МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Воронежский государственный технический университет»

Кафедра прикладной математики и механики

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим работам
для студентов направления подготовки
15.03.01 «Машиностроение»
(профиль «Технологии, оборудование и автоматизация
машиностроительных производств»)
заочной формы обучения

Воронеж 2021

УДК 51(07)
ББК 22.1я7

Составители:
канд. физ.-мат. наук В. В. Горбунов,
канд. техн. наук О. А. Соколова

Математика: методические указания к практическим работам для студентов направления подготовки 15.03.01 «Машиностроение» (профиль «Технологии, оборудование и автоматизация машиностроительных производств») заочной формы обучения / ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»; сост.: В. В. Горбунов, О. А. Соколова. – Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2021. 40 с.

Приводится последовательность проведения практических занятий по дисциплине «Математика», разбираются опорные задачи, усвоение материала контролируется задачами для самостоятельного решения.

Предназначены для студентов направления подготовки 15.03.01 «Машиностроение» (профиль «Технологии, оборудование и автоматизация машиностроительных производств») заочной формы обучения.

Методические указания подготовлены в электронном виде и содержатся в файле МУ_ПР_математика_15.03.01.pdf.

Ил. 3. Табл. 1. Библиогр.: 2 назв.

УДК 51(07)
ББК 22.1я7

***Рецензент** – А. В. Келлер, д-р физ.-мат. наук, доц. кафедры прикладной математики и механики ВГТУ*

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

I СЕМЕСТР

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 1

Пример 1. Найти матричный многочлен $AB+3C\text{-}2E$, где

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}7 & 1 & 3 & 6\\ 9 & 4 & 7 & 7\end{pmatrix},\quad \mathrm{B}=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 4 & 1\\ 0 & -8\\ 2 & 4\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}.$$

Решение.

Число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B, поэтому можно умножать матрицу A на матрицу B. По формуле перемножения матриц находим:

$c_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}+a_{14}b_{41}=7\cdot 1+1\cdot 4+3\cdot 0+6\cdot 2=23;$

$c_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}+a_{14}b_{42}=7\cdot 5+1\cdot 1+3\cdot(-8)+6\cdot 4=36;$

$c_{21}=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}+a_{24}b_{41}=9\cdot 1+4\cdot 4+7\cdot 0+7\cdot 2=39;$

$c_{22}=9\cdot 5+4\cdot 1+7\cdot(-8)+7\cdot 4=21;$

Следовательно: $AB=\begin{pmatrix}23 & 36\\ 39 & 21\end{pmatrix}$.

Матрица $3C=3\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12 & 6\\ 3 & -6\end{pmatrix}$, $2E=2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Получаем матричный многочлен

$$AB+3C\text{-}2E=\begin{pmatrix}23 & 36\\ 39 & 21\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-12 & 6\\ 3 & -6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 42\\ 42 & 13\end{pmatrix}.$$

Задача для самостоятельного решения. Найти матричный многочлен $3AB+C\text{-}3E$, где

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 3 & 1\\ 8 & 4 & 6 & -2\end{pmatrix},\quad \mathrm{B}=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 3 & -1\\ 1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}.$$

Пример 2. Вычислить определитель третьего порядка

$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, используя правило треугольников.

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{11}a_{23}a_{32} +$$

$$+ a_{33}a_{12}a_{21}) = 4\cdot 2\cdot 3 + 1\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot 1 - (1\cdot 2\cdot 3 + 4\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot 1) = 24 + 1 + 3 - (6 + 4 + 3) = 15.$$

Задача для самостоятельного решения. Вычислить определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

Ответ: –73.

Пример 3. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 5 & -8 & 6 \end{pmatrix}$. Вычислить обратную матрицу A^{-1}.

Решение: Вычислим определитель матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 5 & -8 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 10 - 3\cdot 14 + 0 = -22.$$

Найдем алгебраические дополнения матрицы:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -8 & 6 \end{vmatrix} = 10; \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -14; \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -8 & 6 \end{vmatrix} - 18; \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 12; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -4;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -4; \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -14.$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{22}\begin{pmatrix}10 & -18 & 6\\ -14 & 12 & -4\\ 6 & -4 & -14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{11} & \frac{9}{11} & -\frac{3}{11}\\ \frac{7}{11} & -\frac{6}{11} & \frac{2}{11}\\ -\frac{3}{11} & \frac{2}{11} & \frac{7}{11}\end{pmatrix}.$$

Пример 4. Решить системы уравнений методом обратной матрицы $\begin{cases}x+2y+3z=6\\ 4x+y+4z=9\\ 3x+5y+2z=10\end{cases}$.

Решение: Вычислим определитель системы Δ:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 4\\ 3 & 5 & 2\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}1 & 4\\ 5 & 2\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}4 & 4\\ 3 & 2\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}4 & 1\\ 3 & 5\end{vmatrix}== -18+8+51=41.$$

Поскольку определитель системы отличен от нуля, то можно вычислить обратную матрицу A^{-1}. Для этого находим алгебраические дополнения:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 4\\ 5 & 2\end{vmatrix}=-18,\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 2\end{vmatrix}=11,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{vmatrix}=15,\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}4 & 4\\ 3 & 2\end{vmatrix}=4,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-7,\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 4\end{vmatrix}=8,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}4 & 1\\ 3 & 5\end{vmatrix}=17,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\end{vmatrix}=-7.$$

Вычислим матрицу-столбец неизвестных согласно формуле

$$X=A^{-1}\cdot B.$$

$$X=\frac{1}{41}\cdot\begin{pmatrix}-18 & 11 & 5\\ 4 & -7 & 8\\ 17 & 1 & -7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\ 9\\ 10\end{pmatrix}=\frac{1}{41}\begin{pmatrix}-108+99+50\\ 24-63+80\\ 102+9-70\end{pmatrix}=\frac{1}{41}\cdot\begin{pmatrix}41\\ 41\\ 41\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Решение системы уравнений имеет вид x=1, y=1, z=1.

Задача для самостоятельного решения. Решить системы уравнений методом обратной матрицы

$$\begin{cases} x-2y-z=-5\\ x+y-2z=-1\\ 2x-3y+3z=2 \end{cases}.$$

Ответ: (1;2;2)

Пример 5. Решить системы уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x+2y+3z=6\\ 4x+y+4z=9\\ 3x+5y+2z=10 \end{cases}.$$

Решение:

Умножим первое уравнение на (–4) и добавим ко второму уравнению

$$\begin{cases} x+2y+3z=\quad 6\\ \quad -7y-8z=-15.\\ 3x+5y+2z=10 \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на (–3) и добавим к третьему уравнению

$$\begin{cases} x+2y+3z=\quad 6\\ \quad -7y-8z=-15.\\ \quad\ -y-7z=-8 \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на $(-\frac{1}{7})$ и добавим к третьему уравнению

$$\begin{cases} x+2y+3z = 6 \\ -7y-8z=-15 \\ (-7+\frac{8}{7})z=(-8+\frac{15}{7}) \end{cases}.$$

Привели систему к треугольному виду. Начинается обратный ход: $z=\frac{-41/7}{-41/7}=1$, $y=\frac{-15+8z}{-7}=\frac{-15+8}{-7}=1$, $x=6-2y-3z=1$.

Задача для самостоятельного решения. Решить системы уравнений методом Гаусса $\begin{cases} x-3y+6z=10 \\ 2x+y+2z=7 \\ x-y+z=2 \end{cases}$.

Ответ: (1;1;2)

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 2

Пример 1. Вершины пирамиды находятся в точках $A(2,3,4)$, $B(4,7,3)$, $C(1,2,2)$, $D(-2,0,-1)$. Вычислить:

а) площадь грани ABC;

б) объем пирамиды $ABCD$;

в) угол ABC;

г) Проверить, что векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ компланарны.

Решение.

