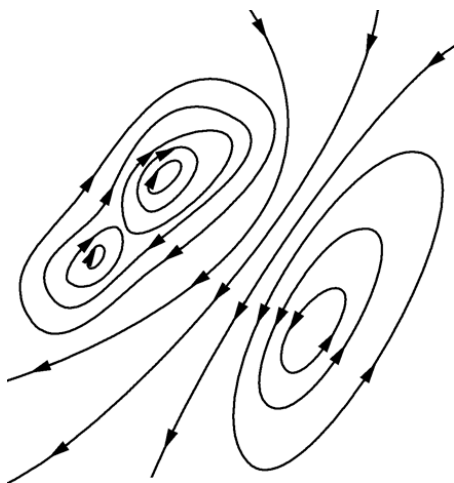


Рис. 38. Схема векторных линий соленоидального поля

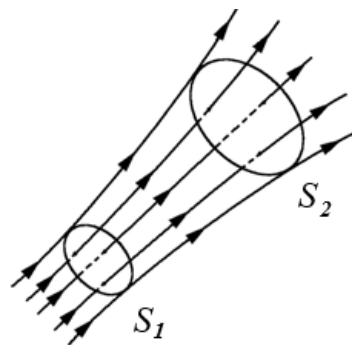


Рис. 39. Схема к определению векторной трубки соленоидального поля

Действительно, $\operatorname{div} \vec{A} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} = 0$.

Справедливо и обратное утверждение: если $\operatorname{div} \vec{A} = 0$, то $\vec{A}$ – соленоидальное поле.

3. Поток вектора соленоидального поля через каждое сечение векторной трубки одинаков.

Рассмотрим произвольную площадку (S_1) и проведем через каждую точку ее границы векторную линию. Часть пространства, ограниченная этими линиями, называется векторной трубкой. Соленоидальное векторное поле не имеет источников и стоков, поэтому его можно сравнить с полем скоростей несжимаемой жидкости, для которого очевидно утверждение: сколько жидкости втекает через площадку S_1 за единицу времени, столько же ее вытекает через площадку S_2 (рис. 39).

Таким образом, потоки соленоидального поля через каждое сечение векторной трубки совпадают. Это свойство дало полю название соленоидальное (от латинского слова «*solen*» – трубка).

Задача 8. Доказать, что магнитное поле проводника с током является соленоидальным.

Решение

По закону Био-Савара-Лапласа вокруг участка проводника длины Δl (рис. 40) с током силой I создается магнитное поле $\vec{\Delta H} = \frac{I}{4\pi r^3} [\vec{\Delta l}, \vec{r}]$. Если магнитное поле вокруг проводника с током соленоидальное, то его дивергенция равна нулю.

Пусть проекции векторов $\vec{\Delta l} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ и $\vec{r} = (x, y, z)$, тогда

$$[\vec{\Delta l}, \vec{r}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \Delta x & \Delta y & \Delta z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (z\Delta y - y\Delta z)\vec{i} + (x\Delta z - z\Delta x)\vec{j} + (y\Delta x - x\Delta y)\vec{k}.$$

Отсюда

$$\vec{\Delta H} = \frac{I}{4\pi} \left(\frac{z\Delta y - y\Delta z}{r^3} \vec{i} + \frac{x\Delta z - z\Delta x}{r^3} \vec{j} + \frac{y\Delta x - x\Delta y}{r^3} \vec{k} \right).$$

Дивергенция магнитного поля равна

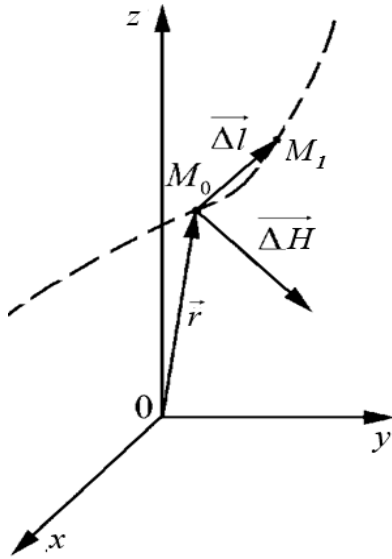
$$\text{div } \vec{\Delta H} = \frac{\partial \Delta H_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta H_y}{\partial y} + \frac{\partial \Delta H_z}{\partial z}.$$

Здесь

$$\frac{\partial \Delta H_x}{\partial x} = \left(\frac{I}{4\pi} \frac{z\Delta y - y\Delta z}{r^3} \right)'_x = \frac{I}{4\pi} (z\Delta y - y\Delta z) \cdot (-3)r^{-4}r'_x.$$

