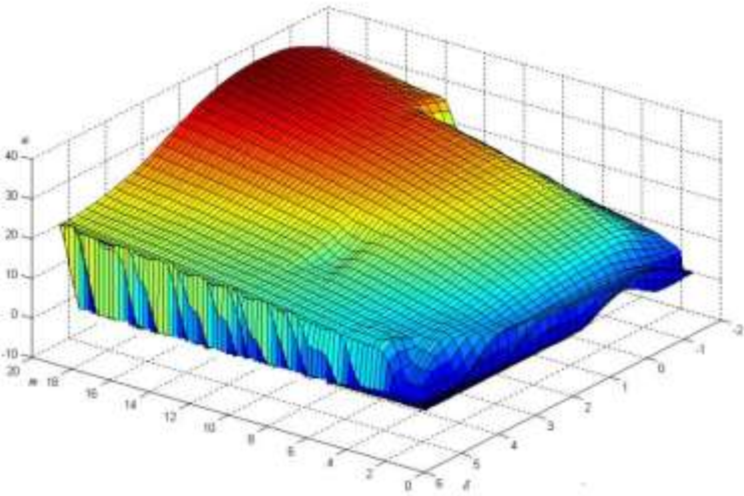
Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Воронежский государственный технический университет»

Кафедра конструирования и производства радиоаппаратуры

СИНТЕЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению курсовой работы по дисциплине «Основы САПР» для студентов направления 11.03.03 «Конструирование и технология электронных средств» профиль («Проектирование и технология радиоэлектронных средств») всех форм обучения



Воронеж 2021

УДК 621.3.049.7.002 (075)
ББК 38.54

Составители:

ст. преподаватель О.Н. Чирков

Методические указания к выполнению курсовой работы по дисциплине «Основы САПР» для студентов направления 11.03.03 «Конструирование и технология электронных средств» профиль («Проектирование и технология радиоэлектронных средств») всех форм обучения / ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»; сост.: О.Н. Чирков. Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2021. 137 с.

Основной целью указаний является приобретение студентами знаний, умений и практических навыков по синтезу адекватных математических моделей на основе уравнения регрессии в виде полноквадратичной зависимости.

Предназначены для проведения курсовой работы по дисциплине «Основы САПР» для студентов 3 курса.

Методические указания подготовлены в электронном виде и содержатся в файле KURS_SAPR.pdf.

Ил. 8. Табл. 9. Библиогр.: 7 назв.

УДК 621.3.049.7.002 (075)
ББК 38.54

Рецензент - О. Ю. Макаров, д-р техн. наук, проф. кафедры конструирования и производства радиоаппаратуры ВГТУ

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

СИНТЕЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО КУРСОВОЙ РАБОТЕ

по дисциплине «Основы САПР» для студентов направления 11.03.03 «Конструирование и технология электронных средств» профиль («Проектирование и технология радиоэлектронных средств») всех форм обучения

Составители:
Чирков Олег Николаевич

Компьютерный набор О. Н. Чирков

Подписано к изданию _________.
Уч.-изд. л. _____.
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»
394026 Воронеж, Московский просп., 14

ВВЕДЕНИЕ

Экспериментальные исследования являются основным источником получения достоверных сведений об объектах реального мира. Такие исследования проводятся с целью выбора рациональных технологических режимов функционирования или оптимизации параметров систем, оценки степени выполнения заданных требований к создаваемым изделиям, выяснения закономерностей функционирования, анализа влияния факторов на показатели качества систем и т.д. Натурные исследования свойств технических средств или сложных моделей требуют значительных затрат ресурсов. Данное обстоятельство заставляет уделять серьезное внимание рациональной организации экспериментального изучения таких объектов.

Экспериментальные данные формируются путем пассивного наблюдения либо с помощью активного эксперимента. При пассивном наблюдении информация получается путем регистрации необходимых сведений в условиях обычного функционирования объекта.

В активном эксперименте производится целенаправленное воздействие на объект по заранее составленной схеме. Активный эксперимент позволяет расширить область исследования, точнее вскрыть закономерности функционирования, сократить потребности в ресурсах на проведение исследования. Но организация и проведение активного эксперимента сложнее пассивного.