а) Площадь треугольника ABC находится как половина модуля векторного произведения векторов $\overrightarrow{AB}\{2,4,-1\}$ и $\overrightarrow{AC}\{-1,-1,-2\}$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right]\right|$$

Находим векторное произведение векторов в координатном представлении

$$\left[\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 4 & -1\\ -1 & -1 & -2\end{vmatrix}=-9\vec{i}+5\vec{j}+2\vec{k}\,.$$

Найдем длину векторного произведения

$$\left|\left[\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right]\right|=\sqrt{(-9)^2+(5)^2+(2)^2}=\sqrt{110}\,.$$

Тогда $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right]\right|=\dfrac{\sqrt{110}}{2}$.

б) Сначала находим объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}\{2,4,-1\}$, $\overrightarrow{AC}\{-1,-1,-2\}$ и $\overrightarrow{AD}\{-4,-3,-5\}$, который равен модулю смешанного произведения этих векторов.

Смешанное произведение находим по формуле

$$\left(\left[\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right],\overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix}2 & 4 & -1\\ -1 & -1 & -2\\ -4 & -3 & -5\end{vmatrix}=10-3+32+4-12-20=11.$$

V_{ABCD} соответствует шестой части модуля смешанного произведения трех векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$: $V_{ABCD}=\dfrac{11}{6}$.

в) Косинус угла ABC находится по формуле

$$\cos(ABC)=\frac{\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|}.$$

Имеем

$$\cos(ABC)=\frac{-2\cdot(-3)-4\cdot(-5)+1\cdot(-1)}{\sqrt{(-2)^2+(-4)^2+(1)^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+(-5)^2+(-1)^2}}=\frac{25}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{35}}\approx 0{,}92.$$

По таблицам находим соответствующий угол

$\arccos(0{,}92)=23^0$

г) Проверим выполнение условия компланарности векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$

$$\left(\left[\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right],\overrightarrow{BC}\right)=0\,.$$

Вычисляем смешанное произведение

$$\left(\left[\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right],\overrightarrow{BC}\right)=\begin{vmatrix}2 & 4 & -1\\ -1 & -1 & -2\\ -3 & -5 & -1\end{vmatrix}=2+24-5+3-20-4=0.$$

Следовательно, векторы компланарны.

Задача для самостоятельного решения. Вершины пирамиды находятся в точках $A(3,5,4)$, $B(5,8,6)$, $C(1,9,9)$, $D(6,4,8)$. Вычислить:

а) площадь грани ABC;

б) объем пирамиды $ABCD$;

в) угол ABC;

г) Проверить, что векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ компланарны.

Пример 2. Вершины пирамиды находятся в точках $A(4,7,8)$, $B(-1,13,0)$, $C(2,4,9)$ и $D(1,8,9)$.

Составить:

а) уравнения ребра AB;

б) уравнение грани ABC;

в) уравнения высоты DE;

г) уравнения прямой, проходящей через точку D параллельно ребру AB;

д) уравнение плоскости, проходящей через точку D перпендикулярно ребру AB.

Вычислить:

е) длину ребра BC;

ж) угол между ребром CD и плоскостью ABC;

Решение.

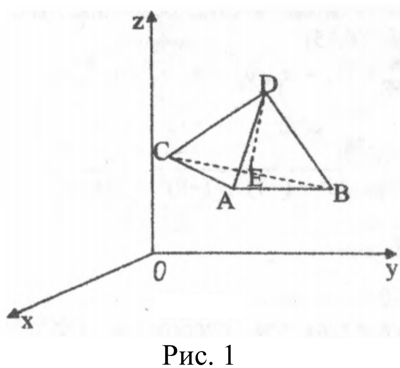

Рис. 1

а) Уравнения ребра AB могут быть получены как уравнения прямой, проходящей через две заданные точки A(4,7,8) и B(-1,13,0)

$$\frac{x-4}{-1-4}=\frac{y-7}{13-7}=\frac{z-8}{0-8} \text{ или } \frac{x-4}{-5}=\frac{y-7}{6}=\frac{z-8}{-8}.$$

б) уравнение грани ABC получается как уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки A(4,7,8), B(-1,13,0) и C(2,4,9)

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-7 & z-8 \\ -1-4 & 13-7 & 0-8 \\ 2-4 & 4-7 & 9-8 \end{vmatrix}=0 \text{ или } \begin{vmatrix} x-4 & y-7 & z-8 \\ -5 & 6 & -8 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}=0\cdot$$

Раскрыв определитель, получим $6x-7y-9z+97=0$ – уравнение грани ABC.

в) Для получения уравнений высоты DE воспользуемся координатами точки D(1,8,9). В качестве направляющего вектора для DE используем вектор нормали $\overrightarrow{N}\{6,-7,-9\}$ для плоскости ABC. Уравнения высоты DE запишутся в виде:

$$\frac{x-1}{6}=\frac{y-8}{-7}=\frac{z-9}{-9}$$

г) Для получения уравнений прямой, проходящей через точку D параллельно ребру AB воспользуемся направляющим вектором $\vec{q}=\{-5,6,-8\}$ для прямой AB:

$$\frac{x-1}{-5}=\frac{y-8}{6}=\frac{z-9}{-8}$$

д) Уравнение плоскости, проходящей через точку D(1,8,9) перпендикулярно ребру AB записывается при использовании вектора $\overrightarrow{AB}\{-5,6,-8\}$, как вектора нормали

$$-5(x-1)+6(y-8)-8(z-9)=0 \text{ или } -5x+6y-8-29=0.$$

е) Длину ребра BC находим как расстояние между точками B(-1,13,0) и C(2,4,9):

$$BC=\sqrt{(2-(-1))^2+(4-13)^2+(9-0)^2}=\sqrt{171}.$$

ж) Для нахождения угла между ребром CD и плоскостью основания ABC найдем $sin\varphi$ (φ – угол между вектором $\overrightarrow{CD}\{-1,4,0\}$) и нормалью $\overrightarrow{N}\{6,-7,-9\}$ к плоскости ABC)

$$\sin\varphi = \frac{|-1\cdot 6 + 4\cdot(-7) + 0\cdot(-9)|}{\sqrt{(6)^2+(-7)^2+(-9)^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+(4)^2+(0)^2}} = \frac{|-34|}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{166}} \approx 0{,}64 .$$

$$\varphi = \arcsin(0{,}64) = 39^0 .$$

Задача для самостоятельного решения. Вершины пирамиды находятся в точках $A(6,1,1)$, $B(4,6,6)$, $C(4,2,0)$ и $D(1,2,6)$.

Составить:

а) уравнения ребра AB;

б) уравнение грани ABC;

в) уравнения высоты DE;

г) уравнения прямой, проходящей через точку D параллельно ребру AB;

д) уравнение плоскости, проходящей через точку D перпендикулярно ребру AB.

Вычислить:

е) длину ребра BC;

ж) угол между ребром CD и плоскостью ABC;

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 3

Пример 1. Даны вершины треугольника A(4,3), B(-3,-3), C(2,7).

Найти:

а) уравнение стороны AB,

б) уравнение высоты CH,

в) уравнение медианы AM,

г) угол ABC,

д) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB,

е) расстояние от точки C до прямой AB.

Решение.