Используем замену

$$r'_x = \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}.$$



Окончательно получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta H_x}{\partial x} &= \frac{I}{4\pi} \frac{3(y\Delta z - z\Delta y)x}{r^5} = \\ &= \frac{3Ix}{4\pi r^5} (y\Delta z - z\Delta y). \end{aligned}$$

Аналогично рассуждая, имеем

$$\frac{\partial \Delta H_y}{\partial y} = \frac{3Iy}{4\pi r^5} (z\Delta x - x\Delta z),$$

$$\frac{\partial \Delta H_z}{\partial z} = \frac{3Iz}{4\pi r^5} (x\Delta y - y\Delta x),$$

Рис. 40. Схема к определению направления магнитного поля

$$\text{div } \vec{\Delta H} = \frac{3I}{4\pi r^5} (xy\Delta z - xz\Delta y + yz\Delta x - yx\Delta z + zx\Delta y - zy\Delta x) = 0.$$

Расчет показал, что дивергенция магнитного поля элементарного тока I равна нулю, следовательно, поле является соленоидальным. Отсюда заключаем, что любое другое магнитное поле также является соленоидальным.

5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ И СФЕРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

5.1. Понятие о цилиндрической системе координат

Если к полярной системе координат добавить ось z , перпендикулярную плоскости полярной системы, то получим цилиндрическую систему координат.

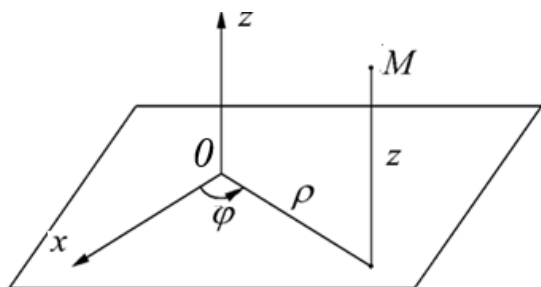


Рис. 41. Определение координат цилиндрической системы

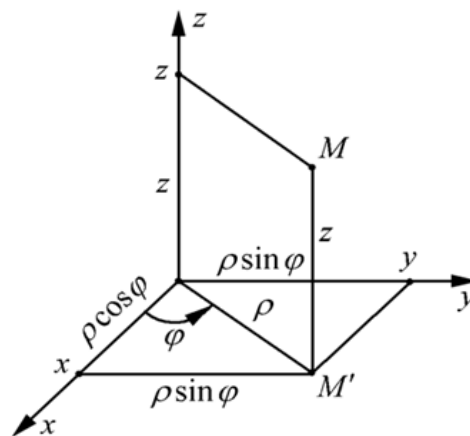


Рис. 42. Связь между цилиндрическими и декартовыми координатами

Очевидно, что для определения положения точки M в пространстве достаточно трех координат (рис. 41):

$$\rho \ (0 \leq \rho < \infty); \ \varphi (0 \leq \varphi < 2\pi); \ z \ (-\infty \leq z < \infty).$$

Рассмотрим переход из цилиндрической системы отсчета в декартову систему (рис. 42):

$$x = \rho \cos \varphi; \ y = \rho \sin \varphi; \ z = z.$$

Обратный переход из декартовой системы в цилиндрическую систему:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \ \varphi = \arctg \frac{y}{x}; \ z = z.$$

Координатные поверхности, линии, единичные векторы

Если зафиксировать одну из координат, а две другие изменять, то в пространстве будут описаны координатные поверхности (рис. 43).

Если изменять одну из трех координат, то можно описать координатные линии. Каждая из трех координатных линий проходит через данную точку M_0 : линия $\rho \ (\varphi, z = \text{const})$ направлена перпендикулярно оси z ; линия $\varphi \ (\rho, z = \text{const})$ является окружностью радиуса ρ ; линия $z \ (\rho, \varphi = \text{const})$ параллельна оси z . Координатные линии пересекаются под прямыми углами, поэтому цилиндрическая система является ортогональной.

Проведем от точки M_0 единичные векторы $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ по касательным к координатным линиям в направлении возрастания координат и получим ортогональный базис, в котором удобно представлять векторные поля:

$$\vec{A}(M_0) = A_\rho(M_0)\vec{e}_\rho + A_\varphi(M_0)\vec{e}_\varphi + A_z(M_0)\vec{e}_z.$$

При перемещении точки M_0 в новое положение базис $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ меняет направление (рис. 44).