Кроме того, следует учитывать и принципиальные ограничения в проведении активных экспериментов на действующих объектах, невозможность их осуществления для недоступных объектов.

Планирование экспериментов (ПЭ) охватывает широкий круг вопросов – от учета конкретных особенностей определенных объектов исследования до общих концептуальных проблем. Далее будут рассмотрены задачи планирования, изучаемые специальной научной дисциплиной -теорией планирования эксперимента (ТПЭ).

Целесообразность создания и начальные положения специальной теории планирования эксперимента впервые были сформулированы в Англии в конце XIX века. Серьезный вклад в становление теории внес Р.А. Фишер, именно его работы в тридцатых годах прошедшего столетия заложили основы теории статистического анализа, начал науки о планировании и анализе сравнительных экспериментов. С начала 50-х годов начинается интенсивное применение планирования эксперимента в химии и химической технологии.

В России работы по планированию эксперимента начаты в 1960 году под руководством В. В. Налимова, и в настоящее время это — один из методов научного исследования. Среди наших соотечественников существенную роль в становлении отечественной школы в области теории ПЭ и ее практического применения сыграли Ю.П. Адлер, Е.В. Маркова, В.В. Федоров и другие ученые.

В настоящее время ТПЭ выступает как самостоятельное научное направление и находит практическое применение там, где проводятся сложные научные и технические экспериментальные исследования. Методы планирования эксперимента используются при исследовании различных объектов: доменных печей, листопрокатных станов, электролизных ванн, металлорежущих станков, радиоэлектронных устройств.

Теория планирования экспериментов использует аппарат математической статистики, линейной алгебры, комбинаторики и других разделов математики.

Методы ТПЭ направлены на разработку оптимальных планов проведения экспериментов с целью сокращения объема проводимых исследований при заданной точности и достоверности получения результатов, извлечения из полученных опытных данных максимума полезных сведений.

Составной частью ТПЭ является исследование способов обработки результатов эксперимента, проведенного по выбранному плану, анализ свойств получаемых оценок показателей качества объекта. Экспериментальные данные, полученные с помощью ТПЭ, часто являются основой для применения других математических методов, например градиентных методов оптимизации.

Наличие формальной теории планирования эксперимента ни в коем случае не исключает необходимости четкого представления физических основ процессов, протекающих в объекте исследования, факторов, воздействующих на объект. Эти сведения нужны на этапе составления плана эксперимента, а также в процессе анализа и интерпретации результатов.

Данное пособие содержит начальные сведения по планированию и обработке результатов многофакторных экспериментов. Материал изложен на уровне, предназначенном для практического применения и не затрагивает доказательную базу рассматриваемых методов.

1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

В ТПЭ исследуемый объект (реальный объект, модель объекта) рассматривается как "черный ящик", имеющий входы **v** (управляемые независимые параметры, или внутренние параметры) и выходы **y** [3, 6].По традиции входные управляемые переменные (внутренние параметры) обозначим : **v** = *x1, x2, ..., xn*. Переменные **v** принято называть *факторами*. Теория ПЭ изучает только активный тип экспериментов, когда имеется возможность независимо и целенаправленно менять значения факторов **v** во всем требуемом диапазоне. Факторы в эксперименте бывают качественными и количественными. Качественные факторы можно квантифицировать или приписать им числовые обозначения, тем самым перейти к количественным значениям. В дальнейшем будем считать, что все факторы являются количественными и представлены непрерывными величинами (если другое не оговорено особо). Переменным **v** можно сопоставить геометрическое понятие *факторного пространства* – пространства, координатные оси которого соответствуют значениям факторов. Совокупность конкретных значений всех факторов образует точку в многомерном факторном пространстве. Примерами факторов являются: интенсивность потока запросов к базе данных, скорость передачи данных по каналу, объем запоминающего устройств. Кроме того, на объект воздействуют возмущающие факторы, они являются случайными и не поддаются управлению.

Область планирования задается интервалами возможного изменения факторов $x_{i,min} < x_i < x_{i,max}$ для i =1, 2, …, n, где n=k – количество факторов. В теории ПЭ часто используют нормализацию факторов, т.е. преобразование натуральных значений факторов в безразмерные (нормированные) величины. Переход к безразмерным значениям x_i задается преобразованием

$$X_i = (x_i - x_{i0})/\Delta x_i, \qquad (1.1)$$

где x_i – натуральное (реальное) значение фактора, $x_{iб} = x_{i0}$ – базовое значение основного уровня фактора, соответствующее нулю в безразмерной шкале, Δx_i – интервал (шаг) варьирования фактора x_i.