а) Уравнение AB запишем как уравнение прямой, походящей через две заданные точки A(4,3) и B(-3,-3):

$$\frac{x-4}{-3-4} = \frac{y-3}{-3-3},\ 6(x-4) = 7(y-3),\ 6x - 7y - 3 = 0 .$$

б) Уравнение высоты *CH*, как перпендикуляра к стороне *AB*, запишем как каноническое уравнение прямой, проходящей через точку C(2,7) и имеющей в качестве направляющего вектора нормаль к *AB*:

$$\vec{N}_{AB} = \{6,-7\},\ \frac{x-2}{6} = \frac{y-7}{-7} \text{ или } 7x+6y-56=0.$$

в) Медианой называется отрезок прямой, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей ей стороны. Найдем координаты точки *M* – середины отрезка *BC*:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{-3+2}{2} = -\frac{1}{2},\ y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-3+7}{2} = 2.$$

Для медианы *AM* запишем уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

$$\frac{x-4}{-\frac{1}{2}-4} = \frac{y-3}{2-3},\ \ 2x-9y+19=0.$$

г) Угол *ABC* можно искать его как угол между векторами $\overrightarrow{BA} = \{4-(-3), 3-(-3)\} = \{7,6\}$ и $\overrightarrow{BC} = \{2-(-3), 7-(-3)\} = \{5,10\}$:

$$\cos(ABC) = \frac{7\cdot 5 + 6\cdot(10)}{\sqrt{6^2+7^2}\cdot\sqrt{5^2+10^2}} = \frac{95}{\sqrt{85}\cdot\sqrt{125}} = \frac{19}{\sqrt{425}},$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{19}{\sqrt{425}}\right).$$

д) Так как прямая, проходящая через вершину *C,* параллельна стороне *AB* ($6x-7y-3=0$), то проекции вектора нормали к *AB* можно взять те же

$$6(x-2)-7(y-7)=0 \text{ или } 6x-7y+37=0.$$

е) Расстояние от точки *C*(2,7) до прямой *AB* вычисляем по формуле

$$d = \left| \frac{6 \cdot x_c - 7 \cdot y_c - 3}{\sqrt{6^2 + (-7)^2}} \right| = \left| \frac{6 \cdot 2 - 7 \cdot 7 - 3}{\sqrt{6^2 + (-7)^2}} \right| = \frac{40}{\sqrt{85}} .$$

Задача для самостоятельного решения. Даны вершины треугольника $A(10,-9)$, $B(-2,-4)$, $C(4,4)$.

Найти:

а) уравнение стороны AB,

б) уравнение высоты CH,

в) уравнение медианы AM,

г) угол ABC,

д) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB,

е) расстояние от точки C до прямой AB.

Если при вычислении пределов алгебраической суммы, произведения или частного от деления функций сами функции стремятся к некоторым константам, не равным одновременно нулю в случае деления функций, то вычисление пределов не вызывает затруднения.

Пример 2. Найти предел $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{7x^2 + 2x}{3x^4 - 1}$**.**

Решение.

$$\lim_{x \to 1} \frac{7x^2 + 2x}{3x^4 - 1} = \frac{\lim\limits_{x \to 1}\left(7x^2 + 2x\right)}{\lim\limits_{x \to 1}\left(3x^4 - 1\right)} = \frac{7\lim\limits_{x \to 1}\left(x^2\right) + 2\lim\limits_{x \to 1}(x)}{3\lim\limits_{x \to 1}\left(x^4\right) - \lim\limits_{x \to 1}(1)} = \frac{9}{2}.$$

Пределы отношения бесконечно малых величин, отношения бесконечно больших величин, произведения бесконечно малой и бесконечно большой величины могут принимать различные значения или даже не существовать. Выражения вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}, \left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}, \{0 \cdot \infty\}, \{\infty - \infty\}, \left\{1^\infty\right\}$ называются *неопределенностями.*

Пример 3. Найти предел $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{7x^3 - 4x^2 + 2x + 1}{3x^3 + 4x^2 - 6x - 8}$.

Решение. Предел содержит неопределенность типа $\dfrac{\infty}{\infty}$. Для ее раскрытия выносим старшие степени в числителе и знаменателе:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3-4x^2+2x+1}{3x^3+4x^2-6x-8}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(7-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(3+\frac{4}{x}-\frac{6}{x^2}-\frac{8}{x^3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(7-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{\left(3+\frac{4}{x}-\frac{6}{x^2}-\frac{8}{x^3}\right)}=\frac{7}{3}.$$

Здесь было использовано, что при $x\to\infty$ величины $\frac{1}{x},\frac{1}{x^2},\frac{1}{x^3}$ стремятся к нулю.

Пример 4. Найти предел $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{x^2-5x+2}$.

Решение. Для выделения бесконечно малых разложим числитель и знаменатель на множители по корням и сократим бесконечно малые множители (x-2):

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{2x^2-5x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+5)}{2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+5}{2x-1}=\frac{7}{3}.$$

Пример 5. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x+1}-2}{x^2+4x-5}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x+1}-2}{x^2+4x-5}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{3x+1}-2)(\sqrt{3x+1}+2)}{(x+5)(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(3x+1)-4}{(x+5)(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)}{(x+5)(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3}{(x+5)(\sqrt{3x+1}+2)}=\frac{3}{6\cdot(2+2)}=\frac{1}{8}.$$

Пример 6. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 7x}{\sin^2 5x}$.

Решение. Данный предел содержит неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Преобразуем это выражение так, чтобы можно было воспользоваться 1-м замечательным пределом $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 7x}{\sin^2 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{7x}{2}\right)}{\sin^2 5x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{7x}{2}\right)\cdot\left(\frac{7x}{2}\right)^2\cdot}{\left(\frac{7x}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{\sin^2 5x}{25x^2}\right)\cdot 25x^2}=$$

$$2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\left(\frac{7x}{2}\right)x}{\left(\frac{7x}{2}\right)}\right)^2\cdot\left(\frac{5x}{\sin 5x}\right)^2\cdot\left(\frac{49x^2}{4\cdot 25x^2}\right)=\frac{49}{50}.$$

Пример 7. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{7x+3}{7x-1}\right)^{x+3}$.

Решение. Для раскрытия неопределенности 1^∞ преобразуем дробь и показатель степени так, чтобы воспользоваться вторым замечательным пределом.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7x+3}{7x-1}\right)^{x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7x-1+4}{7x-1}\right)^{x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{7x-1}\right)^{x+3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{7x-1}\right)^{\frac{(7x-1)(x+3)4}{4(7x-1)}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4(x+3)}{(7x-1)}}=e^{\frac{4}{7}}.$$

Задачи для самостоятельного решения. Найти пределы

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-3x^2}{x+x^2}$, б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{6-x}-x}{x^2-4}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{4x^2}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{x+5}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 4

Пример 1. Найти производную функции $y=\dfrac{\cos(7x-2)}{x^2}$.

Решение. В этом примере необходимо применять формулы для производной частного двух функций и для производной функции от функции (производной сложной функции), то есть, если $y=f(\varphi(x))$, то $y'=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$.

$$\left(\frac{\cos(7x-2)}{x^2}\right)'=\frac{(\cos(7x-2))'x^2-\cos(7x-2)(x^2)'}{x^4}=$$

$$=\frac{-\sin(7x-2)(7x-2)'x^2-2x\cos(7x-2)}{x^4}=$$

$$=\frac{-7x^2\cdot\sin(7x-2)-2x\cdot\cos(7x-2)}{x^4}=$$

$$=\frac{-7x\cdot\sin(7x-2)-2\cos(7x-2)}{x^3}.$$

Пример 2. Найти производную функции $y=2^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

Решение. Применяя формулу для производной сложной функции получим:

$$\left(2^{\frac{1}{\sin^2 x}}\right)'=2^{\frac{1}{\sin^2 x}}\cdot\ln 2\cdot\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)'=2^{\frac{1}{\sin^2 x}}\cdot\ln 2\cdot\left(\frac{-2}{\sin^3 x}\right)\cdot(\sin x)'=$$

$$=-2^{\frac{1}{\sin^2 x}}\cdot\ln 2\cdot\frac{\cos x}{\sin^3 x}.$$

Пример 3. Найти производную функции $y=e^{-x}\cdot\sqrt{1+e^{2x}}$.