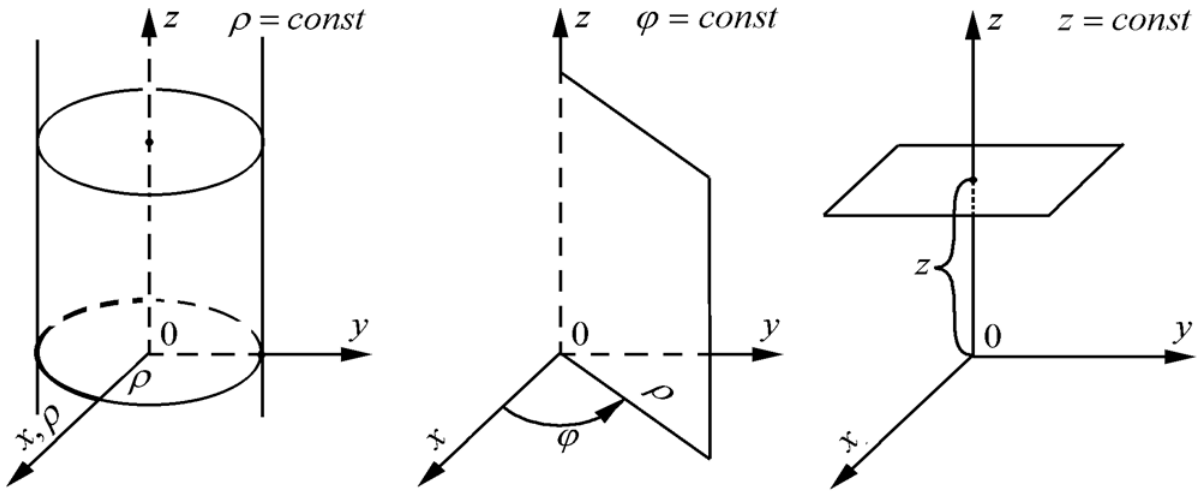


Рис. 43. Координатные поверхности цилиндрической системы координат

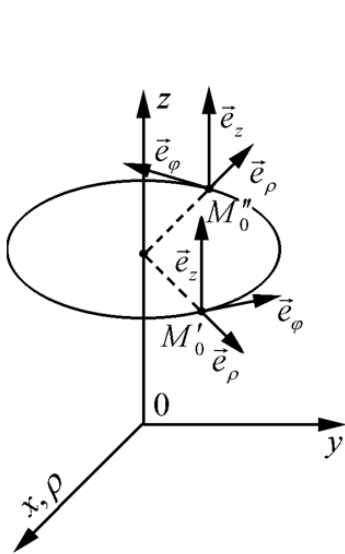


Рис. 44. Координатные линии и единичные векторы цилиндрической системы координат

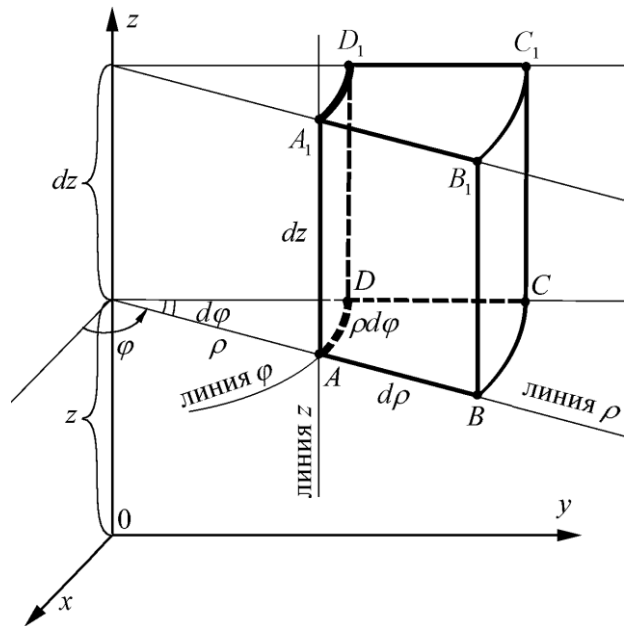


Рис. 45. Элементарный объем в цилиндрических координатах

Вырежем координатными поверхностями элемент объема в цилиндрических координатах – криволинейный параллелепипед со сторонами:

$$|AB| = d\rho; \quad |AD| = \rho d\varphi; \quad |AA_1| = dz.$$

Элементарный объем в цилиндрических координатах равен (рис. 45)

$$dV = \rho d\rho d\varphi dz.$$

5.2. Понятие о сферической системе координат

В сферической системе координат положение точки в пространстве определяется расстоянием от данной точки до начала координат и двумя углами (рис. 46):

$$r \ (0 \leq r < \infty); \quad \varphi \ (0 \leq \varphi < 2\pi); \quad \theta \ (0 \leq \theta < \pi).$$