Выходные параметры объекта проектирования *y1, y2, ...,* ym называются *переменными состояния*, или функцией отклика. Различают экономические и технологические переменные состояния.

В качестве экономических используют производительность, себестоимость и другие показатели. Технологическими переменными служат качество продукта, выход целевого продукта, надежность получаемых изделий и др. Объект исследования может иметь несколько переменных состояния, их количество следует сократить до минимума.

Опыт показывает, что в большинстве случаев удается ограничиться одной переменной состояния, и тогда вектор *У* превращается в скалярную величину *у*.

Если переменных состояния несколько, то эксперимент проводится по каждой из них, а затем решается компромиссная задача.

При выборе переменной состояния необходимо учитывать следующие требования:

1) переменная состояния должна иметь количественную характеристику, т. е. измеряться;

2) переменная состояния должна однозначно измерять эффективность объекта исследования; это требование эквивалентно корректной постановке задачи;

3) переменная состояния должна быть статистически эффективной, т. е. обладать возможно меньшей дисперсией при проведении опытов; это позволяет хорошо различать опыты.

Правильный выбор переменной состояния объекта исследования повышает шансы экспериментатора на успех.

При выборе факторов нужно выполнять следующие требования:

1) фактор должен быть регулируемым, т. е. с помощью определенного регулирующего устройства фактор можно изменять от значения x1 до значения x2 (системотехники называют это операционной определенностью).

2) точность измерения и управления факторов должна быть известна и достаточно высока (хотя бы на порядок выше точности измерения выходной переменной); очевидно, что низкая точность измерения факторов уменьшает возможности воспроизведения эксперимента.

К факторам и переменным состояния одновременно также предъявляется ряд требований:

1) факторы и переменные состояния должны иметь области определения, заданные технологическими или принципиальными ограничениями; области определения факторов должны быть таковы, чтобы при различных их комбинациях переменные состояния не выходили за свои ограничения;

2) между факторами и переменными состояниями должно существовать однозначное соответствие; оно позволит в основном эксперименте построить математическую модель объекта исследования и решить поставленную задачу эксперимента.

Метод наименьших квадратов позволяет получить описание объекта по любым данным, лишь бы матрица системы нормальных уравнений была невырожденной. Поэтому с появлением ЭВМ возникла идея — получать математические описания технологических процессов, пользуясь в качестве исходных данных результатами нормальной эксплуатации процесса.

В реальных условиях технологический процесс все время испытывает случайные колебания режима. Сегодня значения контролируемых факторов несколько иные, чем вчера, а завтра будут еще немного другими. Нельзя ли каждое изменение режима рассматривать как эксперимент, и, обработав совокупность таких «экспериментов» методом наименьших квадратов, получить описание процесса, а затем использовать это описание для управления и оптимизации? Такой подход получил название пассивного эксперимента.

Достоинство пассивного эксперимента—отсутствие затрат на опыты: данные получаются «сами собой». Но надежды, возлагавшиеся на этот метод, в большинстве случаев не оправдались.

Анализ неудач пассивного эксперимента выявил несколько их причин.

Во-первых, в нормальных условиях колебания режима малы, опытные точки находятся близко одна к другой. Хорошо известно, что чем ближе опытные точки, тем сильнее влияют на описание случайные ошибки. Действительно, различия в получаемых значениях отклика при этом малы, и эти малые различия плохо выделяются на фоне шума — случайных ошибок. Поэтому значения коэффициентов регрессии оцениваются со значительными ошибками.

Во-вторых, в пассивном эксперименте факторы сильно коррелированны. Это делает крайне ненадежным анализ влияния отдельных факторов—всегда может оказаться, что влияет не данный фактор, а другой, с ним коррелированный.

В-третьих, сами значения факторов в производственных условиях часто измеряются с заметными ошибками; поэтому применение метода наименьших квадратов в его обычном варианте становится некорректным.

