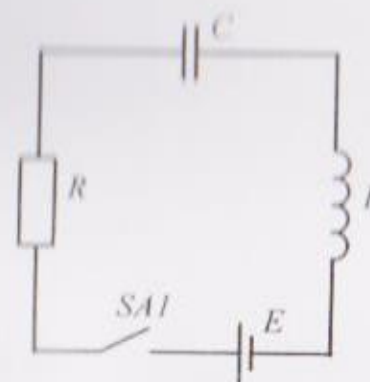


И.Д. Кротова В.В. Посметьев Н.Б. Ускова

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ

Учебное пособие



Воронеж 2011

51 1000000251583

К 804

Кротова, Л.Д.

Математические методы в

ФГБОУВПО "Воронежский государственный
технический университет"

Л.Д. Кротова В.В. Посметьев Н.Б. Ускова

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ

Утверждено Редакционно-издательским советом
университета в качестве учебного пособия

Воронеж 2011

Кротова Л.Д. Математические методы в радиотехнических расчетах: учеб. пособие / Л.Д. Кротова, В.В. Посметьев, Н.Б. Ускова. Воронеж: ФГБОУВПО "Воронежский государственный технический университет", 2011. 83 с.

В предлагаемом учебном пособии рассматриваются вопросы применения операционного исчисления для расчета электрических цепей, а также основные методы современной профессиональной математики. Издание соответствует требованиям Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлению 210200 "Проектирование и технология электронных средств", специальности 210201 "Проектирование и технология радиоэлектронных средств", дисциплине "Математика".

Издание предназначено студентам очной формы обучения специальностей естественно-технического профиля, аспирантам и специалистам, занимающимся инженерными расчетами.

Ил. 14. Библиогр.: 8 назв.

Научный редактор д-р физ.-мат. наук, проф. И.Л. Батаронов
Рецензенты: кафедра математического и прикладного анализа

Воронежского государственного университета (зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. А.И. Шашкин);
д-р техн. наук, проф. О.Ю. Макаров

© Кротова Л.Д., Посметьев В.В.,
Ускова Н.Б., 2011

© Оформление. ФГБОУВПО "Воронежский государственный технический университет", 2011

ВВЕДЕНИЕ

Одной из основных задач современного инженера радиотехнического профиля является моделирование физических процессов, протекающих в конструируемом приборе. Например, часто необходимо рассчитывать напряжения и токи для различных компонентов устройства. Для решения данной задачи можно составить систему дифференциальных уравнений для проектируемой схемы и решить ее. Удобным методом составления и решения системы дифференциальных уравнений является операционный метод. Методы операционного исчисления позволяют с большим успехом рассчитывать процессы в сложных электрических цепях при произвольном внешнем напряжении. Они настолько удобны для приложений, что в настоящее время занимают одно из важных мест в курсах электротехники и автоматического регулирования при расчете электрических цепей. Первый и второй раздел пособия посвящен изложению элементов операционного исчисления и примеров применения его для расчета электрических цепей различных типов.

Оставшиеся разделы пособия посвящены наиболее важным и широко используемым методам профессиональной математики: вычислительному эксперименту, решению уравнений, поиску экстремума функции нескольких уравнений, подбору эмпирических формул.

Материал, представленный в учебном пособии, соответствует рабочей программе направлений 210201 "Проектирование и технология радиоэлектронных средств" и 210302 "Радиотехника" по дисциплине "Математика" ориентирован на этот курс.

1. ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

1.1. Преобразование Лапласа

Комплексные числа находят широкое применение как в математике (при работе с многочленами, решении алгебраических и дифференциальных уравнений, решении геометрических задач на плоскости), так и в других отраслях знаний, в первую очередь в физике, электротехнике и радиотехнике. Читателю известно, как производятся простейшие операции над комплексными числами: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня. Более сложные операции над комплексными числами производятся с помощью функций. Функции комплексного переменного в целом аналогичны функциям действительного переменного как по обозначениям, так и по принципу действия.

Преобразованием Лапласа функции действительного переменного $f(t)$ называется функция комплексного переменного $F(p)$, определяемая формулой

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt. \quad (1.1)$$

Функция $f(t)$ называется оригиналом и должна удовлетворять условиям:

- 1) $f(t)$ – кусочно-непрерывная однозначная функция $\forall t \in (0; \infty)$;
- 2) $f(t) \equiv 0, t < 0$;
- 3) $\forall t > 0 \exists (M > 0, s_0 > 0): |f(t)| < M e^{s_0 t}$.

Эти условия обеспечивают абсолютную сходимость несобственного интеграла (1.1) в полуплоскости $\text{Re } p > s_0$.

Функцию $F(p)$ называют изображением для $f(t)$,

она является аналитической в области $\text{Re } p > s_0$. Соответствие между оригиналом $f(t)$ и его изображением $F(p)$ обозначают символически $f(t) \rightleftharpoons F(p)$ или $F(p) \rightleftharpoons f(t)$. Для нахождения изображений наряду с формулой (1.1) могут быть использованы следующие свойства:

1) Линейность. Если $f_1(t) \rightleftharpoons F_1(p)$, $f_2(t) \rightleftharpoons F_2(p)$, то $c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \rightleftharpoons c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p)$, где c_1, c_2 – любые комплексные постоянные.

2) Теорема подобия. Если $f(t) \rightleftharpoons F(p)$, то

$$f(\omega t) \rightleftharpoons \frac{1}{\omega} F\left(\frac{p}{\omega}\right), \forall \omega > 0.$$

3) Смещение изображения. Если $f(t) \rightleftharpoons F(p)$, то $e^{-\lambda t} f(t) \rightleftharpoons F(p - \lambda)$, где λ – любое комплексное число.

4) Запоздывание оригинала. Если $f(t) \rightleftharpoons F(p)$, то $\eta(t - \tau) f(t - \tau) \rightleftharpoons e^{-p\tau} F(p)$ для любого $\tau > 0$. Здесь $\eta(t - \tau)$ – единичная функция Хевисайда, которая равна 1 при $t \geq \tau$ и нулю при $t < \tau$.

5) Дифференцирование оригинала. Если функции $f(t), f'(t), \dots, f^{(n)}(t)$ являются оригиналами и $f(t) \rightleftharpoons F(p)$, то

$$\begin{aligned} f'(t) &\rightleftharpoons pF(p) - f(0), \\ &\dots\dots\dots \\ f^{(n)}(t) &\rightleftharpoons p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \end{aligned} \quad (1.2)$$

6) Дифференцирование изображения. Если $f(t) \rightleftharpoons F(p)$, то

$$\begin{aligned} F'(p) &\rightleftharpoons -tf(t), \\ &\dots\dots\dots \\ F^{(n)}(p) &\rightleftharpoons (-1)^n t^n f(t). \end{aligned}$$

7) Интегрирование оригинала. Если $f(t) \rightleftharpoons F(p)$, то

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \rightleftharpoons \frac{F(p)}{p}.$$

8) Интегрирование изображения. Если $f(t) \rightleftharpoons F(p)$ и $\frac{f(t)}{t}$ является оригиналом, то $\int_p^\infty F(q) dq \rightleftharpoons \frac{f(t)}{t}$.

9) Изображение периодической функции. Если $f_0(t) = F_0(p)$, где $f_0(t) = f(t) \forall t \in [0; T)$ и $f_0(t) \equiv 0 \forall t \notin [0; T)$, а $f(t)$ – периодическая функция ($f(t+T) = f(t)$), то

$$f(t) \rightleftharpoons \frac{F_0(p)}{1 - e^{-Tp}}. \quad (1.3)$$

10) Умножение изображений. Если $F_1(p) \rightleftharpoons f_1(t)$, $F_2(p) \rightleftharpoons f_2(t)$, а $f_1(t)$ и $f_2(t)$ непрерывны на промежутке $[0; \infty)$, то

$$F_1(p)F_2(p) \rightleftharpoons f_1 * f_2 = \int_0^t f_1(u)f_2(t-u)du. \quad (1.4)$$

11) Формула Дюамеля. Если $F_1(p) \rightleftharpoons f_1(t)$, $F_2(p) \rightleftharpoons f_2(t)$, то

$$pF_1(p)F_2(p) \rightleftharpoons \frac{d}{dt}(f_1 * f_2) = f_1 * f_2' + f_1(t)f_2(0).$$

Таблица основных операционных соотношений

№	1	2	3	4	5	6
$f(t)$	$\eta(t)$	t	e^{at}	$\sin \omega t$	$\cos \omega t$	$\text{sh } \omega t$
$F(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{1}{p - \alpha}$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$

7	8	9	10	11
$\text{ch } \omega t$	t^n	$t^n e^{at}$	$e^{at} \sin \omega t$	$e^{at} \cos \omega t$
$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\frac{n!}{(p - \alpha)^{n+1}}$	$\frac{\omega}{(p - \alpha)^2 + \omega^2}$	$\frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 + \omega^2}$

Пример 1.1. Найти изображения функций $f(t)$ и $f'(t)$, если $f(t) = e^{-t} \sin^2 t$.

Решение. Преобразуем функцию к виду:

$$f(t) = \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{1}{2} \cos 2t \cdot e^{-t}.$$

Используя свойства 1 и 3 и таблицу изображений, получаем

$$e^{-t} \sin^2 t \rightleftharpoons \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p+1} - \frac{p+1}{(p+1)^2 + 4} \right) = \frac{2}{(p+1)(p^2 + 2p + 5)}.$$

По формуле (1.2) имеем:

$$f'(t) \rightleftharpoons pF(p) - f(0) = \frac{2p}{(p+1)(p^2 + 2p + 5)}.$$

Пример 1.2. Найти изображение функции

$$f(t) = t \text{ sh } 2t.$$

Решение. По формуле 6 таблицы изображений имеем:

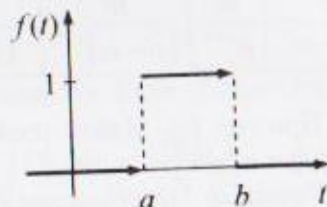
$$\text{sh } 2t \rightleftharpoons \frac{2}{p^2 - 4}.$$

Используя свойство дифференцирования изображения, получим:

$$t \text{ sh } 2t \rightleftharpoons - \left(\frac{2}{p^2 - 4} \right)' = \frac{4p}{(p^2 - 4)^2}.$$

Пример 1.3. Используя свойство запаздывания, найти изображение функции:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < a \\ 1, & \text{при } a \leq t < b \\ 0, & \text{при } t \geq b \end{cases}$$



Решение. Запишем $f(t)$ через единичную функцию Хевисайда. Для этого в момент времени $t = a$ следует включить единичный сигнал, при $t = b$ — выключить:

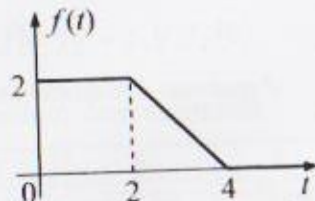
$$f(t) = \eta(t - a) - \eta(t - b).$$

Применяя свойство 4, получим:

$$f(t) = \eta(t - a) - \eta(t - b) = \frac{1}{p} e^{-ap} - \frac{1}{p} e^{-bp} = \frac{e^{-ap} - e^{-bp}}{p}.$$

Пример 1.4. Найти изображение функции, заданной графически:

$$f(t) = \begin{cases} 2, & \text{при } t < 2 \\ 4 - t, & \text{при } 2 \leq t < 4 \\ 0, & \text{при } t \geq 4 \end{cases}$$



Решение. Запишем $f(t)$ через единичную функцию Хевисайда.

$$f(t) = 2\eta(t) - 2\eta(t - 2) + (4 - t)\eta(t - 2) - (4 - t)\eta(t - 4).$$

Тождественными преобразованиями приведем все слагаемые к виду

$$f(t - \tau)\eta(t - \tau).$$

$$f(t) = 2\eta(t) - 2\eta(t - 2) - (t - 2)\eta(t - 2) + 2\eta(t - 2) + (t - 4)\eta(t - 4) = 2\eta(t) - (t - 2)\eta(t - 2) + (t - 4)\eta(t - 4).$$

Применяя свойство 4, получим:

$$F(p) = \frac{2}{p} - \frac{1}{p^2} e^{-2p} + \frac{1}{p^2} e^{-4p} = \frac{2p - e^{-2p} + e^{-4p}}{p^2}.$$

Пример 1.5. Найти изображение периодической функции (рис. 1.1)

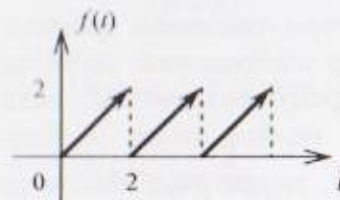


Рис. 1.1.

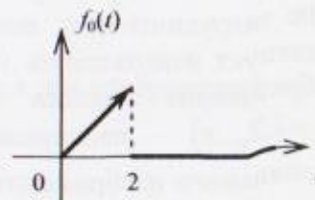


Рис. 1.2.