Решение. Используя правило дифференцирования произведения и правило дифференцирования сложной функции, имеем

$$\left(e^{-x}\cdot\sqrt{1+e^{2x}}\right)'=\left(e^{-x}\right)'\cdot\sqrt{1+e^{2x}}+e^{-x}\cdot\left(\sqrt{1+e^{2x}}\right)'=$$

$$=e^{-x}\cdot(-x)'\cdot\sqrt{1+e^{2x}}+e^{-x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+e^{2x}}}\cdot\left(1+e^{2x}\right)'=$$

$$=-e^{-x}\cdot\sqrt{1+e^{2x}}+e^{-x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+e^{2x}}}\cdot e^{2x}\cdot(2x)'=$$

$$=-e^{-x}\cdot\sqrt{1+e^{2x}}+e^{-x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+e^{2x}}}\cdot e^{2x}\cdot 2.$$

Пример 4. Найти производную функции $y=\sqrt[4]{1+\cos^3 x}$.

Решение.

$$\left(\sqrt[4]{1+\cos^3 x}\right)'=\frac{1}{4\cdot\sqrt[4]{(1+\cos^3 x)^3}}\cdot\left(1+\cos^3 x\right)'=$$

$$=\frac{1}{4\cdot\sqrt[4]{(1+\cos^3 x)^3}}\cdot\cdot\left(3\cos^2 x\right)\cdot(\cos x)'=$$

$$=\frac{1}{4\cdot\sqrt[4]{(1+\cos^3 x)^3}}\cdot\cdot\left(3\cos^2 x\right)\cdot(-\sin x).$$

Задачи для самостоятельного решения. Найти производную функций

а) $y=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sin 2x}$, б) $y=\arccos\sqrt{1-3x}$,

в) $y=\sqrt{9+tg^2 x}$, г) $y=\sin\dfrac{x}{2}\sin 2x$.

Пример 5. Найти производную функции $y=(\cos x)^{\sin x}$.

Решение. Так как в этом примере основание и показатель степени зависят от x (то есть нельзя использовать ни строку с производной показательной функции, ни строку с производной степенной функции), то применим *способ логарифмического дифференцирования*. Прологарифмируем исходную функцию

$$\ln y(x)=\ln\left((\cos x)^{\sin x}\right)=\sin x\cdot\ln\cos x.$$

Продифференцируем левую и правую части последнего равенства

$$\frac{y'}{y} = (\sin x)' \cdot \ln\cos x + \sin x \cdot \left(\ln\cos x\right)' =$$

$$= \cos x \cdot \ln\cos x + \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot (\cos x)' =$$

$$= \cos x \cdot \ln\cos x + \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x)$$

и окончательно получим:

$$y' = y(x) \cdot \left(\cos x \cdot \ln\cos x - \frac{\sin^2 x}{\cos x} \right) = \left(\cos x\right)^{\sin x} \cdot \left(\cos x \cdot \ln\cos x - \frac{\sin^2 x}{\cos x} \right).$$

Пример 6. Найти производную неявно заданной функции $\arccos(2x \cdot y) = 2^x$.

Решение. Это уравнение не разрешимо относительно y, следовательно, функция $y(x)$ задана неявно. В общем виде это записывается так: $F(x, y) = 0$. Чтобы найти производную $y'(x)$, нужно обе части уравнения $F(x, y) = 0$ продифференцировать по x, рассматривая y как функцию от x. А потом из полученного уравнения выражаем искомую производную y':

$$\left(\arccos(2x \cdot y)\right)' = (2^x)'; \quad -\frac{1}{\sqrt{1-(2xy)^2}} \cdot (2xy)' = 2^x \cdot \ln 2;$$

$$-\frac{2}{\sqrt{1-4x^2y^2}} \cdot (y + xy') = 2^x \cdot \ln 2;$$

$$-\frac{2xy'}{\sqrt{1-4x^2y^2}} = \frac{2y}{\sqrt{1-4x^2y^2}} + 2^x \cdot \ln 2;$$

$$y' = -\frac{y}{x} - \frac{2^x \cdot \ln 2\sqrt{1-4x^2y^2}}{2x}.$$

Пример 7. Найти производную параметрически заданной функции $\begin{cases} x = 2\sin t^2 \\ y = 3\cos t^2 \end{cases}$.

Решение. Если функция задана параметрически $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \varphi(t) \end{cases}$, то

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}; \qquad y''_{xx} = \frac{\left(y'_t\right)'_t}{x'_t} = \frac{y''_t \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_t}{\left(x'_t\right)^3}.$$

$$y'_x = \frac{\left(3\cos t^2\right)'_t}{\left(2\sin t^2\right)'_t} = \frac{-3\sin t^2 \left(t^2\right)'}{2\cos t^2 (t^2)'} = \frac{-3\sin t^2 \cdot 2t}{2\cos t^2 \cdot 2t} = -\frac{3\sin t^2}{2\cos t^2} = -\frac{3}{2} tgt^2.$$

Задачи для самостоятельного решения. Найти производную функций

а) $y = \left(\ln x\right)^{\ln x}$, б) $ctg(x^2 + y^2) = 1$, в) $\begin{cases} x = e^t \\ y = \ln t \end{cases}$.

г) $\cos\left(xy\right) = x$; д) $x = \ln(1 + t^2)$, $y = t - arctgt$.

Пример 8. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 3}$ и построить ее график.

Решение. 1. Функция не определена в точках, где знаменатель обращается в нуль, то есть при $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{3}$. Следовательно, $D(f) = (\infty, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$.

2. Определим точки пересечения графика с координатными осями. Единственной такой точкой будет $O(0,0)$.

3. Исследуем функцию на четность, нечетность, периодичность. Имеем $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 3} = \dfrac{(-x)^3}{(-x)^2 - 3} = -f(x)$, следовательно, $f(x)$-нечетная.

При исследовании функции можно ограничиться значениями $x \geq 0$, а затем продолжить функцию, пользуясь свойством нечетности (график симметричен относительно начала координат).

4. Исследуем функцию на наличие у ее графика асимптот.

а) Вертикальные асимптоты.

$$\lim_{x \to \sqrt{3}-0} \frac{x^3}{x^2-3} = -\infty, \quad \lim_{x \to \sqrt{3}+0} \frac{x^3}{x^2-3} = +\infty.$$

Следовательно, $x = \sqrt{3}$ - вертикальная асимптота.

б) Наклонные асимптоты

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2-3} = 1,$$

$$b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3}{x^2-3} - x\right) = 0.$$

Таким образом, прямая $y = x$ – наклонная асимптота.

5. Определим точки возможного экстремума. Для этого найдем производную.

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{x^2-3}\right)' = \frac{3x^2(x^2-3) - x^3 2x}{(x^2-3)^2} = \frac{x^2(x^2-9)}{(x^2-3)^2} = 0.$$

Критическая точка первого рода: $x_1 = 0$.

Точки $x_{4,5} = \pm\sqrt{3}$ не могут быть точками экстремума, так как они не входят в область определения функции.

6. Определим точки возможного перегиба. Для этого найдем вторую производную.

$$f''(x) = \left(\frac{x^3}{x^2-3}\right)'' = \left(\frac{x^2(x^2-9)}{(x^2-3)^2}\right)' = \frac{6x(x^2+9)}{(x^2-3)^3} = 0.$$

Существует одна критическая точка второго рода: $x_1 = 0$.

Найдем промежутки возрастания и убывания, точки экстремума, промежутки выпуклости, и точки перегиба.

Результаты исследования оформим в виде таблицы, в которой отражены изменения знака первой и второй производных.

Таблица

x	(-∞,-3)	-3	$(-3,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},0)$	0	$(0,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},3)$	3	(3,∞)
$f'(x)$	+	0	–	Не сущ.	–	0	–	Не сущ.	–	0	+
$f''(x)$	–	–	–	Не сущ.	+	0	–	Не сущ.	+	+	+
$f(x)$	Возр. вып.	Max y_{max} = -4,5	Убыв., вып.	Не сущ.	Убыв. вогн.	Точка пе-рег. y_{mn}=0	Убыв вып.	Не сущ.	Убыв. вогн.	Min y_{min} =4,5.	Возр., вогн.

Используя полученные результаты, строим график, функции, предварительно нанеся на чертеж точки пересечения с осями координат, точки экстремума, точки перегиба и асимптоты.