В связи с этим в теории эксперимента любой эксперимент, при планировании которого не учтено влияние плана эксперимента на статистические свойства получаемых оценок, часто называют пассивным. Ему противопоставляют активный эксперимент, в основе которого лежит планирование эксперимента (то есть управление условиями его проведения)

Наиболее широко в настоящее время используются планы так называемого экстремального эксперимента, разработанные для определения оптимальных условий протекания процессов в объектах исследования.

Оптимум определяется по математической модели объекта исследования, которую ищут в виде полиномиального уравнения (уравнения регрессии).

Логику появления полинома как математической модели объекта исследования можно объяснить следующим образом. Исследователь полагает, что математическую модель объекта принципиально можно представить дифферен-циальными уравнениями. В общем виде искомое решение можно представить функцией:

$$y = F(X, \beta), \qquad (1.2)$$

где *y*—переменная состояния объекта исследования; *X*—матрица факторов; β — матрица коэффициентов.

Коэффициенты β полинома можно интерпретировать как коэффициенты ряда Тейлора, в который «удается» разложить решение в окрестностях некоторой точки .

Пользуясь статистическими методами и учитывая конечность экспериментальных данных, можно получить оценки *коэффициентов регрессии* β в уравнении (1).

Уравнение (1) называют уравнением регрессии и широко используют для получения математической модели объекта исследования.

Прежде чем приступить к планированию эксперимента, необходимо убедиться в том, что опыты воспроизводимы, Для этой цели проводят N серий из k параллельных опытов в рассматриваемой области изменения влияющих факторов.

Результаты опытов заносятся в таблицу:

Таблица 1.1

Номер серии опытов	Результаты параллельных опытов				$y_{j,\text{средн.}}$
1	Y_{11}	Y_{12}	………..	Y_{1k}	$Y_{1\text{средн}}$
2	Y_{21}	Y_{22}	………..	Y_{2k}	$Y_{2\text{средн}}$
3	Y_{31}	Y_{32}	………..	Y_{3k}	$Y_{3\text{средн}}$
j	Y_{j1}	Y_{j2}	………..	Y_{jk}	$Y_{j\text{средн}}$
N	Y_{N1}	Y_{N2}		Y_{Nk}	$Y_{N\text{средн.}}$

Определяется среднее арифметическое значение функции отклика для любой серии опытов j (j=1,…,N):

$$Y_{j\text{средн}} = \frac{1}{k} * \sum_{i=1}^{k} Y_{ji}$$

Оценивается дисперсия для каждой серии параллельных опытов:

$$s_j^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k} (Y_{ji} - Y_{j\text{средн.}})^2$$

Определяется расчётное значение критерия Кохрена:

$$G_P = \frac{\max\left\{sj^2\right\}}{\sum_{i=1}^{N} sj^2}.$$

По специальным таблицам определяют табличное значение Кохрена - G_T. Они зависят от доверительной вероятности P(как правило P=0.95),от N и от f=k-1.

Если выполняется условие $G_p \le G_T$, то опыты считаются воспроизводимым

Определяется погрешность эксперимента. Оценка дисперсии воспроизводимости рассчитывается по формуле:

$$S_y^2 = \frac{1}{N} * \sum_{i=1}^{N} Sj^2,$$

с ней связано число степеней свободы N*(k-1)

В последовательности реализации планов можно выделить следующие этапы:
1) оценка априорной информации и отсеивание факторов, несущественных для конкретного объекта исследования;
2) получение математической модели объекта в виде линейной функции отклика;
3) поиск оптимальной области объекта по линейной функции отклика;
4) получение математической модели объекта исследования области оптимума в виде нелинейной функции отклика;
5) поиск оптимальной координаты факторного пространства в области оптимума.
Экстремальный эксперимент заканчивается определением оптимальной координаты, соответствующей оптимальным условиям протекания процессов объекта исследования.
В подавляющем большинстве РЭС и технологические процессы их изготовления являются сложными, на процесс влияет не один, а ряд факторов.
Возможны два подхода к исследованию таких многофакторных систем. Первый можно описать формулой: «Изменяй факторы по одному». Исследование системы разбивается на серии, в пределах каждой из которых изменяется (варьируется) лишь один фактор, а остальные неизменны. В следующей серии изменяется второй фактор и т. д. Идея другого подхода— построить план эксперимента, предусматривающий изменение всех влияющих факторов, с тем, чтобы этот план обеспечивал максимум точности, минимум корреляции и другие хорошие статистические свойства. Такой эксперимент называют многофакторным.
Долгое время в науке господствовал первый подход. Его главное преимущество—наглядность: данные каждой серии легко поддаются интерпретации.

