МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Воронежский государственный технический университет»

Строительно-политехнический колледж

РЕШЕНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению самостоятельных работ
по математике для студентов 1-го курса

Воронеж 2020

УДК 51(075.7)
ББК 22.1я7

Составители: *З. И. Шахбазова, С. Л. Рыбина, Н. В. Федотова, И. И. Корчагин*

Решение логарифмических уравнений: методические указания к выполнению самостоятельных работ по математике для студентов 1 курса/ ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»; сост.: З. И. Шахбазова, С. Л. Рыбина, Н. В. Федотова, И. И. Корчагин. Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2020. 17 с.

Даны теоретические сведения по решению логарифмических уравнений, приведены примеры решения уравнений, даны задания для самостоятельной работы. Могут использоваться для подготовки индивидуальных проектов и для подготовки к сдаче ЕГЭ.

Предназначены для самостоятельной работы по дисциплине «Математика» для студентов 1 курса.

Методические указания подготовлены в электронном виде и содержатся в файле МУ ЛРУ pdf.

УДК 51(075.7)
ББК 22.1я7

Рецензент *– М. Ю. Глазкова, канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры технологии строительных материалов, изделий и конструкций ВГТУ*

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

ВВЕДЕНИЕ

Данные методические указания предназначены для студентов 1 курса Строительно-политехнического колледжа (далее - СПК) всех специальностей в освоении методов решения логарифмических уравнений.

Сообщаются основные определения, формулы, методы решения логарифмических уравнений. Приводятся примеры решения логарифмических уравнений.

Методические указания содержат задания для самостоятельного решения.

Общие положения

Самостоятельная работа студентов – это работа, которая выполняется ими по заданию преподавателя, без его непосредственного участия (но под его руководством) в специально представленное для этого время.

Цели и задачи самостоятельной работы:

- систематизации и закрепления полученных знаний и практических умений и навыков студентов;
- углубления и расширения теоретических и практических знаний;
- формирования умений использовать специальную, справочную литературу, Интернет;
- развития познавательных способностей и активности студентов, творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развития исследовательских знаний.
- обеспечение базы знаний для профессиональной подготовки выпускника в соответствии с ФГОС СПО;
- формирование и развитие общих компетенций, определённых в ФГОС СПО;
- подготовка к формированию и развитию профессиональных компетенций, соответствующих основным видам профессиональной деятельности.
- систематизация, закрепление, углубление и расширение полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления: способности к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- овладение практическими навыками применения информационно-коммуникационных технологий в профессиональной деятельности;
- развитие исследовательских умений.

Критериями оценки результатов внеаудиторной самостоятельной работы студента являются:

- уровень освоения студентом учебного материала;
- умение студента использовать теоретические знания при решении уравнений;
- обоснованность и четкость изложения ответа;
- оформление материала в соответствии с требованиями ФГОС СПО.

1. Общие сведения о логарифмических уравнениях

Логарифмическими уравнениями называются уравнения, содержащие неизвестное только под знаком логарифма или в основании логарифма.

Например: $log_2x = 3;\ log_2^2x - 5log_2x + 6 = 0;\ log_{x-3}4 = 2$

Уравнения вида $log_ax = b\ (1)\ и\ log_xm = n\ (2)$,
где x– неизвестное, а a, b, m, n – заданные числа, являются простейшими логарифмическими уравнениями.

Если $x > 0, a > 0\ и\ a \neq 1,$ то уравнение (1) при любом действительном значении x имеет единственное решение $x = a^6$.