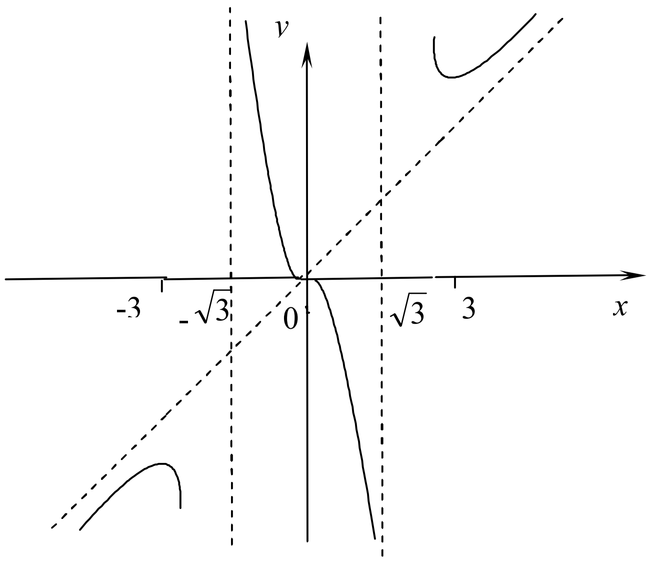

Рис. 2

II СЕМЕСТР

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 1

Пример 1. Найти неопределенный интеграл $\int \cos(x^2)\ x\,dx$.

Решение.

$$\int \cos(x^2)\ x\,dx = \int \cos(x^2)\ d(\frac{x^2}{2}) = \frac{1}{2}\int \cos(x^2)\,d(x^2).$$

Согласно инвариантности формул таблицы интегралов в каждой строке таблицы переменную интегрирования x можно заменить на любую функцию x, то есть если $\int \cos x\,dx = \sin x + C$, то $\int \cos(x^2)\,d(x^2) = \sin(x^2) + C$. Таким образом,

$$\int \cos(x^2)\ x\,dx = \int \cos(x^2)\ d(\frac{x^2}{2}) = \frac{1}{2}\int \cos(x^2)\,d(x^2) = \frac{1}{2}\sin(x^2) + C$$

Пример 2. Проинтегрировать $\int e^{\sin 3x} \cos 3x\,dx$.

Решение: Введем новую переменную интегрирования: $t = \sin 3x$, и $dt = 3\cos 3x\,dx$. Проведем замену переменной интегрирования в неопределенном интеграле:

$$\int e^{\sin 3x} \cos 3x\,dx = \left| \begin{array}{c} t = \sin 3x \\ dt = 3\cos 3x dx \end{array} \right| = \int e^t\,\frac{dt}{3} = \frac{e^t}{3} + C = \frac{e^{\sin 3x}}{3} + C.$$

Еще один вариант замены переменной t определяется соотношением $x=\psi(t)$ Тогда $dx = \psi'(t)dt$ и

$$\int f(x)dx = \int f(\psi(t))\psi'(t)dt$$

Пример 3. Проинтегрировать $\int \frac{dx}{e^{2x-1}+4}$.

Решение: Введем новую переменную интегрирования: $e^{2x-1} = t$ или $x = \frac{1+\ln t}{2}$. Проведем замену переменной:

$$\int\frac{dx}{e^{2x-1}+4}=\left|\begin{array}{c}x=\frac{1}{2}(\ln t+1)\\ dx=\frac{dt}{2t}\end{array}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t(t+4)}=\frac{1}{2}\int\frac{d(t+2)}{(t+2)^2-4}=$$

$$=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{(t+2)-2}{(t+2)+2}\right|+C=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{t}{t+4}\right|+C=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{e^{2x-1}}{e^{2x-1}+4}\right|+C.$$

Пример 4. Найти интеграл $\int\frac{x+2}{x^2+2x+5}dx$.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию, выделив в числителе производную знаменателя. Для этого числитель представим в виде $x+2=(2x+2)\frac{1}{2}+1$. Тогда

$$\int\frac{x+2}{x^2+2x+5}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2(x+1)}{x^2+2x+5}dx+\int\frac{1}{x^2+2x+5}dx.$$

В первом интеграле сделаем замену переменной $x^2+2x+5=t$, $2(x+1)dx=dt$. Получим

$$\frac{1}{2}\int\frac{2(x+1)}{x^2+2x+5}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|+C=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+5\right|+C.$$

Для вычисления второго интеграла выделим в знаменателе полный квадрат $x^2+2x+5=x^2+2x+1+4=(x+1)^2+2^2$.

$$\int\frac{1}{x^2+2x+5}dx=\int\frac{dx}{(x+1)^2+4}dx=\frac{1}{2}arctg\frac{x+1}{2}+C.$$

Окончательно получим

$$\int\frac{x+2}{x^2+2x+5}dx=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+5\right|+\frac{1}{2}arctg\frac{x+1}{2}+C.$$

Задачи для самостоятельного решения. Найти неопределенный интеграл посредством метода замены переменной

а) $\int\cos\sqrt{x}\,\frac{dx}{\sqrt{x}}$, б) $\int\frac{9-2x}{x^2+2x+2}dx$, в) $\int x\left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)dx$.

Пример 5. Проинтегрировать по частям $\int(5x+2)\cos 7x\,dx$.

Решение:

$$\int (5x+2)\cos 7x dx = \left| \begin{array}{ll} u = 5x+2; & du = 5dx \\ dv = \cos 7x\, dx; & v = \dfrac{\sin 7x}{7} \end{array} \right| = \frac{(5x+2)\sin 7x}{7} - 5\int \frac{\sin 7x}{7} dx =$$

$$= \frac{(5x+2)\sin 7x}{7} - 5\int \frac{\sin 7x}{7} d(3x) = \frac{(5x+2)\sin 7x}{7} + \frac{5\cos 7x}{49} + C.$$

Задачи для самостоятельного решения. Найти неопределенный интеграл интегрированием по частям

а) $\int (x+5)\ \sin 3x\ dx$, б) $\int (4x^2+1)\ \ln x\ dx$.

Пример 6. Найти интеграл $\int \dfrac{x^2 - 2x + 3}{(x+1)(x^2+6x+10)} dx$.

Решение: Учитывая, что знаменатель имеет однократный действительный (простой) корень $x_1 = -1$, а так же множитель $(x^2+6x+10)$ с отрицательным дискриминантом (с двумя комплексно-сопряженными корнями), разлагаем на простейшие дроби

$$\frac{x^2-2x+3}{(x+1)(x^2+6x+10)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+6x+10} = \frac{A(x^2+6x+10)+Bx(x+1)+C(x+1)}{(x+1)(x^2+6x+10)}.$$

Приравняем числители:

$$A(x^2+6x+10) + B(x^2+x) + C(x+1) = x^2 - 2x + 3.$$

Из тождественности следует равенство коэффициентов при одинаковых степенях x слева и справа:

$$\begin{array}{l|l|l} x^2 & A+B=1 & \\ x^1 & 6A+B+C=-2 & B=1-A,\ C=3-A,\ A+1-A+3-A=-2,\ . \\ x^0 & 10A+C=3 & \end{array}$$

$$A = \frac{6}{5},\ B = -\frac{1}{5},\ C = -9.$$

Подставим найденные коэффициенты в разложение рациональной функции $\dfrac{1}{(x+1)(x^2+6x+10)} = \dfrac{\frac{6}{5}}{x+1} + \dfrac{-\frac{x}{5} - 9}{x^2+6x+10}$.