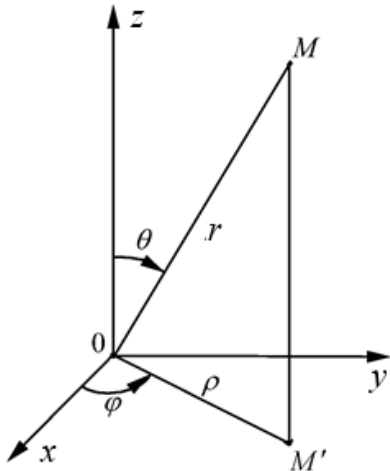


Рис. 46. Определение координат сферической системы

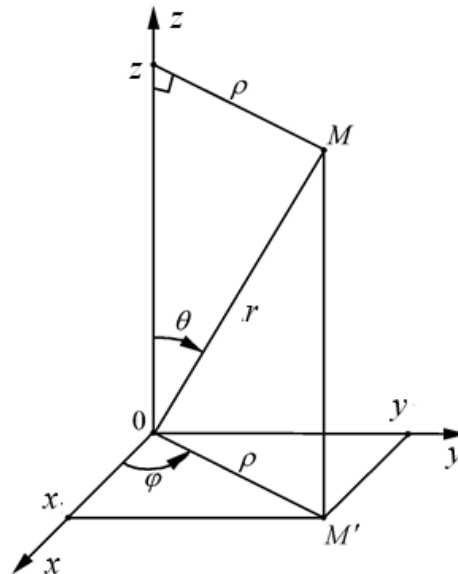


Рис. 47. Связь между сферическими, цилиндрическими и декартовыми координатами

Связь между сферической и декартовой системами координат

Учитывая зависимость между координатами сферической системы и декартовой системы (рис. 47), переход можно осуществить по формулам:

$$x = \rho \cos \varphi = r \sin \theta \cos \varphi;$$

$$y = \rho \sin \varphi = r \sin \theta \sin \varphi;$$

$$z = r \cos \theta.$$

Обратный переход из декартовой системы координат в сферическую:

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x};$$

$$\theta = \arccos \frac{z}{r} = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Координатные поверхности, линии, единичные векторы

Для построения координатных поверхностей зафиксируем одну из координат сферической системы, а две другие будем изменять. В результате получим координатные поверхности (рис. 48).

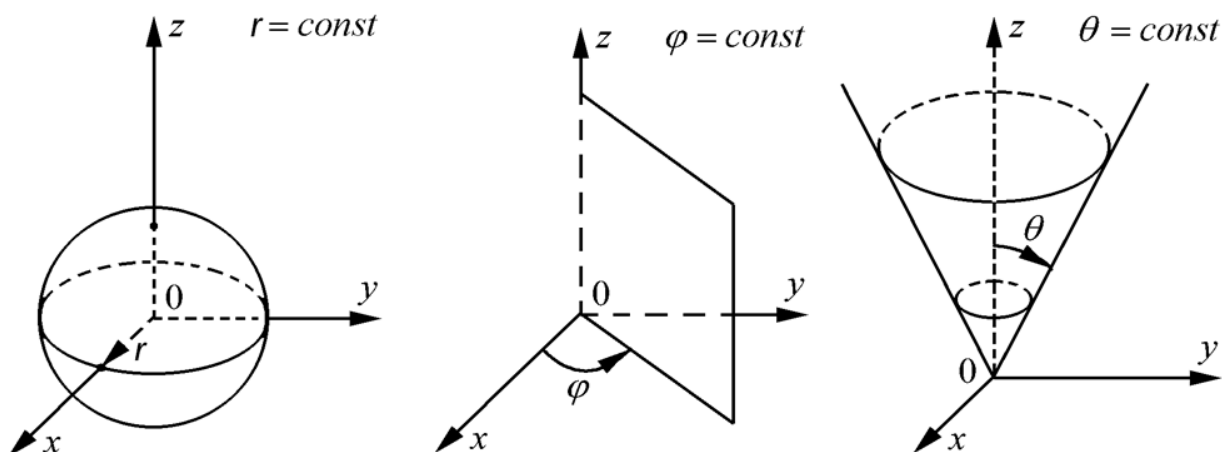


Рис. 48. Координатные поверхности сферической системы координат

Каждая из координатных линий сферической системы проходит через данную точку M_0 : линия r – в радиальном направлении; линия φ образует окружность радиуса $\rho = r \sin \theta$ перпендикулярную оси z ; линия θ образует окружность радиуса r , проходящую через ось z (рис. 49).

Координатные линии пересекаются под прямыми углами, а единичные векторы базиса $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta$ являются касательными к координатным линиям и направлены в сторону возрастания соответствующих координат.