Один из важных результатов теории планирования эксперимента заключается в том, что второй подход— значительно эффективнее первого. При том же объеме эксперимента и той же точности опытов получается большая точность результатов.

Геометрическим образом совокупности независимых переменных *x* и зависимой переменной *y* является пространство n+1 измерения, где n—число независимых переменных; (n+1)-е измерение относится к *y*. В этом пространстве зависимости *y* от всех *x* соответствует n-мерная поверхность, которую обычно называют поверхностью отклика (результат опыта рассматривается как отклик системы на опыт—заданную совокупность независимых переменных, или входов).

План эксперимента указывает расположение опытных точек в n-мерном пространстве независимых переменных (факторном пространстве), или иными словами, условия всех опытов, которые следует провести. Чаще всего план эксперимента задается в виде матрицы планирования — прямоугольной таблицы, каждая строка которой отвечает условиям определенного опыта, а каждый столбец — значениям какой-то из независимых переменных в разных опытах.

Полным факторным экспериментом называется система опытов, содержащая все возможные неповторяющиеся комбинации уровней варьирования факторов. Для удобства вычислений коэффициентов регрессии все факторы в ходе полного факторного эксперимента варьируют на двух уровнях: нижнем -1 и верхнем +1, соответствующих значениям нормированных переменных X1,X2,……Xn .Таким образом, полным факторным экспериментом называется система опытов, содержащая все возможные неповторяющиеся комбинации уровней варьирования факторов.

В табл. 1.2 приведены условия опытов полного трехфакторного эксперимента. Эти опыты соответствуют в факторном пространстве вершинам куба с центром в начале координат.

Таблица 1.2

Номер опыта	Факторы			Функция отклика
	X1	X2	X3	

1	-1	-1	-1	*y1*
2	+1	-1	-1	*y2*
3	-1	+1	-1	*y3*
4	+1	+1	-1	y4
5	-1	-1	+1	y5
6	+1	-1	+1	*y6*
7	-1	+1	+1	*y7*
8	+1	+1	+1	*y8*

Каждый фактор принимает лишь два значения — варьируется на двух уровнях, верхнем и нижнем. Поэтому общее число экспериментов $N=2^{n}$.

Пример. В четырех опытах исследуется влияние 3 факторов :температуры Т,К, давления *p,* МПа, и времени t, с, на выход продукта.

Здесь в любом из опытов температура—либо 1000 К (нижний уровень), либо 1200 К (верхний уровень); аналогично варьируются *p* и t.

Таблица 1.3

	Температура	Давление	Время
Основной уровень	1000	750	50
Интервал варьирования	100	250	10
Верхний уровень	1200	1000	60
Нижний уровень	1100	500	40

Матрица планирования эксперимента для этого случая может иметь вид:

Таблица 1.4

№№	T	P	t
1	1000	500	40
2	1200	500	40
3	1000	1000	40
4	1200	1000	40
5	1000	500	60
6	1200	500	60
7	1000	1000	60
8	1200	1000	60

Из таблицы видны основные принципы построения матриц планирования полного факторного эксперимента:

Матрица планирования ПФЭ обладает следующими свойствами:

$$\sum_{j=1}^{N} X_{j,i} = 0 \qquad \sum_{j=1}^{N} X_{j,i}{}^{2} = \mathrm{N} \qquad \sum_{j=1}^{N} X_{j,i} * X_{j,l} = 0$$

где j- номер опыта; *i*—номер фактора,(l≠m) Свойство, выраженное последним уравнением, называется *ортогональностью* матрицы.

Оно позволяет вычислять коэффициенты регрессии по простым формулам независимо друг от друга

$$b_0 = \frac{1}{N} * \sum_{j=1}^{N} y_j \qquad b_i = \frac{1}{N} * \sum_{j=1}^{N} X_{j,i} * y_j \qquad b_{l,m} = \frac{1}{N} * \sum_{j=1}^{N} X_{j,l} * X_{l,m} * y_j$$

Расширенная матрица—это матрица, дополненная столбцами, учитывающими взаимодействия факторов. На практике, как правило, ограничиваются парными взаимодействиями.