Окончательно получим:

$$\int\frac{x^2-2x+3}{(x+1)(x^2+6x+10)}dx=\frac{6}{5}\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{-\frac{x}{5}-9}{x^2+6x+10}dx=\frac{6}{5}\ln|x+1|+\int\frac{(-\frac{x}{5}-9)dx}{x^2+6x+9+1}=$$

$$=\frac{6}{5}\ln|x+1|+\int\frac{\left(-\frac{1}{5}(x+3)+\frac{3}{5}-9\right)dx}{(x+3)^2+1}=\frac{6}{5}\ln|x+1|+\int\frac{\left(-\frac{x+3}{5}\right)dx}{(x+3)^2+1}+$$

$$\int\frac{\left(-\frac{42}{5}\right)dx}{(x+3)^2+1}=\frac{6}{5}\ln|x+1|-\frac{1}{10}\int\frac{d\left((x+3)^2+1\right)}{(x+3)^2+1}-\frac{42}{5}\cdot arctg(x+3)=$$

$$\frac{6}{5}\ln|x+1|-\frac{1}{10}\ln\left(x^2+3x+10\right)-\frac{42}{5}arctg(x+3)+C\ .$$

Задачи для самостоятельного решения. Найти неопределенный интеграл

а) $\int\frac{x+2}{(x+2)x^3}dx.$, б) $\int\frac{x-1}{(x^2-x+1)(x^2+1)}dx..$

Пример 7. Найти неопределенный интеграл

$$\int\frac{dx}{\sin^2 3x+4\sin 3x\cos 3x-5\cos^2 3x}.$$

Решение. $\int\frac{1}{\sin^2 3x+4\sin 3x\cos 3x-5\cos^2 3x}dx=\left|\begin{matrix} tg3x=t \\ 3dx=\frac{dt}{1+t^2}\end{matrix}\right|=$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{\frac{dt}{t^2+1}}{\frac{t^2}{t^2+1}+\frac{4t}{t^2+1}-\frac{5}{t^2+1}}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^2+4t-5}=\frac{1}{3}\int\frac{d(t+2)}{(t+2)^2-9}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\ln\left|\frac{(t+2)-3}{(t+2)+3}\right|+C=\frac{1}{18}\ln\left|\frac{tg3x-1}{tg3x+5}\right|+C.$$

Задачи для самостоятельного решения. Найти неопределенный интеграл а) $\int \frac{\cos^3 x dx}{5+4\sin x}$, б) $\int \frac{dx}{\sin^2 x - \sin x \cos x - 2\cos^2 x}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 2

Пример 1. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_e^{4e} \frac{\ln x\, dx}{x}$.

Решение. Воспользуемся методом введения новой функции под знак дифференциала. В данном случае $\ln x$ выступает в качестве новой переменной интегрирования, по которой легко указать первообразную $\int\limits_e^{4e} \frac{\ln x\, dx}{x} = \int\limits_e^{4e} \ln x\, d(\ln x) = \left.\frac{(\ln x)^2}{2}\right|_e^{4e} = \frac{1}{2}\left((\ln 4e)^2 - (\ln e)^2\right) =$

$$= \frac{1}{2}\left((\ln 4 + 1)^2 - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\ln^2 4 + 2\ln 4\right).$$

Пример 2. Вычислить определённый интеграл $\int\limits_0^2 \frac{arctg^3\left(\frac{x}{2}\right)}{4+x^2} dx$.

Решение. Выполним замену переменной в определенном интеграле:

$$\int\limits_0^2 \frac{arctg^3\left(\frac{x}{2}\right)}{4+x^2} dx = \left| \begin{array}{l} t = arctg\left(\frac{x}{2}\right) \\ dt = \frac{2dx}{x^2+4}, \\ x_1 = 0,\ t_1 = 0, \\ x_2 = 2,\ t_2 = \frac{\pi}{4}. \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} t^3 dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/4} = \frac{\pi^4}{2048}.$$

Пример 3. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^1 x\, arctgx\, dx.$

Решение. Выполним интегрирование по частям в определенном интеграле:

$$\int_0^1 x\,arctgx\,dx = \left| \begin{matrix} u = arctgx, & du = \dfrac{dx}{x^2+1} \\ dv = xdx, & v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \left(\frac{x^2 arctgx}{2}\right)\Bigg|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}dx =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}x\Big|_0^1 + \frac{1}{2}arctgx\Big|_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

Задачи для самостоятельного решения. Вычислить определенный интеграл

а) $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}dx.$, б) $\int_0^1 (x-2)e^{3x}dx..$

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = \frac{x}{x^2+1}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$.

Решение:

$$S = \int_1^3 \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_1^3 = \frac{1}{2}\left(\ln 10 - \ln 2\right) = \frac{1}{2}\ln 5.$$

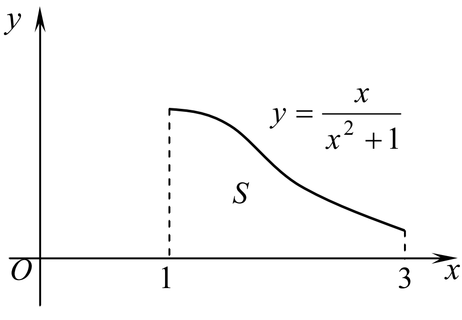

Рис. 3

Пример 5. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $x = 1$, $y = 0$.

Решение:

Объём тела вращения равен

$$V = \pi \int_0^1 x^6 dx = \frac{\pi}{7}\left(x^7\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{7}.$$

Задачи для самостоятельного решения. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4x - x^2$, $y = 0$, а также объем тела вращения данной фигуры вокруг оси Ox.

Пример 6. Найти частные производные первого порядка функции $z = tg\left(x^2 - xy + 5y^2\right)$.

Решение. Рассматривая y как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\cos^2(x^2 - xy + 5y^2)}\left((x^2 - xy + 5y^2)'_x\right) = \frac{(2x - y)}{\cos^2(x^2 - xy + 5y^2)}.$$

Аналогично, рассматривая x как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\cos^2(x^2 - xy + 5y^2)}\left((x^2 - xy + 5y^2)'_y\right) = \frac{(-x + 10y)}{\cos^2(x^2 - xy + 5y^2)}.$$

Пример 7. Найти частные производные первого порядка функции $z = e^{\frac{x}{y+1}}$

Решение. Рассматривая y как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{\frac{x}{y+1}}\left(\frac{(x)'_x(y+1) - x(y+1)'_x}{(y+1)^2}\right) = e^{\frac{x}{y+1}}\left(\frac{(y+1) - x \cdot 0}{(y+1)^2}\right) = \frac{e^{\frac{x}{y+1}}}{y+1}.$$

Аналогично, рассматривая x как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{\frac{x}{y+1}}\left(\frac{(x)'_y(y+1)-x(y+1)'_y}{(y+1)^2}\right)=e^{\frac{x}{y+1}}\left(\frac{(y+1)\cdot 0-x\cdot 1}{(y+1)^2}\right)=\frac{-x\cdot e^{\frac{x}{y+1}}}{(y+1)^2}.$$

Пример 8. Найти частные производные второго порядка функции $z=e^{\frac{x}{y+1}}$.

Решение.

Воспользуемся результатами предыдущей задачи:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{\frac{x}{y+1}}\left(\frac{1}{(y+1)}\right),\ \frac{\partial z}{\partial y}=e^{\frac{x}{y+1}}\left(\frac{-x}{(y+1)^2}\right).$$

Взяв от полученных производных частные производные, имеем

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{\frac{x}{y+1}}}{y+1}\right)=\frac{\frac{e^{\frac{x}{y+1}}}{y+1}\cdot(y+1)-e^{\frac{x}{y+1}}(y+1)'_x}{(y+1)^2}=\frac{e^{\frac{x}{y+1}}-e^{\frac{x}{y+1}}\cdot 0}{(y+1)^2}=$$

$$=\frac{e^{\frac{x}{y+1}}}{(y+1)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-x\cdot e^{\frac{x}{y+1}}}{(y+1)^2}\right)=(-x)\cdot\frac{\frac{(-x)e^{\frac{x}{y+1}}}{(y+1)^2}\cdot(y+1)^2-e^{\frac{x}{y+1}}((y+1)^2)'_y}{(y+1)^4}=$$

$$\frac{(-x)^2 e^{\frac{x}{y+1}}+e^{\frac{x}{y+1}}\cdot 2x(y+1)}{(y+1)^4},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e^{\frac{x}{y+1}}}{y+1}\right)=\frac{\frac{-x\cdot e^{\frac{x}{y+1}}}{(y+1)^2}\cdot(y+1)-e^{\frac{x}{y+1}}(y+1)'_y}{(y+1)^2}=$$

$$\frac{-xe^{\frac{x}{y+1}}-e^{\frac{x}{y+1}}\cdot(y+1)}{(y+1)^3}.$$

Задачи для самостоятельного решения. Найти частные производные первого порядка функции

а) $z=\dfrac{x^2y^2}{1-x-y}$, б) $z=\sin(x^2-2xy^3)$.