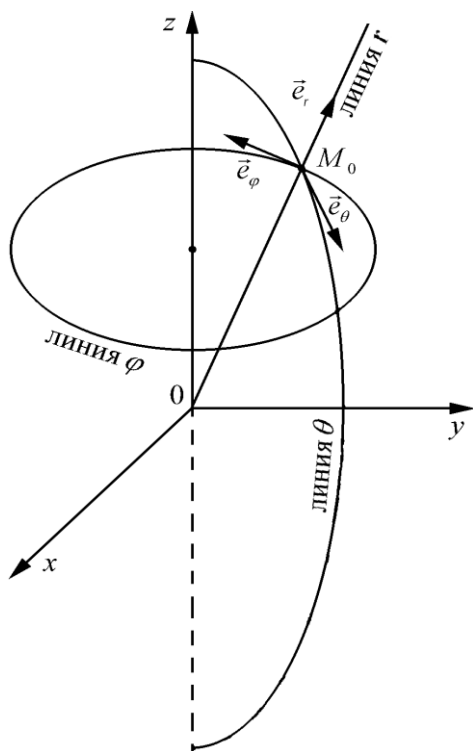


Рис. 49. Координатные линии и единичные векторы сферической системы координат

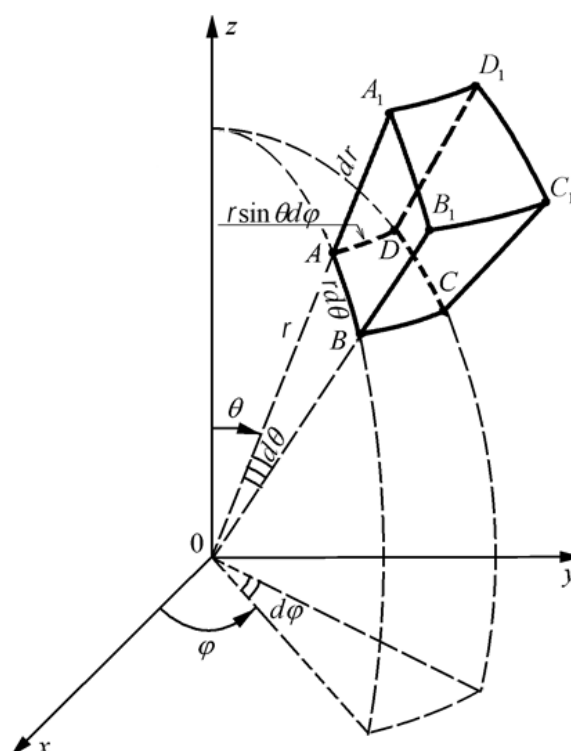


Рис. 50. Элементарный объем в сферических координатах

С помощью координатных поверхностей, проведенных вблизи точки A , можно получить элементарный объем в сферических координатах – криволинейный параллелепипед. Стороны криволинейного параллелепипеда вблизи точки A равны:

$$|AB| = r d\theta; \quad |AD| = r \sin\theta d\varphi; \quad |AA_1| = dr.$$

Элементарный объем в сферических координатах равен (рис. 50)

$$dV = r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta.$$

5.3. Градиент в цилиндрической и сферической системах

Получим формулу градиента скалярного поля $\Psi(M)$ в цилиндрических координатах. Для этого используем дополнительную декартову систему координат, начало которой совпадает с точкой M , а оси $M\tilde{x}, M\tilde{y}, M\tilde{z}$ совпадают с базисом $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ соответственно (рис. 51).

Тогда формула градиента поля $\Psi(M)$ имеет вид:

$$\text{grad } \Psi(M) = \frac{\partial \Psi(M)}{\partial \tilde{x}} \vec{e}_\rho + \frac{\partial \Psi(M)}{\partial \tilde{y}} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial \Psi(M)}{\partial \tilde{z}} \vec{e}_z.$$