Если $m > 0, x > 0\ и\ x \neq 1,$ то уравнение (2) имеет единственное решение $x = \sqrt[n]{m}$.
Логарифмические уравнения, как и показательные, рассматриваются только на множестве действительных чисел.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ, применяемые при решении логарифмических уравнений.
$(a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ c \neq 1)$

1. $log_cab = log_ca + log_cb$
2. $log_c\frac{a}{b} = log_ca - log_cb$
3. $log_ca^n = nlog_c$
4. $log_c\sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}log_ca$
5. $a^{log_aN} = N$ – основное логарифмическое тождество.
6. $log_ba = \frac{log_ca}{log_cb}$ – формула перехода от одного основания логарифмов к другому.
7. $log_ba = \frac{1}{log_ab}$
8. $log_{b^n}a = \frac{1}{nlog_ab}$
9. $log_ba = log_{b^n}a^n = log_{\sqrt[n]{b}}\sqrt[n]{a}$

Преобразования, которые применяются при решении логарифмических и показательных уравнений.

1. <u>Потенцирование</u>.
$log_{\varphi(x)}f(x) = log_{\varphi(x)}q(x)(1)$ Могут появиться посторонние корни!
$f(x) = q(x)(2)$ Необходима проверка!

2. Логарифмирование.

$f(x) = q(x)(1)$ Могут быть потеряны корни!

$$log_a f(x) = log_a q(x)(2)$$

Но если $a > 0, a \neq 1, f(x) > 0, q(x) > 0,$ то (2) равносильно (1). В этом случае логарифмирование допустимо.

3. Применение свойств логарифмов.

Возможно появление посторонних корней. Необходима проверка!

2. Уравнения, решаемые по определению логарифма

Решение сложных логарифмических уравнений сводится в большинстве случаев к решению простейших логарифмических уравнений.

Уравнение $log_a f(x) = b, f(x) > 0$ равносильно уравнению $f(x) = a^b$ (1)

Уравнение $log_x f(a) = b, f(a) > 0, x > 0, x \neq 1$ равносильно уравнению $f(a) = x^b, x = \sqrt[b]{f(a)}$ (2)

Рассмотрим решение простейших логарифмических уравнений.

1. РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ: $log_3(1 - 2x) = 1$

Область определения уравнения: $1 - 2x > 0;\ -2x > -1;\ x < \frac{1}{2}$

На основании определения логарифма можно записать

$1 - 2x = 3$

$-2x = 2$

$$x = -1 \quad -1 < \frac{1}{2}$$

Проверка: $log_3\big(1 - 2 \cdot (-1)\big) = log_3 3 = 1; 1 = 1.$

Ответ: -1.

2. РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ: $log_x \sqrt[5]{36^{-1}} = -0{,}4$

Область определения уравнения: $x > 0;\ x \neq 1$

На основании определения логарифма можно записать

$x^{-0,4} = 36^{-\frac{1}{5}}$

$x^{-0,4} = 6^{-\frac{2}{5}} = 6^{-0,4}$

$x = 6$

В этом и последующих примерах проверку делайте самостоятельно!

Ответ: 6.

3. ВЫЧИСЛИТЬx: $log_{0,32} \frac{2\sqrt{2}}{5} = x$

Данное уравнение равносильно уравнению:

$(0{,}32)^x = \dfrac{2\sqrt{2}}{5}$

Преобразуем это уравнение:

$\left(\dfrac{8}{25}\right)^x = \dfrac{2\sqrt{2}}{5}$

$$\left(\frac{\sqrt{8}}{5}\right)^{2x} = \frac{\sqrt{8}}{5}$$
$2x = 1$
$x = \dfrac{1}{2}$
Ответ: $\frac{1}{2}$.

4. РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ: $\lg\left(81 \cdot \sqrt[3]{3^{x^2-8x}}\right) = 0, x\epsilon R$

Данное уравнение равносильно уравнению:
$81 \cdot \sqrt[3]{3^{x^2-8x}} = 10^0 = 1$
$3^4 \cdot 3^{\frac{x^2-8x}{3}} = 3^0$
$3^{4+\frac{x^2-8x}{3}} = 3^0$
$4 + \dfrac{x^2-8x}{3} = 0$
$x^2 - 8x + 12 = 0; x_1 = 2, x_2 = 6$
Проверка:
1) $\lg\left(81 \cdot \sqrt[3]{3^{2^2-8\cdot 2}}\right) = \lg\left(81 \cdot 3^{-\frac{12}{3}}\right) = \lg(3^4 \cdot 3^{-4}) = lg1 = 0$
2) $\lg\left(81 \cdot \sqrt[3]{3^{6^2-8\cdot 6}}\right) = \lg\left(81 \cdot 3^{-\frac{12}{3}}\right) = \lg(3^4 \cdot 3^{-4}) = lg1 = 0$
Ответ: 2;6.

5. РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ: $log_2(3log_3(log_2x)) = 0$

Область определения уравнения: $3log_3(log_2x) > 0,$
$log_3(log_2x) > 0,\ log_2x > 1, x > 2$
Из определения логарифма следует:
$3log_3(log_2x) = 2^0 = 1$
$log_3(log_2x) = \dfrac{1}{3}$
Решив уравнение, получим:
$log_2x = 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}; x = 2^{\sqrt[3]{3}}$
Так как $\sqrt[3]{3} > 1, 2^{\sqrt[3]{3}} > 2$, а, следовательно, полученный корень принадлежит области определения уравнения.
Ответ: $2^{\sqrt[3]{3}}$.

6. РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ: $log_{x-1}(3x-1) = 3$.

Область определения уравнения:
$\begin{cases} x-1 > 0 \\ x-1 \neq 1 \\ 3x-1 > 0 \end{cases} \begin{cases} x > 1 \\ x \neq 2 \\ x > \frac{1}{3} \end{cases}$ $x > 1, x \neq 2$; (1, 2)∪(2, +∞)
Из определения логарифма следует:
$$3x - 1 = (x-1)^3$$
Решаем это уравнение:

$3x - 1 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
$x^3 - 3x^2 = 0$
$x^2(x-3) = 0;\ x_{1,2} = 0, x_3 = 3$
$x_{1,2} = 0$ не входят в область определения уравнения, их надо отбросить.
Убедитесь, что $x = 3$ является корнем уравнения.
Ответ: 3.

Задания для самостоятельного решения.

Решить уравнения

1. $log_2(9 - 2^x) = 3 - x$ 3;0
2. $\lg(10^x + 10^{2x} - 10^{1-2x} + 9) = x$ 0
3. $log_5 log_3(x^2 - 9x + 23) = 0$4;5
4. $lg\sqrt{75 + 5^{\sqrt[3]{x-1}}} = 1$
5. $log_x(2x^{x-2} - 1) = 2x - 4$
6. $log_x\left(8 \cdot \sqrt[5]{0{,}25}\right) = \frac{13}{5}$
7. $log_\pi log_3 log_2 log_2 x = 0$
8. $2log^2_{log_2 x} = 1$
9. $\lg(36 + 2^{2(x-1)})^{\frac{3}{2}} = 3$
10. $log_5 log_{10}\sqrt{x^2 + 19} = 0$
11. $log_7 log_4 log_3^2(x - 7) = 0$

3. Уравнения, решаемые потенцированием

Логарифмические уравнения $log_a f_1(x) = log_a f_2(x)$ (1), где $a > 0, a \neq 1$, после потенцирования приводятся к виду $f_1(x) = f_2(x)$. Потенцирование может привести к появлению посторонних корней. Источник появления посторонних корней – применение формулы логарифма произведения.

В этом случае проверка обязательна, она является составной частью решения.

1. РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ: $log_2(3 - x) + log_2(1 - x) = 3$

Область определения уравнения:

$$\begin{cases} 3 - x > 0 \\ 1 - x > 0 \end{cases} \begin{cases} x < 3 \\ x < 1 \end{cases} x < 1$$

На основании формулы $log_c ab = log_c a + log_c b$ имеем:
$log_2(3 - x) \cdot (1 - x) = 3$
По определению логарифма буем иметь:
$(3 - x) \cdot (1 - x) = 8$
$x^2 - 4x - 5 = 0$
$x_1 = 5, x_2 = -1$
Первое значение неизвестного не принадлежит области определения, его отбрасываем.
Проверкой убедитесь, что $x = -1$является корнем уравнения.
Ответ: -1.

2. РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ: $2\lg(2x + 3) = 1 + \lg(x + 0{,}9)$

Область определения уравнения:

$$\begin{cases} x > -\frac{3}{2} \; x > \; -0{,}9 \\ x > -0{,}9 \end{cases}$$

Преобразуем уравнение:
$\lg(2x+3)^2 = lg10 + \lg(x+0{,}9)$
$\lg(2x+3)^2 = \lg(10 \cdot (x+0{,}9))$
Пропотенцировав, получим:
$(2x+3)^2 = 10(x+0{,}9)$
$4x^2 + 12x + 9 = 10x + 9$
$4x^2 + 2x = 0$
$2x(2x+1) = 0$
$x_1 = 0, x_2 = -0{,}5$
Оба корня входят в область определения.
Ответ: -0,5;0.

3. РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ:$\lg(2^x + x - 41) = x(1 - lg5)$

Область определения уравнения: $2^x + x - 41 > 0$
Преобразуем правую часть:
$x(1 - lg5) = x(lg10 - lg5) = xlg\frac{10}{5} = xlg2 = lg2^x$
После преобразования получим уравнение:
$\lg(2^x + x - 41) = lg2^x$
Пропотенцировав, будем иметь: $2^x + x - 41 = 2^x$, x = 41
Проверка – непосредственной подстановкой, так как нахождение области определения сложно.
$\lg(2^{41} + 41 - 41) = 41(1 - lg5)$
$lg2^{41} = 41(1 - lg5) = \; 41(lg10 - lg5) = 41lg2 = lg2^{41}; \; 2^{41} = 2^{41}$
Ответ: 41.

4. РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ:$log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + log_2(3^{x-1} + 1)$.

Область определения уравнения: $x \epsilon R$.
Перепишем данное уравнение:
$$log_2(9^{x-1} + 7) = log_2 4 + log_2(3^{x-1} + 1)$$
$log_2(9^{x-1} + 7) = log_2(4 \cdot (3^{x-1} + 1))$
Пропотенцировав, получим:
$3^{2(x-1)} + 7 = 4 \cdot (3^{x-1} + 1)$
$3^{2(x-1)} - 4 \cdot 3^{x-1} + 3 = 0$
Решив полученное показательное уравнение, находим:
1) $3^{x-1} = 1, x_1 = 1$;2) $3^{x-1} = 3, x_2 = 2.$ Ответ: 1;2.
5. РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ: $\frac{\lg(\sqrt{x+1}+1)}{\lg\sqrt[3]{x-40}} = 3.$

Область определения уравнения: (40, +∞); x≠ 41
Освободимся от знаменателя дроби:
$\lg\left(\sqrt{x+1} + 1\right) = 3\lg\sqrt[3]{x-40} = \lg(x - 40)$
Пропотенцировав, получим:
$\sqrt{x+1} + 1 = x - 40$
$\sqrt{x+1} = x - 41$
Пусть $\sqrt{x+1} = y$, тогда $x + 1 = y^2, x = y^2 - 1$.

Уравнение имеет вид: $y^2 - y - 42 = 0$
Решив уравнение, будем иметь: $y_1 = -6;\ y_2 = 7$.
а) $\sqrt{x+1} = -6$ – уравнение не имеет корней.
б) $\sqrt{x+1} = 7, x + 1 = 49, x = 48$.
Проверка подтверждает, что $x = 48$ – корень.
Ответ: 48.

Задания для самостоятельного решения.