Пример 9. Даны: функция $z=2xy+3y^2$, точка A(1,–2) и вектор $\vec{l}=\{9,-12\}$. Найти: 1) градиент функции $z=6xy+8y^2$ в точке A(1,–2), 2) производную в точке A по направлению вектора $\vec{l}=\{9,-12\}$.

Решение. Вычислим частные производные функции в точке A(1,–2):

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)=2y,\ \frac{\partial z}{\partial x}(1,-2)=-4,\ \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=2x+6y,\ \frac{\partial z}{\partial y}(1,-2)=2-12=-10.$$

Градиент функции z имеет вид

$$\overrightarrow{grad\,z}=\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}=(2y)\vec{i}+(2x+6y)\vec{j},$$

$$\overrightarrow{grad\ z(A)}=(-4)\vec{i}+(2+6\cdot(-2))\vec{j}=-4\vec{i}-10\vec{j}.$$

Найдем косинусы направляющих углов, перейдя от вектора $\vec{l}=\{9,-12\}$ к соответствующему орту

$$\frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}=\{\cos\alpha,\cos\beta\}=\left\{\frac{9}{\sqrt{9^2+(-12)^2}},\frac{-12}{\sqrt{9^2+12^2}}\right\}=\left\{\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right\}.$$

Производная по направлению вектора $\vec{l}$ в точке M равна

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta=-4\cdot\frac{3}{5}-10\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{52}{5}.$$

Задача для самостоятельного решения.. Дана функция $z=x^2-y^2+2xy-4x$, точка $A(1,2)$ и вектор $\vec{l}=\{1,3\}=\vec{i}+3\vec{j}$. Требуется найти: 1) направление градиент функции z в точке A; 2) производную в точке A по направлению вектора $\bar{l}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 3

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию $z=8x^3+y^3-4xy$.

Решение. Вычислим частные производные функции $\frac{\partial z}{\partial x}=24x^2-4y$, $\frac{\partial z}{\partial y}=3y^2-4x$. Найдем точки возможного экстремума из решения системы

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=0.\end{cases}\quad \begin{cases}24x^2-4y=0,\\ 3y^2-4x=0.\end{cases}$$

Это точки $M_1(0{,}0)$ и $M_2(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$.

Находим частные производные второго порядка исследуемой функции: $A=f_{xx}''=48x$, $C=f_{yy}''=6y$, $B=f_{xy}''=-4$. В точке $M_1(0{,}0)$ имеем $\Delta=AC-B^2=-16<0$, то есть, в данной точке экстремума нет. В точке $M_2(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ имеем $\Delta=AC-B^2=64-16>0$. Поскольку $A=16>0$, то в точке имеется минимум.

Задача для самостоятельного решения. Найти экстремум функции $z=4x^2+9y^2-4x-6y+3$.

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными $(1+x^2)dy+ydx=0$.

Решение. Преобразуем уравнение к виду (уравнению с разделёнными переменными) $\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{1+x^2}$. Интегрируя, получаем $\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x^2+1}$ или $\ln|y|=-arctgx+C$. Общее решение можно записать в виде $y=e^{C-arctgx}$.

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y'=tgx\cdot tgy$.

Решение. Разделяя переменные, приходим к уравнению $ctgy\ dy=tgx\ dx$.

Интегрируем:

$$\int ctgy\,dy=\int tgx\,dx,\ \ln|\sin y|=-\ln|\cos x|+\ln C.$$

Постоянная интегрирования выбрана в виде $\ln C$ для упрощения представления ответа. Далее находим общий интеграл

$$\sin y=\frac{C}{\cos x}\ \text{или}\ \sin y\cdot\cos x=C.$$

Задача для самостоятельного решения. Найти общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными $x^2y'=y^2+4$.

Пример 4. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $xy'=x+2y$.

Решение. Чтобы привести однородное дифференциальное уравнение к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными, проводят замену $y=x\cdot v(x)$, где $v(x)$ – новая неизвестная функция.

Преобразуя исходное уравнение к виду, разрешенному относительно производной y'. Получим $y'=1+2\frac{y}{x}$. Полагаем $y=x\cdot v$, тогда $y'=x\cdot v'+v$. Уравнение запишется в виде

$$x\cdot v'+v=1+2v\ \text{или}\ x\cdot v'=1+v.$$

Решаем полученное уравнение с разделяющимися переменными

$$x\frac{dv}{dx}=1+v \quad \text{или} \quad \frac{dv}{1+v}=\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя $\int\frac{dv}{1+v}=\int\frac{dx}{x}$, получим ln $\ln|1+v|=\ln|x|+\ln C$, $1+v=xC$ или $v=xC-1$.

Возвращаясь к старой переменной y по формуле $y=x\cdot v(x)$, получим общее решение $y=Cx^2-x$.

Задачи для самостоятельного решения. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения

а) $y'=\dfrac{3xy}{x^2+y^2}$, б) $y'=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$.

Пример 5. Найти частное решение линейного дифференциального уравнения первого порядка $y'-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^3$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=1$.

Решение. Ищем решение $y(x)$ в виде $y(x)=u(x)\cdot v(x)$. Поскольку $y'=u'v+uv'$, то уравнение принимает вид

$$u'v+v'u-\frac{2uv}{x+1}=(x+1)^3 \quad \text{или} \quad u'v+u(v'-\frac{2v}{x+1})=(x+1)^3.$$

Для нахождения частного решения $v(x)$ решаем уравнение

$$v'-\frac{2v}{x+1}=0.$$

Разделяя переменные в этом уравнении, находим

$$\frac{dv}{dx}=\frac{2v}{x+1} \quad \text{или} \quad \frac{dv}{v}=\frac{2dx}{x+1}.$$

После интегрирования обеих частей равенства, получим $\ln|v|=2\ln|x+1|+C$, так как достаточно найти хотя бы одно отличное от нуля решение, то положим $C=0$ и опустим модули. Тогда $v(x)=(x+1)^2$. Подставляя найденное значение $v(x)$ в исходное уравнение и учитывая, что $v' - \frac{2v}{x+1} = 0$, запишем $u'(x+1)^2 = (x+1)^3$ или $\frac{du}{dx} = x+1$, откуда после интегрирования получим $u(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 + C$. Общее решение запишется $y = uv = \frac{1}{2}(x+1)^4 + C(x+1)^2$. Найдем частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$. Имеем $y(0) = \frac{1}{2} + C = 1$, откуда $C = \frac{1}{2}$. Тогда частное решение (решение задачи Коши) запишется в виде $y = \frac{(x+1)^4 + (x+1)^2}{2}$.

Задача для самостоятельного решения. Найти частное решение линейного дифференциального уравнения первого порядка $y' + \frac{y}{x} = -x$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 1$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 4

Пример 1. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка со специальной правой частью $y'' - 7y' + 6y = (x-2)e^x$.

Решение. Общее решение будет иметь вид $y = y_{oo} + y_{чн}$. Для нахождения общего решения y_{oo} соответствующего однородного уравнения $y'' - 7y' + 6y = 0$ составляется характеристическое уравнение

$$k^2 - 7k + 6 = 0$$

и находятся его корни: $k_1 = 1$, $k_2 = 6$.