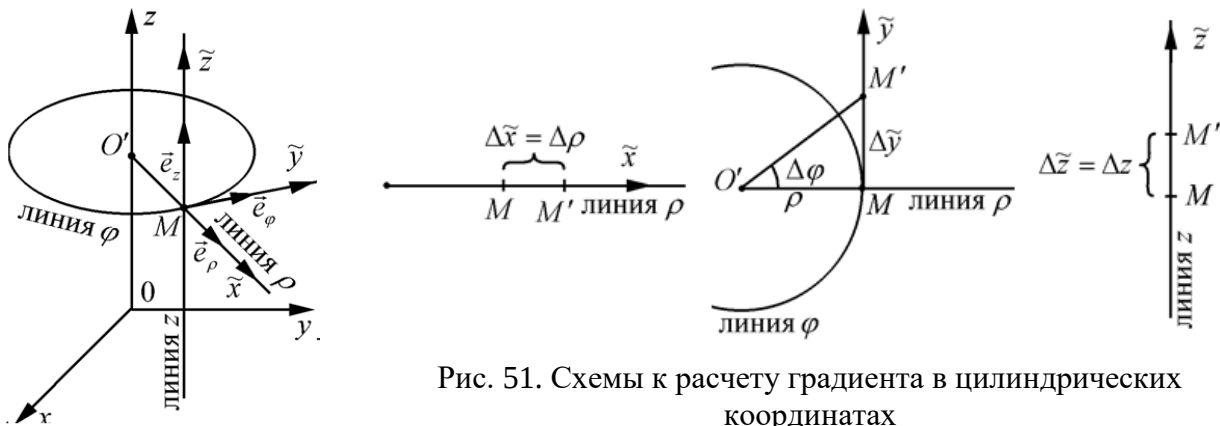


Рис. 51. Схемы к расчету градиента в цилиндрических координатах

Рассмотрим частные производные поля, полученные в правой части:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi(M)}{\partial \tilde{x}} &\cong \frac{\Psi(M') - \Psi(M)}{\Delta \tilde{x}} = \frac{\Psi(M') - \Psi(M)}{\Delta \rho} \cong \frac{\partial \Psi(M)}{\partial \rho}; \\ \frac{\partial \Psi(M)}{\partial \tilde{y}} &\cong \frac{\Psi(M') - \Psi(M)}{\Delta \tilde{y}} = \frac{\Psi(M') - \Psi(M)}{\rho \Delta \varphi} \cong \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi(M)}{\partial \varphi}; \\ \frac{\partial \Psi(M)}{\partial \tilde{z}} &\cong \frac{\Psi(M') - \Psi(M)}{\Delta \tilde{z}} = \frac{\Psi(M') - \Psi(M)}{\Delta z} \cong \frac{\partial \Psi(M)}{\partial z}. \end{aligned}$$

Производим замену и окончательно получаем формулу градиента

$$\text{grad } \Psi(M) = \frac{\partial \Psi(M)}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi(M)}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial \Psi(M)}{\partial z} \vec{e}_z.$$

Рассуждая аналогично, можно получить формулу для расчета градиента скалярного поля $\Psi(M)$ в сферических координатах

$$\text{grad } \Psi(M) = \frac{\partial \Psi(M)}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi(M)}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi(M)}{\partial \theta} \vec{e}_\theta.$$

5.4. Дивергенция в цилиндрической и сферической системах

Определим дивергенцию векторного поля $\vec{A}(M) = A_\rho(M)\vec{e}_\rho + A_\varphi(M)\vec{e}_\varphi + A_z(M)\vec{e}_z$ в цилиндрических координатах, используя определение дивергенции.

Пусть координатные поверхности вырезают малый криволинейный параллелепипед $MNKL M_1 N_1 K_1 L_1$ (рис. 52). Так как его стороны малы, то считаем, что проекции вектора $\vec{A}(M)$: $A_\rho(M)$, $A_\varphi(M)$, $A_z(M)$ постоянны на гранях параллелепипеда.

На гранях, примыкающих к точке M : $MNKL$, MNN_1M_1 и MLL_1M_1 будем считать поле $\vec{A} = \vec{A}(\rho, \varphi, z)$. На противоположных гранях: NKK_1N_1 поле $\vec{A} = \vec{A}(\rho + d\rho, \varphi, z)$, на грани LKK_1L_1 $\vec{A} = \vec{A}(\rho, \varphi + d\varphi, z)$, а на грани $M_1N_1K_1L_1$ $\vec{A} = \vec{A}(\rho, \varphi, z + dz)$.

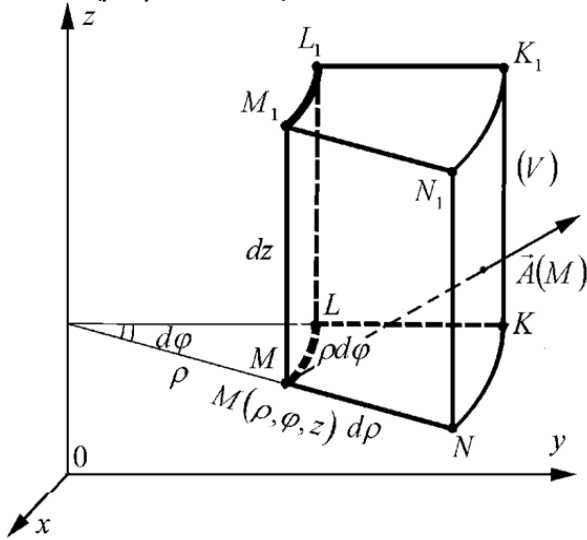


Рис. 52. Схема к расчету дивергенции в цилиндрических координатах

Определим поток векторного поля, пронизывающий поверхность криволинейного параллелепипеда как сумму потоков поля через каждую сторону параллелепипеда:

$$\begin{aligned} P_{NKK_1N_1} &\cong A_\rho S_{NKK_1N_1} = \\ &= A_\rho(\rho + d\rho, \varphi, z) |NK| \cdot |KK_1| = \\ &= A_\rho(\rho + d\rho, \varphi, z) (\rho + d\rho) d\varphi dz; \\ P_{MLL_1M_1} &\cong -A_\rho S_{MLL_1M_1} = \\ &= -A_\rho(\rho, \varphi, z) \rho d\varphi dz. \end{aligned}$$