Решить уравнения

1. $2\lg x = -\lg(6 - x^2)\sqrt{2} \pm 1$
2. $0{,}5\lg(2\text{x} - 1) + \lg\sqrt{x - 9} = 1$
3. $\frac{\log_3(x-4)-1}{\log_3(x-2)} + 1 = 0$
4. $\lg 9^{-1} + \frac{1}{3}\lg 3^{x(5x-7)} = 0 - 0{,}6; 2$
5. $\lg(5^{2x} + 4\text{x} - 16) = \lg 10^{2x} - \lg 4^x$
6. $5\log_2 3 + 2\log_2 \sqrt{(x-2)\sqrt{8}} - \frac{5}{3}\log_2 27 = 1{,}5$
7. $\lg\sqrt{x-5} + \lg\sqrt{2x-3} + 1 = \lg 30$
8. $\lg\left(\text{x} - \frac{8}{9}\right) = 2\lg\frac{1}{6}\frac{11}{12}$
9. $\lg 10 + \frac{1}{3}\lg\left(271 + 3^{\sqrt{2x}}\right) = 2$ \
10. $\log_2\left(\lg x + 2\sqrt{\lg x} + 1\right) - 2\log_4\left(\sqrt{\lg x} + 1\right) = 1$

4. Уравнения, сводящиеся к алгебраическим уравнениям

В некоторых случаях с помощью подстановки (замены переменной) $y = \log_a x$ или $y = \log_x a$ $[y = \log_a u$ или $y = \log_u a$, *где* $u = u(x)]$ логарифмическое уравнение сводится к алгебраическому.

1. РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ: ${\log_2}^3 x + 3 = 2\log_2 x^2$.

Область определения: $x > 0$
Преобразуем уравнение к виду ${\log_2}^3 x - 4\log_2 x + 3 = 0$
Замена $\log_2 x = y$приводит уравнение к квадратному уравнению.
$y^2 - 4y + 3 = 0, y_1 = 1; y_2 = 3$, т.е. $\log_2 x = 3, x_1 = 8; \log_2 x = 1, x_2 = 2$.
Проверка:
${\log_2}^3 8 + 3 = 2\log_2 8^2, 12 = 12$;
${\log_2}^3 2 + 3 = 2\log_2 2^2$, 4=4.
Ответ: 2; 8.

2. РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ: $\frac{\lg(6-x)}{2} = \frac{1}{3\lg(6-\text{x})-1}$.

Область определения: $x \in (-\infty; 6 - \sqrt[3]{10}) \cup (6 - \sqrt[3]{10}; 6)$
Преобразуем уравнение к виду: $3\lg^2(6 - x) - \lg(6 - x) - 2 = 0$
Введем замену: $\lg(6 - x) = y$, получим $3y^2 - y - 2 = 0$
Решив уравнение, будем иметь: $y_1 = -\frac{2}{3}; y_2 = 1$.

$\lg(6-x)=-\dfrac{2}{3}, 6-x=10^{-\frac{2}{3}}, x_1=6-\sqrt[3]{0{,}01};$
$\lg(6-x)=1, 6-x=10, x_2=-4.$
Оба значения входят в область определения. Проверкой можно убедиться, что оба значения являются корнями данного уравнения.
Ответ: $6-\sqrt[3]{0{,}01}; -4.$

3. РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ: $\frac{1}{5-\lg x}+\frac{2}{1+\lg x}=1.$

Область определения: $\begin{cases} x>0; \\ 5-\lg x\neq 0; \\ 1+\lg x\neq 0. \end{cases} \begin{cases} x>0; \\ \lg x\neq 5; \\ \lg x\neq -1. \end{cases} \begin{cases} x>0; \\ x\neq 10^5; \\ x\neq 0{,}1. \end{cases}$
$x\in(0;0{,}01)\cup(0{,}1;10^5)\cup(10^5;+\infty).$
Введем подстановку $\lg x=y$, тогда относительно y уравнение имеет вид:
$\dfrac{1}{5-y}+\dfrac{2}{1+y}=1$
Решим полученное уравнение:
$1+y+(5-y)2=(5-y)(1+y)$
$y^2-5y+6=0, y_1=2; y_2=3.$
Тогда получим:
$\lg x=2; x_1=100;$
$\lg x=3; x_2=1000.$
Ответ: $100; 1000.$

4. РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ: $\lg 10x\lg 0{,}1x=\lg x^3-3.$

Область определения: $x>0$
Преобразуем уравнение к виду:
$(1+\lg x)(-1+\lg x)=3\lg x-3$
$\lg^2 x-3\lg x+2=0.$
Введем замену: $\lg x=y$и получим:
$y^2-3y+2=0, y_1=1; y_2=2$
$\lg x=1, x_1=10;\ \ \lg x=2, x_2=100.$
Ответ: 10; 100.