Тогда общее решение линейного однородного дифференциального уравнения приобретает вид

$$y_{oo} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} = C_1 e^{x} + C_2 e^{6x}.$$

Для нахождения частного решения неоднородного уравнения $y_{чн}$ рассмотрим правую часть $(x-2)e^x$. Правая часть данного неоднородного уравнения имеет вид $P_1(x)e^x$ и характеризуется параметром правой части $\alpha \pm i\beta = 1 \pm 0i$. Так как параметр правой части $\alpha \pm i\beta = 1 \pm 0i = 1$ совпадает с простым корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения будем искать в форме $y_{чн} = xe^x(Ax + B)$. Подставляя это выражение в заданное уравнение, будем иметь

$$[(Ax^2 + Bx) + (4Ax + 2B) + 2A - 7(Ax^2 + Bx) - 7(2Ax + B) + 6(Ax^2 + Bx)]e^x =$$
$$= (x-2)e^x$$

или

$$(-10Ax - 5B + 2A)e^x = (x-2)e^x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях xe^x, e^x, получим

$$\begin{cases} -10A = 1, \\ 2A - 5B = -2, \end{cases}$$

откуда $A = -\dfrac{1}{10}$, $B = \dfrac{9}{25}$. Следовательно, частное решение будет иметь вид $y_{чн} = xe^x\left(-\dfrac{1}{10}x + \dfrac{9}{25}\right)$.

Общее решение: $y = C_1 e^{6x} + C_2 e^x + e^x\left(-\dfrac{1}{10}x^2 + \dfrac{9}{25}x\right)$.

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 4y' + 5y = \cos 2x$.

Решение.

Запишем соответствующее характеристическое уравнение: $k^2 + 4k + 5 = 0$, $k_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2}$, $k_{1,2} = -2 \pm \sqrt{-1} = -2 \pm i$. При наличии комплексных корней характеристического уравнения общее решение однородного уравнения имеет вид: $y_{oo} = e^{-2x}\left(C_1 \sin x + C_2 \cos x\right)$.

Правая часть неоднородного уравнения $\cos 2x$ имеет вид $P_0(x)\sin 2x + Q_0(x)\cos 2x$, где $P_0(x) = 0$ и $Q_0(x) = 1$ – многочлены нулевой степени. Правая часть неоднородного уравнения описывается параметром $\alpha + i\beta = 0 + 2 \cdot i$, не совпадающим с корнями характеристического уравнения. Частное решение $y_{чн}$ ищется в виде, подобном правой части (без домножения на x^l и с коэффициентами, подлежащими определению):

$$y_{чн} = A\sin 2x + B\cos 2x .$$

Коэффициенты A и B находятся из результата подстановки $y_{чн}$ в исходное уравнение

$$\left(A\sin 2x + B\cos 2x\right)'' + 4\left(A\sin 2x + B\cos 2x\right)' + 5\left(A\sin 2x + B\cos 2x\right) = \cos 2x ,$$

$$-4A\sin 2x - 4B\cos 2x + 4\left(2A\cos 2x - 2B\sin 2x\right) + 5\left(A\sin 2x + B\cos 2x\right) = \cos 2x$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых функциях $\sin 2x$ и $\cos 2x$ слева и справа для вычисления A и B.

$$\begin{cases} -4A - 8B + 5A = 0 \\ -4B + 8A + 5B = 1 \end{cases} \begin{cases} A - 8B = 0 \\ B + 8A = 1 \end{cases} \quad A = 8B ,\ B + 64B = 1 ,\ B = \frac{1}{65} ,\ A = \frac{8}{65} .$$

Частное решение неоднородного уравнения равно $y_{чн} = \dfrac{8}{65}\sin 2x + \dfrac{1}{65}\cos 2x$, а общее решение равно $y = e^{-2x}\left(C_1 \sin x + C_2 \cos x\right) + \dfrac{8}{65}\sin 2x + \dfrac{1}{65}\cos 2x$.

Задача для самостоятельного решения. Найти общее решение неоднородного дифференциального уравнения $y'' - 5y' + 6y = x^2 e^{4x}$ со специальной правой частью.

Пример 3. Найти частное решение линейного неоднородного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения $y''+y'-2y=0$. Составим характеристическое уравнение и найдем его корни $k^2+k-2=0,\ k_1=1,\quad k_2=-2.$ Тогда общее решение соответствующего однородного уравнения: $y_{oo}=C_1e^x+C_2e^{-2x}$.

Правая часть данного неоднородного уравнения $\cos x+3\sin x$ имеет вид $e^{ox}(P\cos x+Q\sin x)$. Так как параметр правой части $\alpha\pm i\beta=0\pm 1i$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение будем искать в форме $y_{чн}=(A\cos x+B\sin x)$. Подставляя это выражение вместе с производными $y'=(-A\sin x+B\cos x)$, $y''=(-A\cos x-B\sin x)$ в заданное уравнение, будем иметь

$$(B-3A)\cos x+(-A-3B)\sin x=\cos x-3\sin x.$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$, получим $\begin{cases}B-3A=1,\\3B+A=3,\end{cases}$, откуда $A=0,\ \ B=1$. Следовательно, частное решение будет иметь вид $y_{чн}=\sin x$.

Общее решение: $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+\sin x$.

Найдем C_1, C_2, используя начальные условия,

$$\begin{cases}C_1e^0+C_2e^0+\sin 0=1;\\C_1e^0-2C_2e^0+\cos 0=2,\end{cases}\quad \text{или}\quad \begin{cases}C_1+C_2=1;\\C_1-2C_2+1=2.\end{cases}$$

Отсюда C_1=1, C_2=0. В итоге получаем решение задачи Коши $y=e^x+\sin x$.

Пример 4. Найти частное решение линейного неоднородного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $\begin{cases}y''+y'=e^x,\\y(0)=0,\\y'(0)=1\end{cases}$

Решение. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения $y''+y'=0$. Составим характеристическое уравнение и найдем его корни $k^2+k=0,\ k(k+1)=0,\ k_1=0,\ k_2=-1$. Тогда общее решение соответствующего однородного уравнения: $y_{oo}=C_1+C_2e^{-x}$.

Правая часть данного неоднородного уравнения e^x имеет вид $e^x(1\cdot\cos(0x)+0\cdot\sin(0x))$. Так как параметр правой части $\alpha\pm i\beta=1\pm 0i=1$ не совпадает с корнями характеристического уравнения, то частное решение будем искать в форме $y_{чн}=Ae^x$. Подставляя это выражение вместе с производными $y'=Ae^x$, $y''=Ae^x$ в заданное уравнение, будем иметь $Ae^x+Ae^x=e^x$.

Приравнивая коэффициенты при e^x, получим $2A=1$, $A=\dfrac{1}{2}$.

Следовательно, частное решение будет иметь вид $y_{чн}=\dfrac{e^x}{2}$.

Общее решение: $y=C_1+C_2e^{-x}+\dfrac{e^x}{2}$.

Найдем C_1, C_2, используя начальные условия,

$$\begin{cases} C_1+C_2+\dfrac{1}{2}=0; \\ -C_2+\dfrac{1}{2}=1. \end{cases}$$

Отсюда $C_1=0$, $C_2=-\dfrac{1}{2}$. В итоге получаем решение задачи Коши $y=-\dfrac{e^{-x}}{2}+\dfrac{e^x}{2}$.

Задача для самостоятельного решения. Найти частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка $y''-4y=(3x-1)e^{-x}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=0$, $y'(0)=-4$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. - М.: Высш. шк., 1999. Ч. 1. 415 с.

2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления / Н.С. Пискунов. - М.: Наука, 1977. Т. 1,2.

ОГЛАВЛЕНИЕ

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим работам
для студентов направления подготовки
15.03.01 «Машиностроение»
(профиль «Технологии, оборудование и автоматизация
машиностроительных производств»)
заочной формы обучения

Составители:
Горбунов Валерий Викторович
Соколова Ольга Анатольевна

В авторской редакции

Подписано к изданию 12.11.2021.
Уч.-изд. л. 2,5.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14