Решение. Очевидно $f(t) = t \forall t \in [0; 2)$ и $T=2$, тогда (рис. 1.2)

$$f_0(t) = \begin{cases} t, & \text{при } 0 \leq t < 2, \\ 0, & \text{при } t \geq 2. \end{cases}$$

Применяя теорему запаздывания, получим:

$$f_0 = t\eta(t) - t\eta(t - 2) = t\eta(t) - (t - 2)\eta(t - 2) - 2\eta(t - 2) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{p^2} - \frac{e^{-2p}}{p^2} - \frac{2}{p} e^{-p} = \frac{1 - e^{-2p} - 2pe^{-2p}}{p^2}.$$

По формуле 1.3. имеем

$$f(t) = \frac{1 - e^{-2t} - 2te^{-2t}}{p^2(1 - e^{-2t})}.$$

1.2. Обратное преобразование Лапласа

Рассмотрим теперь обратную задачу: по известному изображению $F(p)$ будем находить оригинал $f(t)$. Сделать это по формуле обращения

$$f(t) = \int_{s'-j\infty}^{s+j\infty} e^{pt} F(p) dp \quad (s = \operatorname{Re} p > s_0)$$

крайне затруднительно, поэтому при отыскании оригиналов следует использовать таблицу изображений, свойства преобразования Лапласа и теорему разложения: если $p_k (k=1, 2, \dots, n)$ — изолированные особые точки дробно-рационального изображения $F(p)$, то оригинал находится по формуле

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} [F(p)e^{pt}, p_k]. \quad (1.5)$$

Заметим, что если $F(p) = \frac{\varphi(p)}{\psi(p)}$ и все особые точки являются простыми полюсами, то (1.5) принимает вид:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(p_k)}{\psi'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (1.6)$$

Пример 1.6. Найти оригинал для изображения

$$F(p) = \frac{p^2}{(p+1)(p^2-4)}.$$

Решение. Особые точки функции $F(p)$ являются простыми полюсами, поэтому целесообразно воспользоваться формулой (1.6). Получим:

$$\begin{aligned} f(t) &= \left. \frac{p^2}{(p+1)} e^{pt} \right|_{p=-1} + \left. \frac{p^2}{(p+1)(p-2)} e^{pt} \right|_{p=2} + \\ &+ \left. \frac{p^2}{(p+1)(p+2)} e^{pt} \right|_{p=-2} = -\frac{e^{-t}}{3} + \frac{e^{2t}}{3} + e^{-2t}. \end{aligned}$$

Пример 1.7. Найти оригинал для изображения

$$F(p) = \frac{2}{(p^2+4)^2}.$$

Решение. Применяя теорему умножения, получим:

$$\begin{aligned} \frac{2}{(p^2+4)^2} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{p^2+4} \cdot \frac{2}{p^2+4} = \frac{1}{2} (\sin 2t * \sin 2t) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \sin 2\tau \sin 2(t-\tau) d\tau = \frac{1}{4} \left(\frac{\sin(4t-2t)}{4} - t \cos 2t \right) \Big|_0^t = \\ &= \frac{1}{8} (\sin 2t - 2t \cos 2t). \end{aligned}$$

Пример 1.8. Найти оригинал для изображения

$$F(p) = \frac{p-4}{p^2+2p+5}.$$

Решение. Представим эту дробь в виде суммы двух дробей, а затем применим формулы 10 и 11 таблицы изображений:

$$\frac{p-4}{p^2+2p+5} = \frac{(p+1)-5}{(p+1)^2+2^2} = \frac{p+1}{(p+1)^2+2^2} - \frac{5}{(p+1)^2+2^2} J$$

$$J e^{-t} \cos 2t - \frac{5}{2} e^{-t} \sin 2t$$

Пример 1.9. Найти оригинал для изображения

$$F(p) = \frac{e^{-2p}}{p^2(p-4)}.$$

Решение. Найдем сначала оригинал для функции

$$\tilde{F}(p) = \frac{1}{p^2(p-4)}.$$

Особая точка этой функции $p=0$ является полюсом 2-го порядка, а $p=4$ - простым полюсом. Поэтому

$$\operatorname{Res}[\tilde{F}(p)e^{pt}, 0] = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{e^{pt} \cdot p^2}{p^2(p-4)} \right)' = -\frac{1+4t}{16},$$

$$\operatorname{Res}[\tilde{F}(p)e^{pt}, 4] = \left. \frac{e^{pt}}{(p-4)^2} \right|_{p=4} = \frac{e^{4t}}{16}$$

По формуле (1.5) имеем

$$\frac{1}{p^2(p-4)} = \frac{e^{4t} - 4t - 1}{16}.$$

Тогда по теореме запаздывания получим:

$$\frac{e^{-2p}}{p^2(p-4)} = \frac{e^{4(t-2)} - 4(t-2) - 1}{16} \eta(t-2).$$

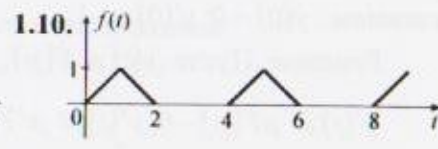
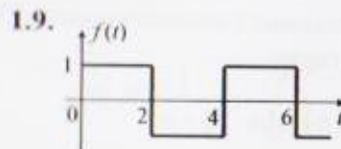
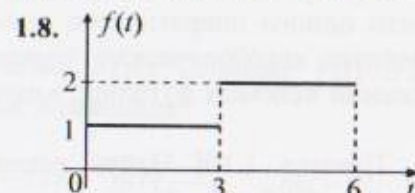
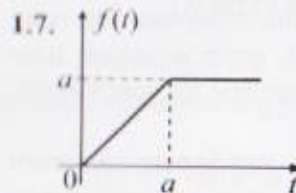
Найти изображения функций:

$$1.1. f(t) = e^t \cos^2 t. \quad 1.2. f(t) = \sin t - t \cos t.$$

$$1.3. f(t) = \operatorname{sh}^2 2t. \quad 1.4. f(t) = e^{2t} \operatorname{ch} 3t.$$

$$1.5. f(t) = t^2 e^{-4t}. \quad 1.6. f(t) = \operatorname{ch} t \sin t.$$

Найти изображения функций, заданных графически:



Найти оригиналы по заданным изображениям:

$$1.11. F(p) = \frac{1}{(p-1)(p^2-4)}. \quad 1.12. F(p) = \frac{1}{(p+1)(p-3)^2}.$$

$$1.13. F(p) = \frac{4-p-p^2}{p^3-p^2}. \quad 1.14. F(p) = \frac{1}{p^2+4p+5}.$$

$$1.15. F(p) = \frac{p}{(p^2+1)^2}. \quad 1.16. F(p) = \frac{4pe^{-5p}}{p^2-2p-3}.$$

1.3. Решение дифференциальных уравнений операционным методом

При решении линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами операционным методом необходимо:

1) Используя свойства преобразования Лапласа перевести уравнение в пространство изображений.

2) Найти из полученного алгебраического уравнения изображение $Y(p)$ искомой функции.

3) Выполнив обратное преобразование Лапласа, найти $y(t)$.

При решении систем дифференциальных уравнений вместо одного операторного уравнения получим систему линейных алгебраических уравнений относительно изображений искомых функций, а затем найдем их оригиналы.

Пример 1.10. Найти решение дифференциального уравнения $y'' + y = 2 \cos t$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 0$; $y'(0) = -1$.

Решение. Пусть $y(t) \doteq Y(p)$, тогда

$$y'(t) \doteq pY(p) - 0, y''(t) \doteq p^2Y(p) + 1.$$

Операторное уравнение будет иметь вид:

$$p^2Y(p) + 1 + Y(p) = \frac{2p}{p^2 + 1}.$$

Отсюда

$$Y(p) = \frac{2p}{(p^2 + 1)^2} - \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Найдем оригиналы для каждого слагаемого:

$$\frac{1}{p^2 + 1} \doteq \sin t,$$

$$\frac{2p}{(p^2 + 1)^2} = \left(\frac{1}{p^2 + 1} \right)' \doteq t \sin t \quad (\text{по свойству 6}).$$

Следовательно, $y(t) = t \sin t - \sin t$.

Пример 1.11. Решить дифференциальное уравнение $y'' - y' = f(t)$, если $y(0) = y'(0) = 0$, а

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{при } t \in [0; 1] \\ 0 & \text{при } t \notin [0; 1] \end{cases}$$

Решение. Для отыскания $F(p)$ запишем $f(t)$ с помощью единичной функции Хевисайда:

$$f(t) = e^{-t} \eta(t) - e^{-t} \eta(t-1) = e^{-t} \eta(t) - \frac{1}{e} e^{-(t-1)} \eta(t-1).$$

Применяя теорему запаздывания, находим:

$$f(t) \doteq \frac{1}{p+1} - \frac{e^{-p}}{e(p+1)}.$$

Полагая $y(t) \doteq Y(p)$ и учитывая нулевые начальные условия, получаем операторное уравнение:

$$p^2Y - pY = \frac{1}{p+1} - \frac{e^{-p}}{e(p+1)}.$$

Отсюда:

$$Y(p) = \frac{1}{(p^2 - p)(p+1)} - \frac{e^{-p}}{e(p^2 - p)(p+1)}.$$

Находим по формуле (1.6) оригинал первой дроби:

$$\frac{1}{(p^2 - p)(p + 1)} = \frac{1}{p(p - p)(p + 1)} \doteq \frac{1}{p'} \left. \frac{p^2 - 1}{p'} e^{pt} \right|_{p=0} +$$

$$+ \frac{1}{(p + 1)'} e^{pt} \Big|_{p=-1} + \frac{1}{(p - 1)'} e^{pt} \Big|_{p=1} = -1 + \frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^t}{2} = \text{ch } t - 1.$$

Вторая дробь отличается от первой множителем e^{-p} , поэтому применяем теорему запаздывания:

$$\frac{e^{-p}}{e(p^2 - p(p + 1))} \doteq \frac{1}{e} (\text{ch}(t - 1) - 1) \eta(t - 1).$$

Тогда:

$$y(t) = \text{ch } t - 1 - \frac{1}{e} (\text{ch}(t - 1) - 1) \eta(t - 1).$$

Пример 1.12. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' + 2y' = te^{-2t}.$$

Решение. Пусть $y(t) \overset{\text{J}}{\longleftrightarrow} Y(p)$. Тогда

$$y'(t) \overset{\text{J}}{\longleftrightarrow} pY(p) - y(0), \quad y''(t) \overset{\text{J}}{\longleftrightarrow} p^2 Y(p) - py(0) - y'(0).$$

По формуле (9) таблицы изображений

$$te^{-2t} \doteq \frac{1}{(p + 2)^2}.$$

Подставив найденные изображения в данное уравнение, получим

$$p^3 Y(p) - py(0) - y'(0) + 2Y(p) - 2y(0) = \frac{1}{(p + 2)^2}.$$

Отсюда

$$Y(p) = \frac{1}{p(p + 2)^3} + \frac{1}{p} y(0) + \frac{1}{p(p + 2)} y'(0).$$

Для каждого слагаемого найдем оригинал с помощью вычетов.

$$\frac{1}{p(p + 2)^3} \doteq \frac{1}{p'} \left. \frac{(p + 2)^3}{p'} e^{pt} \right|_{p=0} + \frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow -2} \left(\frac{e^{pt}}{p} \right)' = \frac{1}{8} +$$

$$+ \frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow -2} \left(\frac{pte^{pt} - e^{pt}}{p^2} \right)' = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} t^2 e^{-2t} - \frac{1}{4} t e^{-2t} - \frac{1}{8} e^{-2t}.$$

$$\frac{y(0)}{p} \doteq y(0),$$

$$\frac{y'(0)}{p(p + 2)} \doteq y'(0) \left(\frac{1}{p'} \left. \frac{p + 2}{p'} e^{pt} \right|_{p=0} + \frac{1}{(p + 2)'} e^{pt} \Big|_{p=-2} \right) =$$

$$= y'(0) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2t} \right).$$

Следовательно:

$$y(t) = c_1 + c_2 e^{-2t} - (2t^2 + 2t - 1) \frac{e^{-2t}}{8},$$

$$\text{где } c_1 = y(0) + \frac{y'(0)}{2} + \frac{1}{8}, \quad c_2 = -\frac{y'(0)}{2}.$$

Пример 1.13. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y + 1, \end{cases}$$

если $x(0) = 0$, $y(0) = 5$.

Решение. Пусть $x(t) \doteq X(p)$, $y(t) \doteq Y(p)$, тогда $x'(t) \doteq pX(p) - 0$, $y'(t) \doteq pY(p) - 5$.

Операторная система имеет вид:

$$\begin{cases} pX(p) = X(p) + 2Y(p), \\ pY(p) - 5 = 2X(p) + Y(p) + \frac{1}{p}, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} X(p)(p-1) - 2Y(p) = 0, \\ 2X(p) + Y(p)(1-p) = -5 - \frac{1}{p}. \end{cases}$$

Решив эту линейную относительно $X(p)$ и $Y(p)$ систему уравнений, получим:

$$X(p) = \frac{10p+2}{p(p^2-2p-3)}, \quad Y(p) = \frac{5p^2-4p-1}{p(p^2-2p-3)}.$$

Для нахождения оригиналов воспользуемся формулой (1.6), так как все особые точки являются простыми полюсами.

$$X(p) = \frac{10p+2}{p(p^2-2p-3)} = \frac{10p+2}{p(p+1)(p-3)} J$$

$$J \frac{p(p+1)(p-3)}{p'} e^{pt} \Big|_{p=0} + \frac{(10p+2)}{(p+1)'} e^{pt} \Big|_{p=-1} +$$

$$+ \frac{(10p+2)}{(p-3)'} e^{pt} \Big|_{p=3} = -\frac{2}{3} - 2e^{-t} + \frac{8}{3}e^{3t} = x(t).$$

Аналогично находим оригинал для $Y(p)$:

$$y(t) = \frac{1}{3} + 2e^{-t} + \frac{8}{3}e^{3t}$$

Заметим, что, зная $x(t)$, $y(t)$ можно найти из первого уравнения заданной системы, не выполняя обратного преобразования.

Найти решения дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях:

1.17. $y' - 2y = 0$, $y(0) = 1$.

1.18. $y' + y = e^t$, $y(0) = 0$.

1.19. $y'' + y' - 2y = e^t$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$.

1.20. $y'' + 3y' = e^{-3t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.

1.21. $y'' - 9y' = \operatorname{sh} t$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 3$.

1.22. $y'' - y' = 2(1-t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

1.23. $y'' + 2y' + y = f(t)$, если $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, а

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < t < 2, \\ 3 & \text{при } t \geq 2. \end{cases}$$

Найти общие решения дифференциальных уравнений:

1.24. $y'' + 9y = \cos 3t$.

11.2 $y'' + y' - 2y = 3e^t$.