Задания для самостоятельного решения и самоконтроля.

Решить уравнения
1. $\log_2{}^2 x-5\log_2 x+6=0$
2. $\lg^2 100x+2\mathrm{lgx}=20$
3. $\lg^2 x-\lg x^2=\lg^2 3-1$
4. $2-\frac{1}{2-\log_2 x}=\frac{3}{4-\log_2 x}$
5. $\sqrt{\lg x}+\sqrt[4]{\lg x}=\frac{3}{4}10^{\frac{1}{16}}$
6. $\lg x^4-\frac{30}{\lg x}=210^{-\frac{5}{2}}; 1000$
7. $3\lg^2(x-1)-10\lg(x-1)+3=01+\sqrt[3]{10}; 1001$
8. $\lg^2 x-\lg x^3+2=0$
9. $\frac{1}{\lg^2 x}+\frac{\lg^2 x}{100}=0{,}29$

5. Уравнения, решаемые посредством логарифмирования

Способ логарифмирования применяется для решения показательно-логарифмических уравнений.

Уравнения, содержащие неизвестное в показателе степени x под знаком логарифма, называется показательно-логарифмическим.

Логарифмируя обе части уравнения, приводят их к логарифмическим.

Замечание. Уравнения $f_1(x) = f_2(x) и\ \log_a f_1(x) = \log_a f_2(x)$ неравносильны, при логарифмировании сужается область определения уравнения (на 2-ое уравнение накладывается ограничительные условия: $f_1(x) > 0\ \ и\ \ f_2(x) > 0$, следовательно, возможна потеря корней).

Если $f_1(x) > 0, f_2(x) > 0, a > 0, a \neq 1$, то оба уравнения равносильны, логарифмирование допустимо.

1. РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ: $5^{3\lg x} = 12{,}5x$.

Область определения: $x > 0$.
Логарифмируем по основанию 10:
$3\lg x \lg 5 = \lg 12{,}5 + \lg x$.
Решим уравнение относительно $\lg x$:
$(3\lg 5 - 1)\lg x = \lg 12{,}5$;
$\lg x = \frac{\lg 12{,}5}{3\lg 5 - 1} = \frac{\lg 12{,}5}{\lg 125 - \lg 10} = \frac{\lg 12{,}5}{\lg 12{,}5} = 1$, тогда $x = 10$.
Ответ: 10.

2. РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ: $x^{\frac{\lg x + 7}{4}} = 10^{\lg x + 1}$.

Область определения: $x > 0$
Прологарифмируем по основанию 10:
$$\frac{\lg x + 7}{4}\lg x = (\lg x + 1)\lg 10$$
$$\lg^2\frac{x}{4} + \frac{7}{4}\lg x = \lg x + 1$$
$$\lg^2 x + 7\lg x - 4\lg x - 4 = 0$$
После упрощения получаем уравнение:
$\lg^2 x + 3\lg x - 4 = 0$.
Решаем его как квадратное уравнение относительно $\lg x$.
$\lg x = -4; \lg x = 1$
$x_1 = 10^{-4} = 0{,}0001; x_2 = 10$.
Ответ: 0,0001; 10.

3. РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ: $x^{\log_2 x^3 - {\log_2}^2 x - 3} = \frac{1}{x}$.