Суммируя потоки по противоположным сторонам имеем:

$$\begin{aligned} P_{NKK_1N_1} + P_{MLL_1M_1} &= A_\rho(\rho + d\rho, \varphi, z) (\rho + d\rho) d\varphi dz - A_\rho(\rho, \varphi, z) \rho d\varphi dz = \\ &= [A_\rho(\rho + d\rho, \varphi, z) - A_\rho(\rho, \varphi, z)] \rho d\varphi dz + A_\rho(\rho + d\rho, \varphi, z) d\rho d\varphi dz \cong \\ &\cong \frac{\partial A_\rho(\rho, \varphi, z)}{\partial \rho} \rho d\rho d\varphi dz + \frac{A_\rho(\rho, \varphi, z)}{\rho} \rho d\rho d\varphi dz = \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \frac{A_\rho}{\rho} \right) \rho d\rho d\varphi dz. \end{aligned}$$

Аналогично рассуждая, получим:

$$\begin{aligned} P_{LKK_1L_1} + P_{MNN_1M_1} &= [A_\varphi(\rho, \varphi + d\varphi, z) - A_\varphi(\rho, \varphi, z)] d\rho dz = \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \rho d\rho d\varphi dz; \\ P_{M_1N_1K_1L_1} + P_{MNKL} &= [A_z(\rho, \varphi, z + dz) - A_z(\rho, \varphi, z)] d\rho d\varphi = \frac{\partial A_z}{\partial z} \rho d\rho d\varphi dz. \end{aligned}$$

Дивергенция векторного поля в цилиндрической системе координат имеет вид:

$$\operatorname{div} \vec{A} \cong \frac{P}{V} \cong \frac{\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \frac{A_\rho}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \rho d\rho d\varphi dz}{\rho d\rho d\varphi dz} = \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \frac{A_\rho}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z};$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Аналогично рассуждая, можно определить дивергенцию векторного поля в сферических координатах. Представим формулу дивергенции без вывода:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}.$$

5.5. Ротор в цилиндрической и сферической системах

Определим ротор векторного поля $\vec{A}(M) = A_\rho(M)\vec{e}_\rho + A_\varphi(M)\vec{e}_\varphi + A_z(M)\vec{e}_z$ в цилиндрических координатах, используя определение ротора.

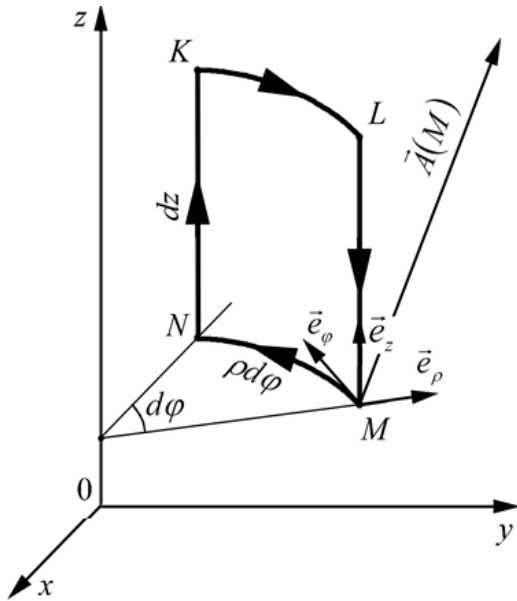


Рис. 53. Схема к расчету ротора в цилиндрических координатах

Для вычисления проекции $\operatorname{rot} \vec{A}$ на направление $\vec{e}_\rho$ построим из координатных линий бесконечно малый прямоугольник, перпендикулярный линии ρ (рис. 53) и вычислим циркуляцию векторного поля $\vec{A}(M)$ вдоль замкнутого контура $MNKL$ при обходе контура против часовой стрелки.

Так как стороны контура малы, то считаем векторное поле постоянным на каждом участке контура, примыкающем к точке M .

На участках MN и ML будем считать $\vec{A} = \vec{A}(\rho, \varphi, z)$, на участке NK $\vec{A} = \vec{A}(\rho, \varphi + d\varphi, z)$, на участке KL $\vec{A} = \vec{A}(\rho, \varphi, z + dz)$.