Найти решения систем дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях:

$$1.26. \begin{cases} x' = 2y, \\ y' = 2x, \end{cases} \text{ если } x(0) = 2, y(0) = 2.$$

$$1.27. \begin{cases} x' = 3x + 4y, \\ y' = 4x - 3y, \end{cases} \text{ если } x(0) = 1, y(0) = 1.$$

$$1.28. \begin{cases} x' = 3y - x, \\ y' = x + y + e^t, \end{cases} \text{ если } x(0) = 0, y(0) = 0.$$

1.4. Решение линейных дифференциальных уравнений с помощью формулы Дюамеля

В прикладных задачах электротехники и радиотехники нередко приходится находить отклики системы на различные сигналы, т.е. многократно решать дифференциальные уравнения с одной и той же левой частью. Если начальные условия нулевые, то в этом случае рекомендуется найти отклик системы на единичный сигнал $y_1(t)$, а затем все остальные решения получать по формуле Дюамеля

$$y(t) = y_1'(t) * f(t) = f'(t) * y_1(t) + f(0) \cdot y_1(t). \quad (1.7)$$

Пример 1.14. Решить дифференциальное уравнение $y'' + y = t$, если $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

Решение. Составим вспомогательное уравнение, заменив правую часть единичной функцией:

$$\begin{aligned} y_1'' + y_1 &= \eta(t), \\ y_1(0) &= 0; y_1'(0) = 0. \end{aligned}$$

Пусть $y_1(t) \hat{=} Y_1(p)$, тогда операторное уравнение будет иметь вид:

$$p^2 Y_1(p) + Y_1(p) = \frac{1}{p} \Rightarrow Y_1(p) = \frac{1}{p(p^2 + 1)} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1}.$$

Отсюда $y_1(t) = \eta(t) - \cos t$.

По формуле (1.7) получаем решение исходного уравнения:

$$y(t) = \sin t * t = \int_0^t (t - \tau) \sin \tau d\tau = -(t - \tau) \cos \tau - \sin \tau \Big|_0^t = t - \sin t.$$

Заметим, что этот же способ используется, если возникают трудности при нахождении изображения для правой части дифференциального уравнения.

Применяя формулу Дюамеля, найти решение дифференциальных уравнений:

$$1.29. y'' + y = f(t), y(0) = 0, y'(0) = 0, \text{ где}$$

$$a) f(t) = \sin 2t,$$

$$б) f(t) = 2t.$$

$$1.30. y'' - y = f(t), y(0) = 0, y'(0) = 0, \text{ где}$$

$$a) f(t) = t,$$

$$б) f(t) = e^{2t}.$$

2. РАСЧЕТЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Методы операционного исчисления позволяют с большим успехом рассчитывать процессы в сложных электрических цепях при произвольном внешнем напряжении. Они настолько удобны для приложений, что в настоящее время занимают одно из важных мест в курсах электротехники и автоматического регулирования при расчёте электрических цепей.

1. Рассмотрим сначала простейший колебательный контур (рис. 2.1). Как известно дифференциальное уравнение для тока $i(t)$ в колебательном контуре имеет вид

$$L \frac{di}{dt} + R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt = u(t), \quad (2.1)$$

где R - сопротивление; L - индуктивность; C - ёмкость; $u(t)$ - электродвижущая сила (ЭДС).

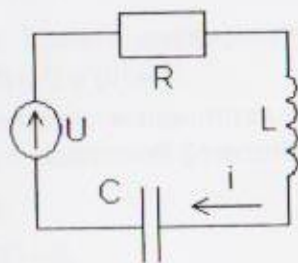


Рис. 2.1

Считаем, что в начальный момент времени сила то-

ка равна нулю: $i(0)=0$. Введём операторный ток $I(p)=i(t)$ и напряжение $U(p)=u(t)$. На основании теоремы дифференцирования и интегрирования оригинала имеем:

$$\frac{di(t)}{dt} = p \cdot I(p) - i(0) = p \cdot I(p), \quad \int_0^t i(t) dt = \frac{I(p)}{p}.$$

Применив к обеим частям (2.1) преобразования Лапласа, перепишем уравнение в операторном виде:

$$L \cdot p \cdot I(p) + R \cdot I(p) + \frac{1}{C \cdot p} \cdot I(p) = U(p),$$

откуда

$$I(p) = \frac{U(p)}{R + L \cdot p + \frac{1}{C \cdot p}} = \frac{U(p)}{Z(p)}, \quad (2.2)$$

где $Z(p) = R + L \cdot p + \frac{1}{C \cdot p}$ - операторное сопротивление контура. Формула (2.2) называется операторной формой закона Ома.

Здесь же отметим важную роль интеграла Дюамеля. Пусть в контуре включается постоянное единичное напряжение $u(t) = 1$. Тогда $u_1(t) = U_1(p) = \frac{1}{p}$ и, по формуле (2.2)

$$I(p) = \frac{1}{p \cdot Z(p)} = i(t)$$

откуда $Z(p) = \frac{1}{p \cdot I_1(p)}$. Если теперь в контур включить любое напряжение $u(t)$, то

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = p \cdot I_1(p) \cdot U(p).$$

Но $p \cdot I_1(p) = i_1'(t)$

$$i(t) = \int_0^t i_1'(\tau) \cdot u(t - \tau) d\tau,$$

$$i(t) = u(0) \cdot i_1(t) + \int_0^t u'(\tau) \cdot i_1(t - \tau) d\tau, \quad (2.3)$$

(взяли предыдущий интеграл по частям и учли, что $i(0) = 0$).

Таким образом, зная реакцию контура на единичное напряжение, с помощью формул (2.3) можно вычислить реакцию контура на любое внешнее напряжение. Отметим, что в формулу (2.3) не входит ни изображение напряжения $U(p)$, ни, что самое интересное, операторное сопротивление $Z(p)$. Это означает, что можно рассчитывать контур, фактически не зная его параметров, если только удалось экспериментально получить ток $i_1(t)$ - реакцию контура на единичное напряжение.

2. Преимущества операторного метода особенно ясно видны при изучении не одного контура, а сложной электрической схемы.

Как известно, цепи постоянного тока рассчитываются на основании законов Кирхгофа:

1. Алгебраическая сумма всех токов, протекающих в любой точке цепи равна нулю.

2. Для каждого замкнутого контура цепи алгебраическая сумма падений напряжений в отдельных ветвях контура равна нулю.

В курсе электротехники доказывается, что если в цепи протекает ток, изменяющийся во времени, то для операторного тока и операторного напряжения оба закона Кирхгофа остаются справедливыми. Первый закон Кирхгофа формулируется одинаково как для самих токов, так и для их изображений (т.е. для операторных токов).

Чтобы пользоваться вторым законом Кирхгофа, нужно уметь находить операторное падение напряжения на отдельных участках цепи.

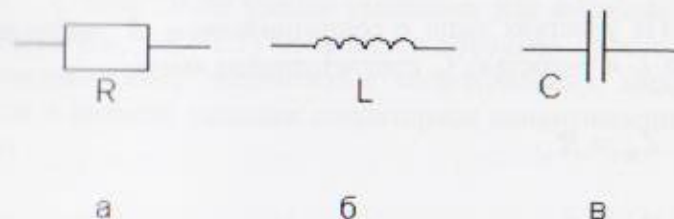


Рис. 2.2

Рассмотрим простейшие участки цепи, показанные на рис.2.2. Как известно, напряжение на концах участка с сопротивлением R равно $U_R = R \cdot i$; на участке с индуктивностью L равно $U_L = L \frac{di}{dt}$; на участке с ёмкостью C - равно

$U_C = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt$ (в последнем случае считаем что при $t = 0$ заряд на обкладках конденсатора равен нулю). Пере-

ходя к операторным токам и напряжениям и считая для простоты, что начальный ток $i(0) = 0$, получим

$$U_R(p) = R \cdot I(p),$$

$$U_L = L \cdot p \cdot I(p),$$

$$U_C = \frac{I(p)}{C \cdot p}.$$

Все эти соотношения объединяются в единой операторной форме закона Ома:

$$U(p) = Z(p) \cdot I(p),$$

где $Z(p)$ -операторное сопротивление участка цепи.

На участках цепи с сопротивлением R , индуктивностью L и ёмкостью C соответственно имеем

$$Z_R = R,$$

$$Z_L = L \cdot p,$$

$$Z_C = \frac{1}{C \cdot p}.$$

При последовательном соединении участков цепи (рис. 2.3) операторные сопротивления, как и обычные, складываются, т.е. операторное сопротивление всей цепи $Z(p)$: $Z = Z_1 + Z_2$.

При параллельном соединении участков цепи (рис. 2.4) для операторного сопротивления цепи имеем:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}.$$

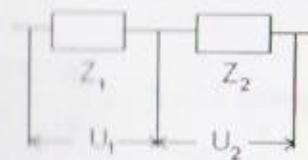


Рис. 2.3

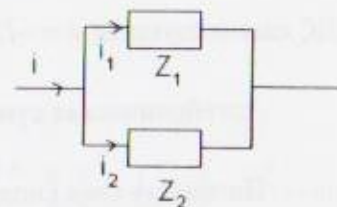


Рис. 2.4

Таким образом, операторное сопротивление цепи в случае нулевых начальных условий можно вычислить по обычным правилам соединений элементов цепи.

С этой точки зрения уравнение для колебательного контура (см. рис. 2.1) получается довольно просто. Имея последовательно соединённые сопротивления, индуктивности и ёмкости находим операторное сопротивление контура

$$Z = R + L \cdot p + \frac{1}{C \cdot p}$$

Согласно второму закону Кирхгофа $Z \cdot I = U$, и приходим к формуле (2.2).

Рассмотрим более сложные примеры.

Задача 2.1. В цепи поддерживается напряжение $E = 300$ В. Сопротивление цепи $R = 150$ Ом. Коэффициент самондукции $L = 30$ Гн. За какое время с момента замыкания цепи сила возникающего тока i достигнет 99% сво-

его предельного значения?

Решение. ЭДС самоиндукции пропорциональна скорости возрастания силы тока. Коэффициентом пропорциональности служит коэффициент самоиндукции цепи. В процессе замыкания цепи действуют две противоположные ЭДС самоиндукции $e = -L \frac{di}{dt}$.

Алгебраическая сумма ЭДС равна $U = E - L \frac{di}{dt}$.

По закону Ома сила тока в цепи $i = \frac{U}{R}$, т.е.

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} \cdot i + \frac{E}{L}. \quad (2.4)$$

Кроме того, у нас имеется начальное условие

$$i(0) = 0 \quad (2.5)$$

Решим задачу Коши (2.4), (2.5) операционным методом.

Пусть $i(t) = I(p)$. На основании теоремы о дифференцировании оригинала

$$i'(t) = p \cdot I(p) - i(0) = p \cdot I(p).$$

Применив к обеим частям уравнения (2.4) преобразования Лапласа получим операторное уравнение:

$$p \cdot I(p) = -\frac{R}{L} I(p) + \frac{E}{L} \frac{1}{p},$$

или

$$(p + \frac{R}{L}) I(p) = \frac{E}{L} \frac{1}{p},$$

откуда

$$I(p) = \frac{E}{L} \frac{1}{p(p + \frac{R}{L})} = \frac{E}{L} \frac{L}{R} \frac{1}{p(p + \frac{R}{L})} = \frac{E}{R} \frac{(p + \frac{R}{L}) - p}{p(p + \frac{R}{L})} = \frac{E}{R} (\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{R}{L}}) = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) = i(t).$$

Так как

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) = \frac{E}{R},$$

предельное значение силы тока в цепи, то по условию задачи, следует найти такой момент времени $t = T$, что

$$i(T) = 0,99 \frac{E}{R},$$

Подставив в выражение $i(t)$ $t = T$, $i(T) = 0,99 \frac{E}{R}$, получаем:

$$0,99 \frac{E}{R} = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}T}),$$

т.е.

$$e^{-\frac{R}{L}T} = 0,01 \Rightarrow e^{\frac{R}{L}T} = 100 \Rightarrow \frac{R}{L}T = \ln 100 = 2 \ln 10 \Rightarrow T = \frac{L}{R} 2 \ln 10 = \frac{2L}{R} \ln 10 \quad (c).$$

В нашей задаче $L = 30 \text{ Аи}$, $R = 150 \text{ Ои}$, и поэтому

$$T = \frac{2 \cdot 30}{150} \ln 10 = \frac{2}{5} \ln 10 \approx \frac{2}{5} \cdot 2,30259 \dots \approx 0,921(c).$$

Задача 2.2. К электрическому контуру, в который последовательно включены сопротивление R и индуктивность L . Приложена периодическая ЭДС периода T : $U(t) = a \cdot t$ при $0 \leq a < T$, $U(t+T) = U(t)$ (рис. 2.5). Определить начальный ток $i(0) = i_0$ так чтобы в этом контуре возник периодический ток.