Область определения: $x > 0$
Прологарифмируем по основанию 2 и упростим уравнение:
$$\left(\log_2 x^3 - {\log_2}^2 x - 3\right)\log_2 x = -\log_2 x$$

$3{\log_2}^2 x - {\log_2}^3 x - 3\log_2 x + \log_2 x = 0$
${\log_2}^3 x - 3{\log_2}^2 x + 2\log_2 x = 0$
Вынесем общий множитель за скобки и решим уравнение:
$\log_2 x\left({\log_2}^2 x - 3\log_2 x + 2\right) = 0$
$\log_2 x = 0, x_1 = 1$
$\log_2 x = 1, x_2 = 2$
$\log_2 x = 2, x_3 = 4$
Ответ: 1; 2; 4.

Задания для самостоятельного решения

Решить уравнения

1. $x^{\lg^3 x - 5\lg x} = 0{,}0001$
2. $x^{\log_2 x} = 4x$
3. $x^{\log_2 x + 2} = 8\frac{1}{8}; 2$
4. $x^{2\lg^2 x} = 10x^3\frac{1}{10};\ 10^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}$
5. $x^{\log_3 x - 4} = \frac{1}{27}$
6. $x^{1-\lg x} = 0{,}01$
7. $x^{\frac{1}{4}(\lg x + 7)} = 10^{\lg x + 1}$
8. $x^{\lg^3 x - 5\lg x} = 0{,}0001$
9. $x^{2\lg^3 x - \frac{3}{2}\lg x} =$
10. $x^{\lg x - 3} = 10^{\lg\frac{10}{x} - 1}$

6. Уравнения, в которых используется модуль перехода и различные логарифмические тождества

1. РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ: $\log_x 7 + \log_{x^2} 7 = 6.$

Область определения: $x > 0, x \neq 1$
Перейдем к основанию x, используя формулу $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$,
$$\log_x 7 + \frac{\log_x 7}{\log_x x^2} = 6$$
$$\log_x 7 + \frac{\log_x 7}{2} = 6$$
$3\log_x 7 = 12$, $\log_x 7 = 4, x^4 = 7, x = \sqrt[4]{7}.$ Ответ: $\sqrt[4]{7}$.

2. РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ: $\log_x 10 + 2\log_{10x} 10 + 3\log_{100x} 10 = 0.$

Область определения: $x > 0, x \neq 1, x \neq \frac{1}{10}, x \neq \frac{1}{100}$
Используя тождество $log_{\,b} a = \frac{1}{log_a b}$, получим:
$$\frac{1}{\lg x} + \frac{2}{\lg 10x} + \frac{3}{\lg 100x} = 0$$

$$\frac{1}{\lg x}+\frac{2}{1+\lg x}+\frac{3}{2+\lg x}=0, \qquad 3\lg^2 x+5\lg x+1=0$$

Решив относительно lgx уравнение, получим: $\lg x=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{6}, x=10^{\frac{-5\pm\sqrt{13}}{6}}$.

Ответ: $10^{\frac{-5\pm\sqrt{13}}{6}}$.

3. РЕШИТЬ УРАНВЕНИЕ: $\log_{3x}\frac{3}{x}+\log^2{}_3 x=1$.

Область определения: $x>0, x\neq\frac{1}{3}$

Перейдем к логарифмам по основанию 3:

$$\frac{1-\log_3 x}{1+\log_3 x}+\log^2{}_3 x=1$$

$$(1-\log_3 x)(1-(1+\log_3 x)^2)=0$$

Приравняв каждый множитель к нулю, получим:

$\log_3 x=1, x_1=3$

$\log_3 x=0, x_2=1$

$\log_3 x=-2, x_3=\frac{1}{9}$

Ответ: $\frac{1}{9}$; 1; 3.

4. РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ: $\log_a ax\log_x ax=\log_{a^2}\frac{1}{a}, a>0, a\neq 1$.