$$\begin{aligned} C &= \oint_{(MNKL)} (\vec{A}, d\vec{l}) = \oint_{(MN)} (\vec{A}, d\vec{l}) + \oint_{(NK)} (\vec{A}, d\vec{l}) + \oint_{(KL)} (\vec{A}, d\vec{l}) + \oint_{(LM)} (\vec{A}, d\vec{l}) = \\ &= A_\varphi(\rho, \varphi, z) \rho d\varphi + A_z(\rho, \varphi + d\varphi, z) dz - A_\varphi(\rho, \varphi, z + dz) \rho d\varphi - A_z(\rho, \varphi, z) dz \\ &= -[A_\varphi(\rho, \varphi, z + dz) - A_\varphi(\rho, \varphi, z)] \rho d\varphi + [A_z(\rho, \varphi + d\varphi, z) - A_z(\rho, \varphi, z)] dz = \end{aligned}$$

$$= -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} dz \rho d\varphi + \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} dz d\varphi = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \rho d\varphi dz.$$

По определению проекция ротора на направление $\vec{e}_\rho$ имеет вид:

$$rot_\rho \vec{A} \cong \frac{C}{S_{MNKL}} \cong \frac{\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \rho d\varphi dz}{\rho d\varphi dz} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}.$$

Если расположить элементарный контур в окрестности точки M перпендикулярно векторам $\vec{e}_\varphi$ и $\vec{e}_z$, то получим проекции ротора на эти направления:

$$rot_\varphi \vec{A} = \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho};$$

$$rot_z \vec{A} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right).$$

Ротор векторного поля в цилиндрических координатах в точке M

$$rot \vec{A} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \vec{e}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z.$$

Запишем ротор с помощью определителя

$$rot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \rho \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix}.$$

Аналогично рассуждая, получим формулу ротора в сферических координатах

$$rot \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \sin \theta \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\varphi.$$

$$rot \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r \vec{e}_\theta & r \sin \theta \vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\varphi \end{vmatrix}.$$

5.6. Оператор Лапласа в цилиндрической и сферической системах

Представим оператор Лапласа как дифференциальную операцию второго порядка в цилиндрических координатах:

$$\Delta \Psi = \text{div grad } \Psi;$$

$$\text{grad } \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{\partial \Psi}{\rho \partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \vec{e}_z;$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \vec{A} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}; \\
\Delta \Psi &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) = \\
&= \frac{1}{\rho} \left(1 \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}.
\end{aligned}$$

Формула оператора Лапласа в цилиндрических координатах

$$\Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}.$$

Аналогично рассуждая, получим оператор Лапласа в сферических координатах в виде

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} \Psi &= \frac{\partial \Psi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta. \\
\operatorname{div} \vec{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}. \\
\Delta \Psi &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) = \\
&= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{(r \sin \theta)^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right).
\end{aligned}$$

Формула оператора Лапласа в сферических координатах

$$\Delta \Psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{(r \sin \theta)^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right)$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Араманович И. Г., Левин В. И. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1964. – 288 с.
2. Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа для ВТУЗов. - М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. – 663 с.
3. Бицадзе А. В., Калининченко Д. Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1985. – 310 с.
4. Лаптев Г. Ф. Элементы векторного исчисления. - М.: Наука, 1975. – 336 с.
5. Мышкис А. Д. Лекции по высшей математике. - М.: Наука, 1964. – 607 с.
6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 735 с.
7. Шилов Г. Е. Лекции по векторному анализу. М.: Гос. изд. технико-теоретическ. лит., 1954. – 138 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. СКАЛЯРНЫЕ ПОЛЯ	3
1.1. Понятие скалярного поля	3
1.2. Производная скалярного поля по направлению.....	4
1.3. Градиент скалярного поля	6
1.4. Оператор Лапласа.....	7
2. ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ.....	9
2.1. Понятие векторного поля	9
2.2.. Взаимное положение векторных линий.....	11
2.3. Формула Остроградского–Гаусса.....	13
2.4. Поток векторного поля	15
2.5. Дивергенция	16
2.6. Формула Стокса.....	18
2.7. Циркуляция	20
2.8. Ротор	21
3. ∇ – ИСЧИСЛЕНИЕ.....	25
3.1. Оператор Гамильтона "набла"	25
3.2. Основные свойства <i>grad</i> , <i>div</i> и <i>rot</i>	26
3.3. Дифференциальные операции второго порядка.....	27
4. СВОЙСТВА ПРОСТЕЙШИХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ	27
4.1. Потенциальные поля	27
4.2. Соленоидальные поля	29
5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ И СФЕРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ	32
5.1. Понятие о цилиндрической системе координат.....	32
5.2. Понятие о сферической системе координат	34
5.3. Градиент в цилиндрической и сферической системах	36
5.4. Дивергенция в цилиндрической и сферической системах.....	37
5.5. Ротор в цилиндрической и сферической системах	38
5.6. Оператор Лапласа в цилиндрической и сферической системах.....	39
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	41

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению практических работ
для студентов технических направлений
всех форм обучения

Составители:

Зульфикарова Татьяна Владимировна
Матвеева Людмила Иосифовна

В авторской редакции

Подписано к изданию 03.04.2024.

Уч.-изд. л. 2,3.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»
394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84