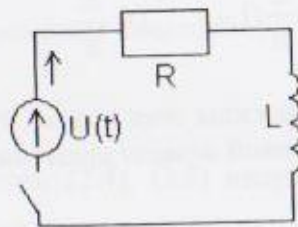


Рис. 2.5

Решение. По второму закону Кирхгофа находим:

$$L \frac{di}{dt} + R \cdot i(t) = u(t),$$

или

$$i'(t) + K \cdot i(t) = \frac{1}{L} u(t),$$

$$K = \frac{R}{L} \quad (2.6)$$

Кроме того имеем начальное условие:

$$i(0) = i_0. \quad (2.7)$$

Решим задачу Коши (2.6), (2.7) операционным методом. Пусть $i(t) = I(p)$. Тогда

$$i'(t) = p \cdot I(p) - i(0) = p \cdot I(p) - i_0.$$

Найдём изображение периодической функции $u(t)$. Запишем $u_0(t)$ (значение $u(t)$ на начальном периоде $t \in [0, T]$) с помощью единичной функции:

$$u_0(t) = a \cdot t \cdot [\eta(t) - \eta(t-T)] = a \cdot t \cdot \eta(t) - a(t-T) \cdot \eta(t-T).$$

Отсюда на основании теоремы запаздывания:

$$u_0(t) = U_0(p) = \frac{a}{p^2} - \frac{a}{p^2} e^{-Tp} - \frac{aT}{p} e^{-Tp} = \frac{a}{p^2} (1 - e^{-Tp}) - \frac{aT}{p} e^{-Tp}.$$

Поэтому применив формулу для изображения периодического оригинала получим:

$$u(t) = U(p) = \frac{U_0(p)}{1 - e^{-Tp}} = \frac{1}{1 - e^{-Tp}} \left[\frac{a}{p^2} (1 - e^{-Tp}) - \frac{aT}{p} e^{-Tp} \right] = \frac{a}{p^2} - \frac{aT}{p} \frac{e^{-Tp}}{1 - e^{-Tp}}.$$

Теперь применим к обеим частям уравнения (2.6) преобразования Лапласа. Получим операторное уравнение:

$$(p \cdot I(p) - i_0) + k \cdot I(p) = \frac{1}{L} \left(\frac{a}{p^2} - \frac{aT}{p} \frac{e^{-Tp}}{1 - e^{-Tp}} \right),$$

т.е.

$$(p + k)I(p) = i_0 + \frac{a}{Lp^2} - \frac{aT}{Lp} \frac{e^{-Tp}}{1 - e^{-Tp}},$$

откуда

$$I(p) = \frac{i_0}{p + k} + \frac{a}{Lp^2(p + k)} - \frac{aT}{Lp(p + k)} \frac{e^{-Tp}}{1 - e^{-Tp}}.$$

Запишем $I(p)$ в следующем виде:

$$I(p) = \frac{F(p)}{1 - e^{-Tp}},$$

где

$$F(p) = \frac{i_0(1 - e^{-Tp})}{p + k} + \frac{a(1 - e^{-Tp})}{Lp^2(p + k)} - \frac{aTe^{-Tp}}{Lp(p + k)}.$$

Для того чтобы ток в контуре был периодически с периодом T , необходимо, чтобы оригинал функции $F(p)$ (обозначим его через $f(t)$, то есть $f(t) = F(p)$) имел вид:

$$f(t) = \begin{cases} f_0(t), & 0 \leq t < T \\ 0, & t \geq T \end{cases}$$

Но при $0 \leq t < T$

$$f_0(t) = \frac{i_0}{p + k} + \frac{a}{Lp^2(p + k)}.$$

Так как (это легко проверить, например, методом неопределённых коэффициентов)

$$\frac{1}{p^3(p + k)} = \frac{1}{k} \frac{1}{p^2} + \frac{1}{k^2} \frac{1}{p + k} - \frac{1}{k^2} \frac{1}{p} = \frac{t}{k} + \frac{1}{k^2} (e^{-kt} - 1),$$

то

$$f_0(t) = i_0 e^{-kt} + \frac{at}{Lk} + \frac{a}{Lk^2} (e^{-kt} - 1). \quad (2.8)$$

При $t \geq T$, используя свойство УП, находим:

$$f(t) = i_0 [e^{-kt} - e^{-k(t-T)}] + \frac{a[t - (t-T)]}{Lk} + \frac{a}{Lk^2} [(e^{-kt} - 1) - (e^{-k(t-T)} - 1)] - \frac{aT}{Lk} (1 - e^{-k(t-T)}) =$$

$$= e^{-kt} \left[i_0(1 - e^{kT}) + \frac{a}{Lk^2} (1 - e^{kT}) + \frac{aT}{Lk} e^{kT} \right].$$

Но здесь $f(t) = 0$ и поэтому

$$i_0(1 - e^{kT}) + \frac{a}{Lk^2} (1 - e^{kT}) + \frac{aT}{Lk} e^{kT} = 0,$$

откуда

$$i_0 = -\frac{a}{Lk^2} - \frac{aT}{Lk} \frac{e^{kT}}{1-e^{kT}} = -\frac{a}{Lk^2} - \frac{aT}{Lk} \frac{1}{e^{-kT}-1} = -\frac{a}{Lk^2} + \frac{aT}{Lk(1-e^{-kT})}.$$

Таким образом, подставив найденное значение i_0 в (3), получаем:

$$f_0(t) = \left(-\frac{a}{Lk^2} + \frac{aT}{Lk(1-e^{-kT})}\right)e^{-kt} + \frac{at}{Lk} + \frac{a}{Lk^2}(e^{-kt}-1) = -\frac{a}{Lk^2} + \frac{aTe^{-kt}}{Lk(1-e^{-kT})} + \frac{at}{Lk} = \frac{aT}{Lk} \left(\frac{t}{T} - \frac{1}{kT} + \frac{e^{-kt}}{1-e^{-kT}}\right).$$

Это искомое значение периодического тока (периода T) в промежутке $0 \leq t < T$

Задача 2.3. Найти условия существования колебательного процесса при подключении контура (рис. 2.6) к постоянной ЭДС E_0 .

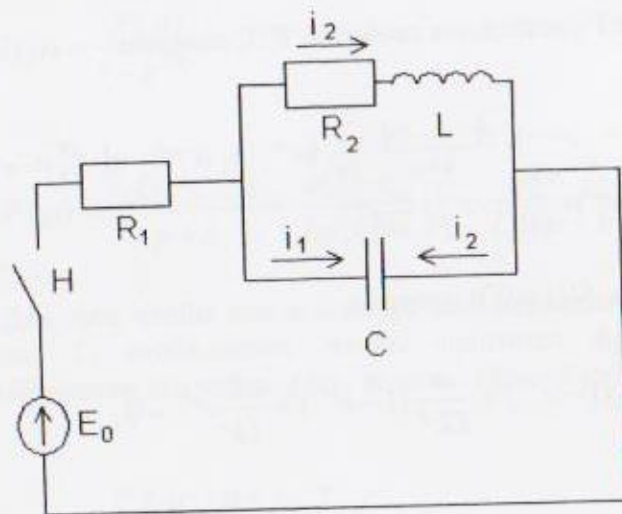


Рис. 2.6

Решение. В момент включения рубильника H (т.е. в момент подключения ЭДС к контуру) по второму закону Кирхгофа имеем:

$$\begin{cases} R_1 i_1(t) + R_2 i_2(t) + L \frac{di_2(t)}{dt} = E_0 \\ R_2 i_2(t) + L \frac{di_2(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t [i_2(t) - i_1(t)] dt. \end{cases} \quad (2.9)$$

Кроме того выполнены начальные условия

$$i_1(0) = 0, \quad i_2(0) = 0. \quad (2.10)$$

Решим задачу Коши (2.9), (2.10) операционным методом.

Пусть $i_1(t) = I_1(p)$, $i_2(t) = I_2(p)$. Тогда

$$i_1'(t) = pI_1(p) - i_1(0) = pI_1(p), \quad i_2'(t) = pI_2(p) - i_2(0) = pI_2(p).$$

Кроме того

$$\int_0^t i_1(t) dt = \frac{I_1(p)}{p}, \quad \int_0^t i_2(t) dt = \frac{I_2(p)}{p}.$$

Применим к обоим частям каждого из уравнений системы (1) преобразование Лапласа. Получим операторную систему:

$$\begin{cases} R_1 I_1(p) + R_2 I_2(p) + LpI_2(p) = \frac{E_0}{p} \\ R_2 I_2(p) + LpI_2(p) + \frac{1}{C} \left(\frac{I_2(p)}{p} - \frac{I_1(p)}{p} \right) = 0. \end{cases}$$

Откуда имеем:

$$\begin{cases} R_1 I_1(p) + (Lp + R)I_2(p) = \frac{E_0}{p} \\ -I_1(p) + (LCp^2 + CR_2p + 1)I_2(p) = 0. \end{cases}$$

Из этой системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными $I_1(p)$ и $I_2(p)$ находим

$$I_1(p) = \frac{E_0(LCp^2 + R_2Cp + 1)}{p[LCR_1p^2 + (R_1R_2C + L)p + R_1 + R_2]},$$

$$I_2(p) = \frac{E_0}{p[LCR_1p^2 + (R_1R_2C + L)p + R_1 + R_2]}.$$

Известно, что сила тока $i(t)$, создающая в контуре колебательный процесс, равна

$$i(t) = C + e^{-\alpha t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t). \quad (2.11)$$

Следовательно изображение такого тока имеет вид

$$i(t) = I(p) = \frac{C}{p} + \frac{A(p + \alpha) + B\omega}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}. \quad (2.12)$$

Поэтому, если хотим чтобы токи $i_1(t)$ и $i_2(t)$ создавали в контуре колебательный процесс, т.е. имели вид (2.11) (или, что то же самое, их изображения $I_1(p)$ и $I_2(p)$ имели вид (2.12)), то необходимо, чтобы после разложения функций $I_1(p)$ и $I_2(p)$ на элементарные слагаемые дроби получились слагаемые того же вида, что и в сумме (2.12). Для этого необходимо и достаточно, чтобы квадратный трёхчлен

$$LCR_1p^2 + (R_1R_2C + L)p + R_1 + R_2, \quad (2.13)$$

имел вид $(p + \alpha)^2 + \omega^2$, т.е. чтобы у него не было действительных корней. Но известно, что необходимым и достаточным условием отсутствия у квадратного трёхчлена $ap^2 + bp + c$ действительных корней является условие $D < 0$, где $D = b^2 - 4ac$ - дискриминант трёхчлена. Следовательно, колебательный процесс в контуре возможен только тогда, когда дискриминант D квадратного трёхчлена отрицателен, т.е. если выполняется условие

$$(R_1R_2C + L)^2 - 4LCR_1(R_1 + R_2) < 0.$$

Задача 2.4. Контур подключён к постоянной ЭДС E_0 (рис. 2.7). При установившемся режиме включают рубильник K и накоротко замыкают сопротивление R_2 . Найти выражение переходного тока.

Решение. 1. Дифференциальное уравнение Кирхгофа до включения рубильника К имеет вид

$$L \frac{di(t)}{dt} + R \cdot i(t) = E_0 \quad (R = R_1 + R_2), \quad (2.14)$$

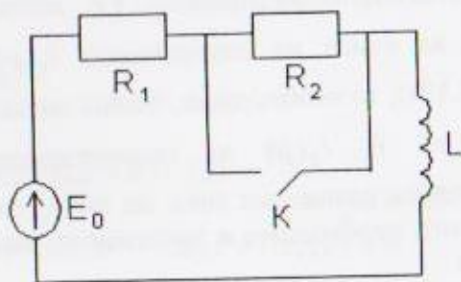


Рис. 2.7

Кроме того выполняется начальное условие

$$i(0) = 0. \quad (2.15)$$

Решим задачу Коши (2.14), (2.15) операционным методом. Пусть $i(t) = I(p)$. Тогда $i'(t) = p \cdot I(p) - i(0) = p \cdot I(p)$. Кроме того $E_0 = \frac{E_0}{p}$. Применяв к обеим частям уравнения (2.14) преобразование Лапласа, получим операторное уравнение

$$LpI(p) + RI(p) = \frac{E_0}{p}, \text{ т.е.}$$

$$(Lp + R)I(p) = \frac{E_0}{p},$$

откуда

$$I(p) = \frac{E_0}{p(Lp + R)} = \frac{E_0}{L} \cdot \frac{1}{p(p + \frac{R}{L})} = \frac{E_0}{L} \cdot \frac{L}{R} \cdot \frac{1}{p(p + \frac{R}{L})} = \frac{E_0}{R} \cdot \frac{(p + \frac{R}{L}) - p}{p(p + \frac{R}{L})} = \frac{E_0}{R} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{R}{L}} \right) = \frac{E_0}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

Установившийся ток в контуре до включения рубильника К есть i_0 , где

$$i_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E_0}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) = \frac{E_0}{R}.$$

2. Теперь, включаем рубильник К и считаем момент включения начальным. Дифференциальное уравнение Кирхгофа после замыкания рубильника К имеет вид

$$L \frac{di_1(t)}{dt} + R_1 i_1(t) = E_0. \quad (2.16)$$

(здесь i_1 - переходной ток).

Кроме того, выполняется начальное условие $i_1(0) = i_0$, т.е.

$$i_1(0) = \frac{E_0}{R}. \quad (2.17)$$

Решаем задачу Коши (2.16), (2.17) операционным методом.

Пусть $i_1(t) = I_1(p)$. Тогда $i_1'(t) = pI_1(p) - i_1(0) = pI_1(p) - \frac{E_0}{R}$.

Кроме того $E_0 = \frac{E_0}{p}$.

Применим к обоим частям уравнения (2.16) преобразование Лапласа, получим операторное уравнение

$$L(pI_1(p) - \frac{E_0}{R}) + R_1 I_1(p) = \frac{E_0}{R},$$

т.е.

$$(p + \frac{R_1}{L})I_1(p) = \frac{E_0}{Lp} + \frac{E_0}{R},$$

откуда

$$\begin{aligned} I_1(p) &= \frac{E_0}{L} \frac{1}{p(p + \frac{R_1}{L})} + \frac{E_0}{R} \frac{1}{p + \frac{R_1}{L}} = \frac{E_0}{L} \frac{L}{R_1} \frac{1}{p(p + \frac{R_1}{L})} + \frac{E_0}{R} \frac{1}{p + \frac{R_1}{L}} = \frac{E_0}{R_1} \frac{(p + \frac{R_1}{L}) - p}{p(p + \frac{R_1}{L})} + \\ &+ \frac{E_0}{R} \frac{1}{p + \frac{R_1}{L}} = \frac{E_0}{R_1} (\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{R_1}{L}}) + \frac{E_0}{R} \frac{1}{p + \frac{R_1}{L}} = \frac{E_0}{R_1} (1 - e^{-\frac{R_1}{L}t}) + \frac{E_0}{R} e^{-\frac{R_1}{L}t} = E_0 \left[1 - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} e^{-\frac{R_1}{L}t} \right] = \\ &= E_0 (1 - \frac{R - R_1}{RR_1} e^{-\frac{R_1}{L}t}) = E_0 (1 - \frac{R_2}{(R_1 + R_2)R_1} e^{-\frac{R_1}{L}t}) = i_1(t). \end{aligned}$$

В итоге переходной ток имеет вид:

$$i_1(t) = E_0 (1 - \frac{R_2}{(R_1 + R_2)R_1} e^{-\frac{R_1}{L}t}).$$

Задача 2.5. К источнику с постоянной ЭДС E_0 подключили цепь из двух индуктивно связанных контуров (рис. 2.8). Найти ток i в левом контуре в зависимости от времени t , если подключение производится при нулевых начальных условиях, причём $L_1 L_2 \neq M^2$, где M - коэффициент взаимной индуктивности контуров.