Область определения: $x>0, x\neq 1$

$$\log_a ax=1+\log_a x$$

$$\log_x ax=\log_x a+1=\frac{1}{\log_a x}+1=\frac{1+\log_a x}{\log_a x}$$

$$\log_{a^2}\frac{1}{a}=\log_a a^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$$

$$(1+\log_a x)\frac{1+\log_a x}{\log_a x}=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{(1+\log_a x)^2}{\log_a x}=-\frac{1}{2}$$

$$\log^2{}_a x+\frac{5}{2}\log_a x+1=0$$

Решив относительно $\log_a x$ уравнение, получим

$\log_a x=-\frac{1}{2}, x_1=\frac{1}{\sqrt{a}}$

$\log_a x=-2, x_2=\frac{1}{a^2}$. Ответ: $\frac{1}{\sqrt{a}}$; $\frac{1}{a^2}$.

5. РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ: $\log_4(x+12)\log_x 2=1$.

Область определения: $x>0, x\neq 1$

Приведем оба логарифма к основанию 2:

$$\log_4(x+12)=\log_2\sqrt{x+12}=\frac{1}{2}\log_2(x+12)\,;\log_x 2=\frac{1}{\log_2 x}$$

$$\frac{1}{2}\log_2(x+12)\frac{1}{\log_2 x}=1$$

$\frac{1}{2}\log_2(x+12)=\log_2 x$

$\log_2(x+12)=\log_2 x^2$

После потенцирования получим: $x^2-x-12=0$; $x_1=4, x_2=-3$ (не входит в область определения)

Ответ: 4.

6. РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ: $\lg 10^{\lg(x^2+21)}-1=\lg x$.

Область определения: $\begin{cases} x^2+21>0 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow x>0$

Воспользуемся основным логарифмическим тождеством и получим:

$\lg(x^2+21)-\lg 10=\lg x$

Используем свойство: $log_c\frac{a}{b}=log_c a-log_c b$

$\lg\frac{x^2+21}{10}=\lg x, x^2+21=10x;\ x_1=3, x_2=7$

Ответ: 3; 7.

7. РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ: $6^{\log^2{}_6 x}+x^{\log_6 x}=12$

Область определения: $x>0, x\neq 1$

Упростим первое слагаемое в левой части уравнения:

$6^{\log^2{}_6 x}=(6^{\log_6 x})^{\log_6 x}=x^{\log_6 x}$.

Подставим в данное уравнение и упростим: $x^{\log_6 x}=6$

Прологарифмируем по основанию 6: $\log_6 x\log_6 x=1, \log^2{}_6 x=1$.

$\log_6 x=\pm1, x_1=6; x_2=\frac{1}{6}$.

Ответ: $\frac{1}{6}$; 6.

8. РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ: $4^{\log_{64}(x-3)+\log_2 5}=50$.

Область определения: $x>0$.

Используем формулу: $log_b a=log_{b^n}a^n=log_{\sqrt[n]{b}}\sqrt[n]{a}$

$4^{\log_4\sqrt[3]{x-3}+\log_2 5}=50,\quad 4^{\log_4\sqrt[3]{x-3}}4^{\log_2 5}=50.$

Применим основное логарифмическое тождество:

$\sqrt[3]{x-3}\,2^{\log_2 25}=50,\quad 25\sqrt[3]{x-3}=50,\quad \sqrt[3]{x-3}=2,\quad x=11.$

Ответ: 11.

9. РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ: $\log_x 2\log_{\frac{x}{16}}2=\log_{\frac{x}{64}}2$.

Область определения: $x>0, x\neq 1, x\neq 16, x\neq 64$.

Перейдем к основанию 2: $\frac{1}{\log_2 x}\frac{1}{\log_2 x-4}=\frac{1}{\log_2 x-6}$.

$\log^2{}_2 x-5\log_2 x+6=0$.

Введем замену: $\log_2 x=y$, тогда получим уравнение:

$y^2-5y+6=0, y_1=2; y_2=3$.

$\log_2 x=2, x_1=4$;

$\log_2 x=3, x_2=8$.

Ответ: 4; 8.