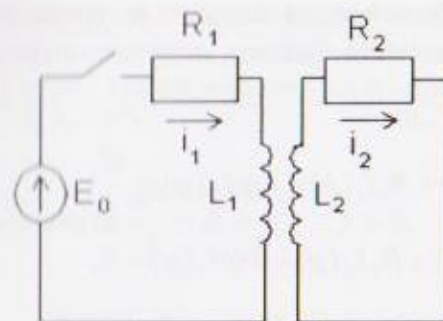


Рис. 2.8

Решение. В соответствии с законом Кирхгофа составим систему дифференциальных уравнений задачи

$$\begin{cases} L_1 i_1'(t) + R_1 i_1(t) + M \cdot i_2'(t) = E_0 \\ L_2 i_2'(t) + R_2 i_2(t) + M \cdot i_1'(t) = 0. \end{cases} \quad (2.18)$$

С начальными условиями

$$i_1(0) = 0, \quad i_2(0) = 0. \quad (2.19)$$

Здесь $i_1(t)$, $i_2(t)$ - токи соответственно в левом и правом контурах.

Решим задачу Коши (2.18), (2.19) операционным методом. При этом надо иметь в виду, что необходимо найти только $i_1(t)$. Пусть $i_1(t) = I_1(p)$, $i_2(t) = I_2(p)$. Тогда

$$i_1'(t) = pI_1(p) - i_1(0) = pI_1(p), \quad i_2'(t) = pI_2(p) - i_2(0) = pI_2(p).$$

Применив к обеим частям каждого из уравнений системы (2.18) преобразования Лапласа, получим операторную систему

$$\begin{cases} L_1 p I_1(p) + R_1 I_1(p) + M p I_2(p) = \frac{E_0}{p} \\ L_2 p I_2(p) + R_2 I_2(p) + M p I_1(p) = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (L_1 p + R_1) I_1(p) + M p I_2(p) = \frac{E_0}{p} \\ M p I_1(p) + (L_2 p + R_2) I_2(p) = 0. \end{cases}$$

Находим из второго уравнения этой системы выражение $I_2(p)$ через $I_1(p)$ и подставим это выражение в первое уравнение:

$$I_2(p) = -\frac{M p}{L_2 p + R_2} I_1(p) \Rightarrow (L_1 p + R_1 - \frac{M^2 p^2}{L_2 p + R_2}) I_1(p) = \frac{E_0}{p},$$

откуда

$$\begin{aligned} I_1(p) &= \frac{E_0}{p(L_1 p + R_1 - \frac{M^2 p^2}{L_2 p + R_2})} = \frac{E_0 L_2}{L_1 L_2 - M^2} \frac{p + \frac{R_2}{L_2}}{p(p^2 + \frac{L_1 R_2 + L_2 R_1}{L_1 L_2 - M^2} p + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2 - M^2})} = \\ &= \frac{E_0 L_2}{L_1 L_2 - M^2} \frac{p + \frac{R_2}{L_2}}{p(p^2 + \alpha p + \beta)}. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{L_1 R_2 + L_2 R_1}{L_1 L_2 - M^2}, \quad \beta = \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2 - M^2} = \frac{(L_1 R_2 + L_2 R_1)^2 - 4 R_1 R_2 (L_1 L_2 - M^2)}{4(L_1 L_2 - M^2)^2} = \\ &= \frac{L_1^2 R_1^2 + 2 L_1 L_2 R_1 R_2 + L_2^2 R_2^2 - 4 L_1 L_2 R_1 R_2 + 4 R_1 R_2 M^2}{4(L_1 L_2 - M^2)^2} = \frac{(L_1 R_2 - L_2 R_1)^2 + 4 R_1 R_2 M^2}{4(L_1 L_2 - M^2)^2} > 0, \end{aligned}$$

то можно обозначить $\frac{\alpha^2}{4} - \beta = \gamma^2, \quad \gamma > 0,$

$$p^2 + \alpha p + \beta = (p + \frac{\alpha}{2})^2 + \beta - \frac{\alpha^2}{4} = (p + \frac{\alpha}{2})^2 - \gamma^2 = (p + \frac{\alpha}{2} + \gamma)(p + \frac{\alpha}{2} - \gamma),$$

и поэтому

$$I_1(p) = \frac{E_0 L_2}{L_1 L_2 - M^2} \frac{p + \frac{R_2}{L_2}}{p(p + \frac{\alpha}{2} + \gamma)(p + \frac{\alpha}{2} - \gamma)}.$$

Разложим $I_1(p)$ на элементарные слагаемые дробей:

$$I_1(p) = \frac{E_0 L_2}{L_1 L_2 - M^2} \left(\frac{A}{p} + \frac{B}{p + \frac{\alpha}{2} + \gamma} + \frac{C}{p + \frac{\alpha}{2} - \gamma} \right), \quad (2.20)$$

где A, B, C - неопределённые коэффициенты. Находим их, полагая в равенстве

$$p + \frac{R_2}{L_2} = A(p + \frac{\alpha}{2} + \gamma)(p + \frac{\alpha}{2} - \gamma) + B p(p + \frac{\alpha}{2} - \gamma) + C p(p + \frac{\alpha}{2} + \gamma)$$

последовательно $p = 0, \quad p = -\frac{\alpha}{2} - \gamma, \quad p = -\frac{\alpha}{2} + \gamma$; полу-

чим:

$$A = \frac{R_2}{\beta L_2}, \quad B = \frac{\frac{R_2}{L_2} - \frac{\alpha}{2} - \gamma}{2\gamma(\frac{\alpha}{2} + \gamma)}, \quad C = \frac{\frac{R_2}{L_2} - \frac{\alpha}{2} + \gamma}{2\gamma(-\frac{\alpha}{2} + \gamma)}. \quad (2.21)$$

Таким образом, $I_1(p)$ определяется формулой (2.20), в которой A , B и C рассчитываются по формуле (2.21). Теперь находим оригинал функции $I_1(p)$, т.е. находим $i_1(t)$. Из (2.20) получим:

$$I_1(p) = i_1(t) = \frac{E_0 L_2}{L_1 L_2 - M^2} (A + B e^{-\left(\frac{\alpha}{2} + \gamma\right)t} + C e^{-\left(-\frac{\alpha}{2} + \gamma\right)t}),$$

где постоянные α, γ, A, B, C определены раньше.

3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

3.1. Этапы вычислительного эксперимента

Наиболее эффективное применение вычислительная техника нашла при применении трудоемких расчетов в научных и инженерных исследованиях. Роль человека и машины можно уяснить, если процесс решения задачи разбить на следующие этапы.

Постановка задачи. Этот этап заключается в физической постановке задачи и определении конечных целей решения.

Построение математической модели (математическая формулировка задачи). Модель должна адекватно описывать основные законы физического процесса.

Разработка численного метода. Поскольку ЭВМ может выполнять лишь простейшие операции, она не понимает постановки задачи, даже в математической формулировке. Для решения задачи должен быть найден численный метод, позволяющий свести задачу к некоторому вычислительному алгоритму. Инженеру (специалисту-прикладнику) для решения задачи, как правило, необходимо из имеющегося арсенала методов выбрать тот, который наиболее пригоден в данном конкретном случае.

Разработка алгоритма и построение блок-схемы. Вычислительный процесс записывается в виде последовательности элементарных арифметических и логических операций, приводящей к конечному результату и называемой *алгоритмом* решения задачи.

Программирование. Алгоритм решения задачи записывается на понятном машине языке в виде точно определенной последовательности операций – программы для ЭВМ.

Отладка программы. Отладка включает контроль

программы, диагностику ошибок и их исправление. Программа испытывается на решении контрольных (тестовых) задач для получения уверенности в достоверности результатов.

Проведение расчетов. На этом этапе готовятся исходные данные для расчетов и проводится счет по отлаженной программе.

Анализ полученных результатов. Результаты расчетов тщательно анализируются, оформляется научно-техническая документация.

Для решения математических задач используются следующие основные группы методов: графические, аналитические и численные.

Графические методы позволяют в ряде случаев оценить порядок искомой величины. При этом решение находится с помощью геометрических построений. Например, для нахождения корней уравнения $f(x) = 0$ строится график функции $y = f(x)$, точки пересечения которого с осью абсцисс и будут искомыми корнями.

При использовании аналитических методов решение задачи удастся выразить с помощью формул. В частности, если математическая задача состоит в решении простейших алгебраических или трансцендентных уравнений, простейших дифференциальных уравнений и т.п., использование известных из курса математики формул сразу приводит к цели. К сожалению, на практике это слишком редкие случаи.

Основным инструментом для решения сложных математических задач в настоящее время являются численные методы, позволяющие свести решение задачи к выполнению конечного числа арифметических действий над числами. При этом результаты получаются в виде числовых значений.

Численный метод должен обладать одним важным

свойством — не вносить в вычислительный процесс значительных погрешностей.

3.1. Элементы теории погрешностей

Абсолютная погрешность некоторого числа равна разности между его истинным значением x и приближенным значением a , полученным в результате измерения или вычисления:

$$\Delta x = |x - a|. \quad (3.1)$$

Относительная погрешность — это отношение абсолютной погрешности к приближенному значению числа:

$$\delta x = \Delta x / |a|. \quad (3.2)$$

Истинное значение величины x обычно неизвестно. Поэтому в качестве абсолютной погрешности принимается предельная погрешность Δa , являющаяся верхней оценкой абсолютной погрешности, т.е. $\Delta x \leq \Delta a$. В дальнейшем значение Δa принимается в качестве абсолютной погрешности приближенного числа a . В этом случае истинное значение x находится в интервале $(a - \Delta a, a + \Delta a)$. Для приближенного числа, полученного в результате округления, абсолютная погрешность Δa принимается равной половине единицы последнего разряда числа. Предельное значение относительной погрешности — это отношение предельной абсолютной погрешности к абсолютной величине приближенного числа:

$$\delta a = \Delta a / |a|. \quad (3.3)$$

При сложении или вычитании чисел их абсолютные

погрешности складываются. При умножении или делении чисел их относительные погрешности складываются. При возведении в степень приближенного числа его относительная погрешность умножается на показатель степени. Для случая двух приближенных чисел a и b эти правила можно записать в виде формул:

$$\begin{aligned}\Delta(a \pm b) &= \Delta a + \Delta b, & \delta(a \cdot b) &= \delta a + \delta b, \\ \delta(a/b) &= \delta a + \delta b, & \delta(a^k) &= k \cdot \delta a.\end{aligned}\quad (3.4)$$

Запишем выражение для относительной погрешности в случае вычитания близких чисел:

$$\delta(a-b) = \frac{\Delta(a-b)}{|a-b|} = \frac{\Delta a + \Delta b}{|a-b|}. \quad (3.5)$$

При $a \approx b$ эта погрешность может быть сколь угодно большой.

Пример. Пусть $a = 2520$, $b = 2518$. Тогда абсолютные погрешности исходных данных $\Delta a = \Delta b = 0,5$ и относительные погрешности $\delta a \approx \delta b = 0,5/2518 \approx 0,0002$ (0,02 %). Относительная погрешность разности равна

$$\delta(a-b) = \frac{0,5+0,5}{2} = 0,5 \text{ (50 \%)}.$$

При малых погрешностях в исходных данных мы получили весьма неточный результат. Поэтому при организации вычислительных алгоритмов следует избегать вычитания близких чисел.

Если числа a и b близки настолько, что $|a+b| \ll |a-b|$, то не исключена полная или почти полная

потеря точности. Когда это происходит, говорят о том, что произошла *катастрофическая потеря точности*.

Из рассмотренных правил следует, что при сложении или вычитании приближенных чисел желательно, чтобы они обладали одинаковыми абсолютными погрешностями, т.е. одинаковым числом разрядов после десятичной точки.

3.3. Источники погрешностей

Получаемое на ЭВМ решение задачи почти всегда содержит погрешность, т.е. является приближенным. Рассмотрим источники погрешностей, возникающих на различных этапах решения задачи.

1. Математическая модель является лишь приближенным описанием реального процесса. Характеристики процесса, вычисленные в рамках принятой модели, заведомо отличаются от истинных характеристик, причем их погрешность зависит от степени адекватности модели реальному процессу. Модель может прекрасно работать в одних условиях и быть совершенно неприемлемой в других, поэтому важно правильно учитывать область ее применимости.

2. Исходные данные, как правило, содержат погрешности, поскольку они являются либо результатом экспериментов (измерений) либо результатом решения некоторых вспомогательных задач.

Погрешности, соответствующие первым двум причинам, называются *неустраняемыми погрешностями*, т.к. они не могут быть уменьшены вычислителем ни до начала решения задачи, ни в процессе ее решения.

3. Применяемый для решения задачи численный метод также является источником погрешностей. Это связано, например, с заменой интеграла суммой, усечением рядов,

интерполированием табличных данных и т.п. Как правило, погрешность численного метода регулируема, т.е. она может быть уменьшена до любого разумного значения путем изменения некоторого параметра (например, шага интегрирования, числа членов усеченного ряда и т.п.). Погрешность метода обычно стараются довести до величины, в несколько раз меньшей погрешности исходных данных.

4. При вводе исходных данных в ЭВМ, выполнении арифметических операций и выводе результатов на печать неизбежны погрешности округлений, связанные с ограниченностью разрядной сетки машины. Желательно, чтобы величина вычислительной погрешности была хотя бы на порядок меньше величины погрешности метода.

3.4. Устойчивость. Корректность. Сходимость

Устойчивость. Пусть в результате решения задачи по исходному значению величины x находится значение искомой величины y . Если исходная величина имеет абсолютную погрешность Δx , то решение имеет погрешность Δy . Задача называется *устойчивой* по исходному параметру x , если решение y зависит от него непрерывным образом, т.е. малое приращение исходной величины Δx приводит к малому приращению искомой величины Δy . Другими словами, малые погрешности в исходных данных приводят к малым погрешностям в результате расчетов. Для устойчивой вычислительной задачи ее решение теоретически можно найти со сколь угодно высокой точностью ε , если обеспечена достаточно высокая точность δ входных данных.

Неустойчивость задачи означает, что даже незначительные погрешности в исходных данных приводят к большим погрешностям в решении или вовсе к неверному результату.

Рассмотрим классический пример неустойчивой за-

дачи, принадлежащий Дж. Уилкинсону. Пусть требуется найти корни многочлена

$$P(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-20) = x^{20} - 210x^{19} + \dots$$

Очевидно, что корнями этого многочлена являются $x_1 = 1, x_2 = 2, \dots, x_{20} = 20$.

Предположим, что один из коэффициентов многочлена вычислен с некоторой малой погрешностью. Например, коэффициент -210 при x^{19} увеличим на 2^{-23} (около 10^{-7}). В результате вычислений получим существенно другие значения корней. Приведем эти значения, округленные до трех знаков:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1.00, \quad x_2 = 2.00, \quad x_3 = 3.00, \quad x_4 = 4.00, \quad x_5 = 5.00, \\ x_6 &= 6.00, \quad x_7 = 7.00, \quad x_8 = 8.01, \quad x_9 = 8.92, \quad x_{10,11} = 10.1 \pm 0.644i, \\ x_{12,13} &= 11.8 \pm 1.65i, \quad x_{14,15} = 14.0 \pm 2.52i, \quad x_{16,17} = 16.7 \pm 2.81i, \\ x_{18,19} &= 19.5 \pm 1.94i, \quad x_{20} = 20.8. \end{aligned}$$

Таким образом, изменение коэффициента -210 при x^{19} на $-210 \cdot 10^{-7}$ привело к тому, что половина корней стали комплексными и имеют относительные погрешности от 6 до 18 %. Причина такого явления – неустойчивость самой задачи: вычисления выполнялись очень точно, а погрешности округлений не могли привести к таким последствиям.

Следует обратить внимание на то, что задача вычисления корней многочленов высокой степени часто оказывается неустойчивой.

Корректность. Вычислительная задача называется *корректной* (по Адамару), если для любых значений исходных данных из некоторого класса ее решение существует, единственно и устойчиво по исходным данным. Если

хотя бы одно из этих условий не выполнено, задача называется *некорректной*.

Рассмотренная выше неустойчивая задача является некорректно поставленной. Применять для решения таких задач численные методы, как правило, нецелесообразно, т.к. возникающие в расчетах погрешности округления будут сильно возрастать в ходе вычислений, что приведет к значительному искажению результатов.

В настоящее время развиты методы решения многих классов некорректных задач. Это так называемые *методы регуляризации*, важнейшая роль в создании которых принадлежит российским математикам, в первую очередь А.Н. Тихонову. Эти методы основываются на замене исходной задачи корректно поставленной задачей. Последняя содержит некоторый параметр, при стремлении которого к нулю решение этой задачи переходит в решение исходной задачи.

Иногда при решении корректно поставленной задачи может оказаться неустойчивым метод ее решения. Численный метод называется *корректным*, если численное решение существует и единственно при любых значениях исходных данных и если это решение устойчиво относительно погрешностей исходных данных.

Обусловленность вычислительной задачи. Под *обусловленностью* вычислительной задачи понимают чувствительность ее решения к малым погрешностям входных данных. Задачу называют *хорошо обусловленной*, если малым погрешностям входных данных отвечают малые погрешности решения, и *плохо обусловленной*, если возможны сильные изменения решения.

Введем количественную меру степени обусловленности вычислительной задачи — *число обусловленности*. Эту величину можно рассматривать как коэффициент возможного возрастания погрешностей в решении по отноше-

нию к вызвавшим их погрешностям входных данных.

Пусть абсолютные погрешности входных данных x и решения y связаны неравенством $\Delta y \leq \nu_1 \Delta x$, тогда величину ν_1 называют *абсолютным числом обусловленности*. Если установлено неравенство между относительными погрешностями входных данных и решения $\delta y \leq \nu_2 \delta x$, то величину ν_2 называют *относительным числом обусловленности*.

Для хорошо обусловленной задачи $\nu \leq 1$. Для плохо обусловленной задачи $\nu \gg 1$. В некотором смысле неустойчивость задачи — это крайнее проявление плохой обусловленности, отвечающее значению $\nu = \infty$. Рассмотренная выше задача вычитания приближенных чисел одного знака и пример Уилкинсона — примеры плохо обусловленных задач.

Сходимость. *Сходимость* численного метода означает близость полученного численного решения задачи к истинному решению.

Рассмотрим понятие сходимости итерационного процесса. Этот процесс состоит в том, что для решения некоторой задачи и нахождения искомого значения определяемого параметра (например, корня нелинейного уравнения) строится метод последовательных приближений. В результате многократного повторения этого процесса (*итераций*) получаем последовательность значений $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$. Эта последовательность *сходится* к точному решению $x = a$, если при неограниченном возрастании числа итераций предел этой последовательности существует и равен a : $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Методы дискретизации заключаются в замене задачи с непрерывными параметрами на задачу, в которой значения функции вычисляются в фиксированных точках. Это относится, в частности, к численному интегрированию.

решению дифференциальных уравнений и т.п. Здесь под сходимостью метода понимается стремление значений решения дискретной задачи к соответствующим значениям решения исходной задачи при стремлении к нулю параметра дискретизации (например, шага интегрирования).

Таким образом, для получения решения задачи с необходимой точностью ее постановка должна быть корректной, а используемый численный метод должен обладать устойчивостью и сходимостью.

4. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

4.1. Методы решения уравнений

Пусть дано алгебраическое или трансцендентное уравнение

$$f(x) = 0, \quad (4.1)$$

где $f(x)$ – некоторая непрерывная функция. Решить уравнение (4.1) – значит найти его корни. *Корнем уравнения* называется такое значение $x = a$, при котором функция $f(x)$ обращается в ноль, т.е. $f(a) = 0$.

Методы решения нелинейных уравнений делятся на прямые и итерационные. *Прямые методы* позволяют записать корни уравнения в виде некоторого конечного соотношения (формулы). Из школьного курса алгебры известны такие методы для решения простейших алгебраических, тригонометрических, логарифмических и показательных уравнений. Однако большинство встречающихся на практике уравнений не удастся решить такими простыми методами. Для их решения используются *итерационные методы*, т.е. методы последовательных приближений.

Нахождение корней уравнения итерационным методом осуществляется в два этапа:

1. Этап локализации, или отделения корней, т.е. нахождения на оси Ox промежутков, в которых содержится только один корень уравнения.

2. Этап итерационного уточнения корня с требуемой точностью.

Начальное приближение корня может быть найдено различными способами: из физических соображений, из решения аналогичной задачи при других исходных данных, с помощью графических методов.

Для нахождения отрезка локализации корня может

быть использована следующая теорема из математического анализа. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на его концах принимает значения разных знаков ($f(a) \cdot f(b) < 0$), то на отрезке $[a, b]$ найдется хотя бы одна точка c , в которой $f(c) = 0$, т.е. c – корень уравнения $f(x) = 0$ (см. рис. 4.1 а, б).

Геометрически это означает, что график функции, расположенный по разные стороны оси Ox , пересекает эту ось по крайней мере в одной точке

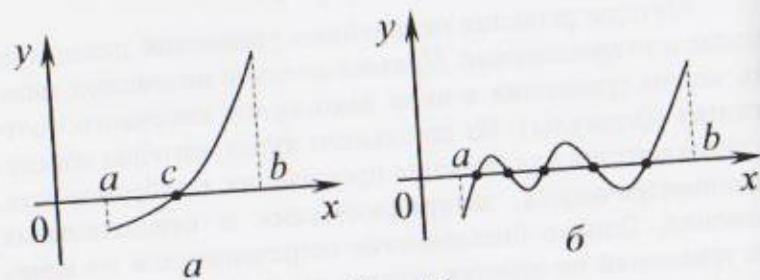


Рис. 4.1

Для того чтобы на отрезке $[a, b]$ был только один корень, достаточно постоянства знака производной $f'(x)$ на этом отрезке.

Если на отрезке $[a, b]$ существует только один корень, то в качестве начального приближения корня можно взять середину этого отрезка, т.е. $x_0 = \frac{a+b}{2}$.

Перейдем теперь ко второму этапу: к приближенному решению уравнений.

4.2. Метод деления отрезка пополам

Метод деления отрезка пополам (метод половинного деления, метод бисекции) – один из простейших методов нахождения корней нелинейных уравнений.

Допустим, что нам удалось найти отрезок $[a, b]$, на котором расположено искомое значение корня $x = c$, т.е. $a < c < b$. В качестве начального приближения корня примем середину этого отрезка:

$$x_0 = \frac{a+b}{2}. \quad (4.2)$$

Если $f(x_0) = 0$, то x_0 является корнем уравнения. Если $f(x_0) \neq 0$, тогда исследуем значения функции $f(x)$ на концах отрезков $[a, x_0]$ и $[x_0, b]$. Тот отрезок, на концах которого функция $f(x)$ принимает значения разных знаков, содержит искомый корень; поэтому его принимаем в качестве нового отрезка локализации корня. В качестве первой итерации корня x_1 принимаем середину этого нового отрезка и т.д. (рис. 4.2). Таким образом, после каждой итерации отрезок, на котором расположен корень, уменьшается вдвое и после n итераций он сокращается в 2^n раз.

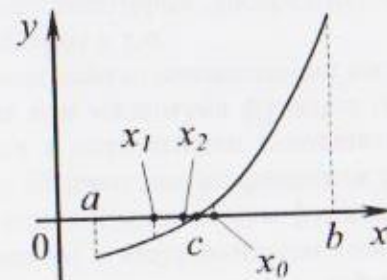


Рис. 4.2. Метод деления отрезка пополам

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока значение функции $f(x)$ после n -й итерации не станет меньше по модулю некоторого заданного малого числа ε , т.е. $|f(x_n)| < \varepsilon$. В качестве другого критерия можно использовать длину получаемых отрезков: счет прекращается, если она становится меньше допустимой погрешности, т.е. $b - a < \varepsilon$.

Достоинства метода: метод очень прост, надежен, устойчив к ошибкам округления, сходится к корню для любых непрерывных функций. Основной недостаток: метод очень медленно сходится, т.е. необходимо использовать большое число итераций для достижения заданной точности.

5. МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Под *оптимизацией* понимают процесс выбора наилучшего варианта из всех возможных. В процессе решения инженерных задач часто бывает необходимо найти оптимальные значения некоторых параметров, которые называются *проектными параметрами* (например, значения линейных размеров объекта, массы, температуры и т.д.). Выбор оптимального решения проводится с помощью некоторой функции, зависящей от проектных параметров. Эта функция называется *целевой функцией*:

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (5.1)$$

В процессе решения задачи оптимизации необходимо найти такие значения проектных параметров, при которых целевая функция имеет минимум (или максимум). Таким образом, целевая функция – это глобальный критерий оптимальности в математических моделях, с помощью которых описываются инженерные задачи. Примерами целевых функций являются прочность или масса конструкции, мощность установки, объем выпуска продукции, прибыли и т.п. Отметим, что целевая функция не всегда может быть представлена в виде формулы, иногда она может принимать только некоторые дискретные значения, задаваться в виде таблицы и т.п.

Безусловная задача оптимизации состоит в отыскании максимума или минимума функции (9.1), зависящей от n переменных и определении соответствующих значений аргументов. Обычно рассматриваются задачи минимизации. Если нужно найти максимум функции u , то ее заменяют на функцию $-u$ и ищут минимум этой функции.

При формулировке *условных задач оптимизации* задаются некоторые условия (ограничения). Ограничения-

равенства выражают зависимость между проектными параметрами, которые отражают законы природы, наличие ресурсов, финансовые требования и т.п. Их можно записать в виде:

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

В ряде случаев можно выразить одни проектные параметры через другие и исключить некоторые параметры из процесса оптимизации. Аналогично могут вводиться *ограничения-неравенства*:

$$\begin{cases} a_1 \leq \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_1 \\ a_2 \leq \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_n \leq \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_n. \end{cases} \quad (5.3)$$

При наличии ограничений оптимальное решение здесь может соответствовать либо локальному экстремуму внутри области проектирования, либо значению целевой функции на границе области. Если ограничения отсутствуют, то ищется оптимальное решение на всей области проектирования, т.е. глобальный экстремум.

5.1. Одномерная оптимизация

Одномерная задача оптимизации формулируется следующим образом. Требуется найти наименьшее (или

наибольшее) значение целевой функции $y = f(x)$, заданной на множестве σ , и определить значение проектного параметра $x \in \sigma$, при котором целевая функция принимает экстремальное значение.

Если целевая функция задана в виде аналитической зависимости $y = f(x)$, дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и может быть найдено явное выражение для ее производной $f'(x)$, то нахождение экстремумов таких функций можно проводить с помощью известных из курса высшей математики методов дифференциального исчисления. Для определения наименьшего или наибольшего значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ нужно вычислить ее значение во всех критических точках первого рода данного отрезка (в тех точках, где $f'(x) = 0$ или не существует) и в его граничных точках и сравнить полученные значения.

Пример. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = x^3/3 - x^2$ на отрезке $[1, 3]$.

Вычислим производную $f'(x) = x^2 - 2x$. Приравняв ее к нулю, найдем критические точки первого рода: $x^2 - 2x = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

Точка $x = 0$ лежит вне рассматриваемого отрезка, поэтому для анализа оставляем три точки: $a = 1$, $x_2 = 2$, $b = 3$. Найдем значения функции в этих точках: $f(1) = -2/3$, $f(2) = -4/3$, $f(3) = 0$.

Сравнивая полученные величины, находим, что наименьшего значения функция $f(x)$ достигает в точке $x = 2$, а наибольшего значения — в точке $x = 3$, т.е. $f_{\min} = f(2) = -4/3$, $f_{\max} = f(3) = 0$.

В других случаях, когда целевая функция задана в

табличном виде или может быть вычислена лишь при некоторых дискретных значениях аргумента, используются численные методы. Рассмотрим некоторые из них.

Рассмотрим численные *методы поиска* на примере нахождения минимума функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Будем предполагать, что целевая функция на данном отрезке имеет только один минимум. Процесс решения задачи методом поиска состоит в последовательном сужении интервала изменения проектного параметра, называемого *интервалом неопределенности*.

Наиболее простой из методов поиска – *метод перебора*. Он состоит в делении интервала неопределенности на некоторое число равных частей с последующим вычислением значений целевой функции в точках разбиения. Пусть n – число элементарных отрезков, $h = (b - a)/n$ – шаг разбиения. Найдем значения целевой функции в точках $x_k = a + kh$ ($k = 0, 1, \dots, n$). Сравнивая полученные значения $y_k = f(x_k)$, найдем среди них наименьшее. С увеличением числа точек разбиения погрешность стремится к нулю. В этом методе основная трудность состоит в выборе n и оценке погрешности.

Рассмотрим более экономичный способ уточнения оптимального параметра. Пусть среди всех значений функции $y = f(x)$, вычисленных в узлах $x_k = a + kh$, наименьшим оказалось y_i . Это означает, что оптимальное значение проектного параметра находится на отрезке $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ (рис. 5.1).

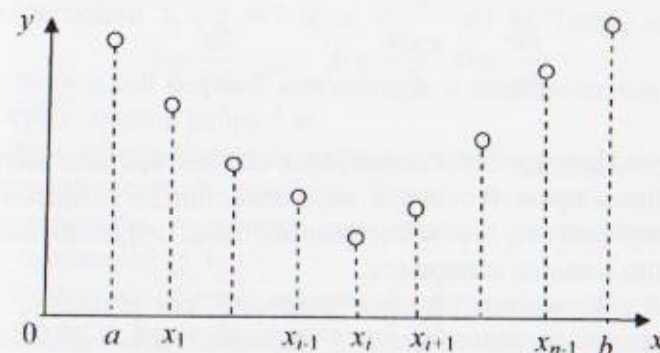


Рис. 5.1. Геометрическая иллюстрация метода поиска

Если длина интервала неопределенности больше заданной погрешности, т.е. $x_{i+1} - x_{i-1} < \varepsilon$, то его можно снова уменьшить путем нового разбиения. Получится интервал, равный двум длинам нового шага разбиения и т.д. Процесс оптимизации продолжается до достижения заданной длины интервала неопределенности.

Существуют и другие методы поиска оптимальных решений с разными способами выбора узлов и сужения интервала неопределенности: метод деления отрезка пополам, метод золотого сечения и др.

5.2. Многомерная оптимизация

В большинстве реальных задач оптимизации, представляющих практический интерес, целевая функция зависит от многих проектных параметров.

Минимум дифференцируемой функции многих переменных $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можно найти, исследуя ее значения в критических точках, которые определяются из решения системы уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \quad (5.4)$$

Пример. Пусть требуется спроектировать контейнер в форме прямоугольного параллелепипеда объемом $V = 1 \text{ м}^3$, причем на его изготовление надо израсходовать как можно меньше материала.

Последнее условие означает, что площадь полной поверхности контейнера S должна быть минимальной. Пусть x_1, x_2, x_3 — длины ребер контейнера. Тогда задача сводится к минимизации функции

$$S = 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3).$$

Эта функция является целевой, а условие $V = 1$ — ограничением-равенством, позволяющим исключить один параметр:

$$V = x_1x_2x_3 = 1, \quad x_3 = \frac{1}{x_1x_2}, \quad S = 2\left(x_1x_2 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right).$$

Задача свелась к минимизации целевой функции S .

В соответствии с (5.4) получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial x_1} = 2\left(x_2 - \frac{1}{x_1^2}\right) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial x_2} = 2\left(x_1 - \frac{1}{x_2^2}\right) = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим $x_1 = x_2 = 1 \text{ м}$, $x_3 = \frac{1}{x_1x_2} = 1 \text{ м}$. Таким образом, оптимальной формой контейнера в данном случае является куб с длиной ребра 1 м.

Этот метод можно использовать только для дифференцируемой целевой функции. Однако и в этом случае могут возникнуть трудности при решении системы нелинейных уравнений (5.4).

Во многих случаях целевая функция не может быть записана в виде формулы, а имеется лишь возможность определения ее значений в произвольных точках рассматриваемой области с помощью некоторого вычислительного алгоритма или путем физических измерений.

Для решения подобной задачи можно ввести дискретное множество точек путем разбиения интервалов изменения параметров $x_1, x_2, \dots, x_n$ на части с шагами $h_1, h_2, \dots, h_n$. В этих узлах можно вычислить значения целевой функции и среди этих значений найти наименьшее. Однако в многомерных задачах оптимизации этот метод потребовал бы слишком большого объема вычислений. Следовательно, методы перебора для решения многомерных задач оптимизации неэффективны. Необходимы специальные численные методы, основанные на целенаправленном поиске. Рассмотрим некоторые из них.

5.2.1. Метод покоординатного спуска

Пусть требуется найти наименьшее значение целевой функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. В качестве начального приближения выберем в n -мерном пространстве некоторую точку $\bar{x}^{(0)}$ с координатами $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$. Зафиксируем все координаты, кроме первой. Тогда $u = f(x_1, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ есть

функция одной переменной x_1 . Решая одномерную задачу оптимизации для этой функции, от точки $\bar{x}^{(0)}$ перейдем к точке $\bar{x}^{(1)}$ с координатами $x_1^{(1)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$. В этой точке функция u принимает наименьшее значение по координате x_1 при фиксированных остальных координатах. В этом состоит первый шаг процесса оптимизации.

Зафиксируем теперь все координаты, кроме x_2 , и рассмотрим функцию этой переменной $u = f(x_1^{(1)}, x_2, x_3^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$. Снова решая одномерную задачу оптимизации, найдем наименьшее значение целевой функции $x_2^{(1)}$ в точке $\bar{x}^{(2)}$ с координатами $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$. Аналогично проводится спуск по всем остальным координатам $x_3, x_4, \dots, x_n$. Затем вся процедура повторяется от x_1 до x_n и т.д. В результате получается последовательность точек $\bar{x}^{(0)}, \bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \dots$, в которых значения целевой функции составляют монотонно убывающую последовательность:

$$f(\bar{x}^{(0)}) \geq f(\bar{x}^{(1)}) \geq f(\bar{x}^{(2)}) \geq \dots \quad (5.5)$$

На любом k -м шаге этот процесс можно прервать, и тогда значение $f(\bar{x}^{(k)})$ принимается в качестве наименьшего значения целевой функции в рассматриваемой области.

Метод покоординатного спуска несложен и легко программируется на ЭВМ, но обладает очень медленной сходимостью. Поэтому его используют в качестве первой попытки при нахождении минимума.

5.2.2. Метод градиентного спуска

В природе часто встречаются явления, сходные с решением задачи минимизации, например, стекание воды с берега котлована на дно. Для простоты будем считать, что берега котлована гладкие и не содержат локальных углублений или выступов. Тогда вода стремится вниз в направлении наибольшей крутизны берега в каждой точке.

Итак, направление наискорейшего спуска соответствует направлению наибольшего убывания функции. Направление наибольшего возрастания функции двух переменных характеризуется ее градиентом:

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j}. \quad (5.6)$$

Следовательно, направление, противоположное градиентному, $(-\text{grad } u)$ и укажет направление наибольшего убывания функции. Методы, основанные на выборе пути оптимизации с помощью градиента, называются градиентными.

Идея метода градиентного спуска состоит в следующем. Выберем некоторую начальную точку $\bar{x}^{(0)}$ и вычислим в ней градиент целевой функции. Сделаем шаг в направлении, обратном направлению градиента. В результате приходим в точку, значение функции в которой меньше первоначального:

$$\bar{x}^{(1)} = \bar{x}^{(0)} - \alpha_0 \text{grad } u(\bar{x}^{(0)}). \quad (5.7)$$

Если значение функции не изменилось или возросло, то нужно уменьшить величину шага α . В новой точке $\bar{x}^{(1)}$

процедура повторяется: вычисляем градиент и делаем шаг в обратном к нему направлении и т.д. В результате получаем следующий итерационный процесс:

$$\vec{x}^{(n+1)} = \vec{x}^{(n)} - \alpha_n \text{grad } u(\vec{x}^{(n)}). \quad (5.8)$$

Существуют различные способы выбора шага α_n , каждый из которых задает определенный вариант градиентного метода.

Итерационный процесс (5.8) продолжается до тех пор, пока движение из полученной точки с любым шагом не приведет к возрастанию значения целевой функции. Если минимум функции достигается в рассматриваемой области, то в точке минимума градиент равен нулю, что также может служить критерием окончания процесса оптимизации.

Если целевая функция зависит от n переменных, т.е. $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то ее градиент имеет вид:

$$\text{grad } u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right\}. \quad (5.9)$$

Формулы для частных производных можно получить в явном виде, только если целевая функция задана аналитически. В противном случае эти производные находят численно:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \approx \frac{1}{\Delta x_i} [f(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)]. \quad (5.10)$$

Градиентный метод сходится достаточно быстро, если для минимизируемой функции поверхности уровня

близки к сферам. Если поверхности уровня сильно вытянуты в некоторых направлениях, то градиентный метод сходится очень медленно. В двумерном случае рельеф соответствующей поверхности $u = f(x_1, x_2)$ напоминает рельеф местности с оврагом. Поэтому такие функции принято называть *овражными*.

Если начальная точка $\vec{x}^{(0)}$ попадает на склон оврага, то направление градиентного спуска оказывается почти перпендикулярным дну оврага, и очередное приближение $\vec{x}^{(1)}$ попадает на противоположный склон оврага. Следующий шаг возвращает приближение $\vec{x}^{(2)}$ на первоначальный склон оврага.

Для ускорения сходимости градиентного метода при минимизации овражных функций разработан ряд специальных методов. Один из них состоит в том, что из двух близких начальных точек совершают градиентный спуск на дно оврага. Через найденные точки $\vec{x}^{(0)}$ и $\vec{x}^{(1)}$ проводят прямую, вдоль которой совершают большой "овражный" шаг. Из найденной таким образом точки снова делают один шаг градиентного спуска в точку $\vec{x}^{(2)}$. Затем совершают второй "овражный" шаг вдоль прямой, соединяющей точки $\vec{x}^{(1)}$ и $\vec{x}^{(2)}$ и т.д. В результате движения вдоль дна оврага к точке минимума существенно ускоряется.

5.2.3. Метод наискорейшего спуска

При использовании градиентного метода основной объем вычислений приходится на вычисление градиента целевой функции в каждой точке траектории. Поэтому целесообразно уменьшить количество таких точек без ущерба для самого решения. Это достигается в некоторых методах, являющихся модификациями градиентного метода. Одним из них является *метод наискорейшего спуска*.

Этот метод характеризуется тем, что после определения в начальной точке направления, противоположного градиенту целевой функции, в этом направлении делают не один шаг, а двигаются до тех пор, пока целевая функция убывает, достигая таким образом минимума в некоторой точке. В этой точке снова вычисляют градиент целевой функции, тем самым определяют новое направление спуска и ищут новую точку минимума целевой функции и т.д. В этом методе спуск происходит гораздо более крупными шагами, и градиент функции вычисляется в меньшем числе точек.

На рис. 5.2 изображена геометрическая иллюстрация этого метода на примере минимизации функции двух переменных.

На каждой итерации выбор шага α_n предполагает численное решение задачи одномерной минимизации, как и в случае покоординатного спуска. Разница состоит в том, что здесь направление одномерной минимизации определяется градиентом целевой функции, тогда как покоординатный спуск проводится на каждом шаге вдоль одного из координатных направлений.

Существуют и другие численные методы многомерной минимизации: метод Ньютона, метод сопряженных градиентов и др.

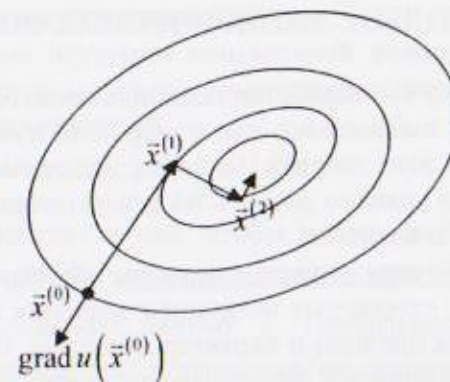


Рис. 5.2. Геометрическая иллюстрация метода наискорейшего спуска на примере минимизации функции двух переменных

6. ПОДБОР ЭМПИРИЧЕСКИХ ФОРМУЛ

В случае обработки опытных данных, полученных в результате наблюдений или измерений, нужно иметь в виду ошибки этих данных. Ошибки экспериментальных данных можно условно разбить на три категории по их происхождению и величине.

1. Систематические ошибки обычно дают отклонение в одну сторону от истинного значения измеряемой величины. Их причина и характер известны. Они могут быть вызваны условиями эксперимента, дефектом измерительного прибора, его плохой регулировкой и т.д. Эти ошибки можно устранить наладкой аппаратуры или введением соответствующих поправок.

2. Случайные ошибки определяются большим числом факторов, которые не могут быть устранены либо достаточно точно учтены при измерениях или при обработке результатов. Они имеют случайный характер, дают отклонение от средней величины в ту и другую сторону. Математическое ожидание случайной ошибки равно нулю. Статистическая обработка экспериментальных данных позволяет определить величину случайной ошибки и довести ее до некоторого приемлемого значения повторением измерений достаточное число раз.

3. Грубые ошибки чрезмерно большие и обычно пропадают при повторении опыта. Они существенно выходят за пределы случайной ошибки, полученные при статистической обработке. Измерения с такими ошибками отбрасываются и в расчет не принимаются.

Таким образом, в экспериментальных данных всегда содержатся случайные ошибки. Они, вообще говоря, могут быть уменьшены до сколь угодно малой величины путем многократного повторения опыта. В ряде случаев можно получить уточненные данные хорошей математической

обработкой результатов измерений.

Пусть при изучении неизвестной функциональной зависимости между y и x в результате серии экспериментов получена таблица значений

x_0	x_1	$\dots$	x_n
y_0	y_1	$\dots$	y_n

Задача состоит в том, чтобы найти приближенную зависимость $y = f(x)$, значения которой при $x = x_i$ мало отличаются от опытных данных y_i . Приближенная функциональная зависимость, полученная на основании опытных данных, называется *эмпирической формулой*.

Задача построения эмпирической формулы отличается от задачи интерполирования. График эмпирической зависимости, вообще говоря, не проходит через заданные точки $\{x_i, y_i\}$, как в случае интерполяции. Это приводит к тому, что экспериментальные данные сглаживаются, а интерполяционная формула повторила бы все ошибки, имеющиеся в экспериментальных данных.

Построение эмпирической формулы осуществляется в два этапа:

1. подбор общего вида этой формулы;
2. определение наилучших значений содержащихся в ней параметров.

Общий вид формулы иногда бывает известен из физических соображений. Например, для упругой среды связь между напряжением σ и относительной деформацией ε определяется законом Гука: $\sigma = E\varepsilon$, где E — модуль упругости. Если характер зависимости заранее неизвестен, то вид эмпирической формулы может быть произвольным. Как правило, предпочтение отдается более простым формулам. Они первоначально выбираются из геометрических соображений: экспериментальные точки наносятся на график и примерно угадывается общий вид зависимости (многочлен,

показательная, логарифмическая функции и т.п.). Успех здесь во многом определяется опытом и интуицией исследователя.

Рассмотрим простейшую эмпирическую формулу – линейную зависимость вида $y = ax + b$. Близость экспериментального распределения точек к линейной зависимости можно проверить путем вычисления значений k_i :

$$k_i = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}, \quad \Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \quad \Delta x_i = x_{i+1} - x_i. \quad (6.1)$$

Если $k_i \approx \text{const}$, то точки $\{x_i, y_i\}$ расположены приблизительно на одной прямой. Тогда в качестве эмпирической формулы можно принять линейную зависимость.

В ряде случаев к линейной зависимости могут быть сведены и другие экспериментальные данные. Такое преобразование называется *выравниванием данных*. Например, к такому виду легко сводится степенная зависимость $y = ax^b$. Логарифмируя это равенство, получаем: $\ln y = b \ln x + \ln a$. Теперь зависимость $\ln y = f(\ln x)$ – линейная функция.

Другой простейшей эмпирической формулой является квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$. Возможность использования этой формулы для случая равноотстоящих точек x_i можно проверить путем вычисления вторых разностей $\Delta^2 y_i = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}$. Если $\Delta^2 y_i \approx \text{const}$, то в качестве эмпирической формулы может быть выбрана квадратичная зависимость.

6.1. Метод наименьших квадратов

Будем считать, что тип эмпирической формулы выбран и ее можно представить в виде

$$y = \varphi(x, a_0, a_1, \dots, a_m), \quad (6.2)$$

где φ – известная функция, $a_0, a_1, \dots, a_m$ – неизвестные постоянные параметры.

Разность между значениями эмпирической функции φ и опытными данными y_i в точках x_i называется *отклонениями*:

$$\varepsilon_i = \varphi(x_i, a_0, a_1, \dots, a_m) - y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (6.3)$$

Задача нахождения наилучших значений параметров $a_0, a_1, \dots, a_m$ сводится к некоторой минимизации отклонений ε_i . Для этой цели наиболее широко используется *метод наименьших квадратов*.

Запишем сумму квадратов отклонений для всех точек $x_0, x_1, \dots, x_n$:

$$S = \sum_{i=0}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=0}^n [\varphi(x_i, a_0, a_1, \dots, a_m) - y_i]^2. \quad (6.4)$$

Параметры $a_0, a_1, \dots, a_m$ найдем из условия минимума функции $S = S(a_0, a_1, \dots, a_m)$. В этом заключается суть метода наименьших квадратов.

Минимум функции S найдем, приравняв к нулю ее частные производные по параметрам $a_0, a_1, \dots, a_m$, высту-

пающим в роли независимых переменных:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial S}{\partial a_m} = 0. \quad (6.5)$$

Соотношения (6.5) задают систему уравнений для определения $a_0, a_1, \dots, a_m$.

В качестве эмпирической функции рассмотрим многочлен

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m. \quad (6.6)$$

Тогда функция S примет вид:

$$S = \sum_{i=0}^n [a_0 + a_1 x_i + \dots + a_m x_i^m - y_i]^2. \quad (6.7)$$

Для составления системы уравнений (6.5) найдем частные производные функции S :

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a_0} = 2 \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1 x_i + \dots + a_m x_i^m - y_i) \\ \frac{\partial S}{\partial a_1} = 2 \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1 x_i + \dots + a_m x_i^m - y_i) \cdot x_i \\ \dots \\ \frac{\partial S}{\partial a_m} = 2 \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1 x_i + \dots + a_m x_i^m - y_i) \cdot x_i^m \end{cases} \quad (6.8)$$

Приравнявая эти выражения к нулю и собирая коэффициенты при неизвестных $a_0, a_1, \dots, a_m$, получаем систему урав-

нений

$$\begin{cases} (n+1)a_0 + a_1 \sum_{i=0}^n x_i + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^2 + \dots + a_m \sum_{i=0}^n x_i^m = \sum_{i=0}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^3 + \dots + a_m \sum_{i=0}^n x_i^{m+1} = \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \dots \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i^m + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^{m+1} + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^{m+2} + \dots + a_m \sum_{i=0}^n x_i^{2m} = \sum_{i=0}^n x_i^m y_i \end{cases} \quad (6.9)$$

Решая эту систему линейных уравнений, найдем коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_m$ многочлена (6.6).

Систему (6.9) можно записать в более компактном виде:

$$\begin{cases} b_{00}a_0 + b_{01}a_1 + \dots + b_{0m}a_m = c_0 \\ b_{10}a_0 + b_{11}a_1 + \dots + b_{1m}a_m = c_1 \\ \dots \\ b_{m0}a_0 + b_{m1}a_1 + \dots + b_{mm}a_m = c_m \end{cases} \quad (6.10)$$

$$b_{kl} = \sum_{i=0}^n x_i^{k+l}, \quad c_k = \sum_{i=0}^n x_i^k y_i, \quad k, l = 0, 1, \dots, m. \quad (6.11)$$

В частности, если эмпирическая формула – квадратный трехчлен $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ ($m = 2$), то система уравнений (6.9) примет вид:

$$\begin{cases} (n+1)a_0 + a_1 \sum_{i=0}^n x_i + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^2 = \sum_{i=0}^n y_i, \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^3 = \sum_{i=0}^n x_i y_i, \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^3 + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^4 = \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i, \end{cases} \quad (6.12)$$

ОТВЕТЫ

$$1.1. F(p) = \frac{p(p^2 + 2p + 3)}{(p-1)(p^2 - 2p + 5)}. \quad 1.2. F(p) = \frac{2}{(p^2 + 1)^2}.$$

$$1.3. F(p) = \frac{8}{p(p^2 - 16)}. \quad 1.4. F(p) = \frac{p-2}{p^2 - 4p - 5}.$$

$$1.5. F(p) = \frac{2}{(p+4)^3}. \quad 1.6. F(p) = \frac{p^2 + 2}{p^4 + 4}.$$

$$1.7. F(p) = \frac{(1 - e^{-ap})}{p^2}. \quad 1.8. F(p) = \frac{1 + e^{-3p} - 2e^{-6p}}{p}.$$

$$1.9. F(p) = \frac{1 - e^{-2p}}{p(1 + e^{-2p})}. \quad 1.10. F(p) = \frac{(1 - e^{-p})^2}{p^2(1 - e^{-4p})}.$$

$$1.11. f(p) = \frac{-e^t}{3} + \frac{e^{2t}}{4} + \frac{e^{2t}}{12}. \quad 1.12. f(t) = \frac{te^{3t}}{4} - \frac{e^{3t}}{16} + \frac{e^{-t}}{16}.$$

$$1.13. f(t) = 2e^t - 4t - 3. \quad 1.14. f(t) = e^{-2t} \sin t.$$

$$1.15. f(t) = t \sin t / 2. \quad 1.16. f(t) = (e^{-(t-5)} + 3e^{3(t-5)})\eta(t-5).$$

$$1.17. y(t) = e^{2t}. \quad 1.18. y(t) = \operatorname{sh} t. \quad 1.19. y(t) = (3te^t - 7e^t - 2e^{-2t})/9.$$

$$1.20. y(t) = (2e^{-3t} - 3te^{-3t} - 2)/9.$$

$$1.21. y(t) = (25 \operatorname{sh} 3t)/24 - \operatorname{ch} 3t - \operatorname{sh} t/8.$$

$$1.23. y(t) = 1 - e^{-t} - te^t + 2(1 - e^{-(t-2)} - (t-2)e^{-(t-2)})\eta(t-2).$$

$$1.24. y(t) = (t \sin 3t)/6 + y(0) \cos 3t + (y'(0) \sin 3t)/3 = \\ = (t - \sin 3t)/6 + c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t.$$

$$1.25. y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-2t} + te^t.$$

$$1.26. x(t) = (5e^{2t} - e^{-2t})/2, \quad y(t) = (5e^{2t} - e^{-2t})/2.$$

$$1.27. y(t) = (6e^{5t} - e^{-5t})/5, \quad y(t) = (3e^{5t} + 2e^{-5t})/5.$$

$$1.28. y(t) = (3e^{2t} + e^{-2t} - 4e^t)/4, \quad y(t) = (9e^{2t} - e^{-2t} - 8e^t)/12.$$

1.29. а) $y(t) = (2 \sin t - \sin 2t)/3$, б) $y(t) = 2(t - \sin t)$.

1.30. а) $y(t) = \frac{e^t}{2} - \frac{e^{-t}}{2} - t$, б) $y(t) = -\frac{e^t}{2} - \frac{e^{-t}}{6} + \frac{e^{2t}}{3}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данное учебное пособие существенно восполнит имеющиеся пробелы в учебной литературе по применению операционного исчисления и по методам современной профессиональной математики.

Авторы надеются, что после знакомства с методами, изложенными в данном пособии, пусть даже в таком ограниченном объеме, студентам будет гораздо легче применять эти методы как при проведении лабораторного практикума спецкурсов на старших курсах, так и в своей дальнейшей профессиональной деятельности.

Последовательное изложение учебного материала в пособии должно способствовать глубокому усвоению студентами дисциплины "Математика".

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. В 2 ч. М.: Высш. шк., 1996. Ч. I. 304 с.
2. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. В 2 ч. М.: Высш. шк., 1986. Ч. II. 415 с.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учеб. пособие / Н.С. Пискунов. В 2 т. М.: Интеграл-Пресс, 1998. Т. II. 544 с.
4. Бронштейн И.Н. Справочник по математике / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. М.: Наука, 1981. 720 с.
5. Турчак Л.И. Основы численных методов / Л.И. Турчак. – М.: Наука, 1987. – 320 с.
6. Легеня Б.И. Математические модели и методы в расчетах на ЭВМ: учеб. пособие / Б.И. Легеня, Н.Б. Ускова. – Воронеж: ВГТУ, 1998. – 79 с.
7. Численные методы: учеб. пособие / Л.Д. Кретьева, Н.Б. Ускова, А.В. Бондарев, В.В. Посметьев. – Воронеж: ВГТУ, 2006. – 81 с.
8. Формалев В.Ф. Численные методы / В.Ф. Формалев, Д.Л. Ревизников. – М.: Физматлит, 2004. – 400 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. Элементы операционного исчисления	4
1.1. Преобразование Лапласа	4
1.2. Обратное преобразование Лапласа	10
1.3. Решение дифференциальных уравнений операционным методом	14
1.4. Решение линейных дифференциальных уравнений с помощью формулы Дюамеля	20
2. Расчеты электрических цепей с применением операци- онного исчисления	22
3. Вычислительный эксперимент	45
3.1. Этапы вычислительного эксперимента	45
3.2. Элементы теории погрешностей	47
3.3. Источники погрешностей	49
3.4. Устойчивость. Корректность. Сходимость	50
4. Численное решение уравнений	55
4.1. Методы решения уравнений	55
4.2. Метод деления отрезка пополам	57
5. Методы оптимизации	59
5.1. Одномерная оптимизация	60
5.2. Многомерная оптимизация	63
6. Подбор эмпирических формул	72
6.1. Метод наименьших квадратов	75
ОТВЕТЫ	79
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	81
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	82

Учебное издание

Кротова Лариса Дмитриевна
Посметьев Виктор Валерьевич
Ускова Наталья Борисовна

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
В РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ**

В авторской редакции

Подписано в печать 30.09.2011.
Формат 60x84/16. Бумага для множительных аппаратов.
Усл. печ. л. 5,2. Уч.-изд. л. 4,1. Тираж 250 экз.
Зак. № 258

ФГБОУВПО "Воронежский государственный
технический университет"
394026 Воронеж, Московский просп., 14