Коэффициенты регрессии рассчитываются методом наименьших квадратов. Основное условие метода формулируется следующим образом: коэффициенты регрессии определяются на основании минимизации суммы квадратов отклонений между экспериментальными *уэ,* и рассчитанными по уравнению регрессии *ур* значениями функции отклика:

$$S = \sum_{j} (y_j^{э} - y_j^{p})^2$$

После определения коэффициентов регрессии определяем значимость этих коэффициентов. Все коэффициенты подразделяются на значимые и незначимые. Для определения значимости коэффициентов регрессии сравнивается погрешность вычисления коэффициента с погрешностью экспериментальных данных - S_y^2 . Вычисляется доверительный интервал:

$$\Delta b_i = \pm t_T * S_y^2 \, .$$

Здесь t_T - табличное значение критерия Стьюдента, которое находится по числу степеней свободы и доверительной вероятности. Тогда значимость оценивают, сравнивая абсолютные значения коэффициента и доверительного интервала.

.Незначимые коэффициенты отбрасываются из уравнения регрессии, после чего записывается окончательный вид уравнения регрессии. Это уравнение проверяется на адекватность. Для этого вычисляется оценка дисперсии адекватности :

$$S_{ад}^{2} = \frac{1}{N - B} * \sum_{j=1}^{N} (y_j^{э} - y_j^{р})^2$$

Здесь B- число значимых коэффициентов регрессии.

Вычисляют расчётное значение критерия Фишера:

$$F_р = \frac{макс\{S_{ад}^2, S_у^2\}}{мин\{S_{ад}^2, S_у^2\}}$$

По таблице находят табличное значение критерия Фишера. Оно зависит от доверительной вероятности P, числа степеней свободы $f_{ад}$= N-B и f= N*(k-1). На основании этого делается вывод об адекватности или неадекватности уравнения регрессии. Уравнение регрессии считается адекватным, если выполняется условие: $F_Р \leq F_Т$.

Чем меньше B, тем больше N-B—в этом одна из главных целей, достигаемых при исключении незначимых членов.

Если уравнение неадекватно, переходят к более сложной модели (например, повышают степень многочлена), для чего обычно требуется постановка добавочных опытов. Иногда можно обойтись без дополнительного эксперимента, если соответствующим образом преобразовать переменные y или x .

Совокупность основных уровней всех факторов представляет собой точку в пространстве параметров, называемую центральной точкой плана или центром эксперимента. С геометрической точки зрения нормализация факторов равноценна линейному преобразованию пространства факторов, при котором проводятся две операции: перенос начала координат в точку, соответствующую значениям основных уровней факторов; сжатие – растяжение пространства в направлении координатных осей.

Активный эксперимент включает: систему воздействий, при которых воспроизводится функционирование объекта;

регистрацию отклика объекта. *План эксперимента* задает совокупность данных, определяющих количество, условия и порядок реализации опытов. *Опыт* составляет элементарную часть эксперимента и предусматривает воспроизведение исследуемого явления в конкретных условиях с последующей регистрацией результата. В условиях случайности в одних и тех же условиях проводятся параллельные (повторные) опыты в интересах получения статистически устойчивых результатов. Опыт u предполагает задание конкретных значений факторам $\mathbf{v}_u = v_{1u}, v_{2u}, \ldots, v_{ku}$, а совокупность значений факторов во всех N точках плана эксперимента образует матрицу плана

$$\begin{matrix} v_{11}, v_{21}, \ldots, v_{k1} \\ v_{12}, v_{22}, \ldots, v_{k2} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ v_{1N}, v_{2N}, \ldots, v_{kN}\,. \end{matrix} \qquad (1.2)$$

Строки матрицы соответствуют опытам, столбцы – факторам, элемент матрицы v_{iz} задает значение z-го фактора в i-м опыте.

Вектор $\mathbf{y}$ называется *откликом*. В ТПЭ обычно изучается ситуация, в которой вектор отклика $\mathbf{y}$ состоит из одного элемента y. При наличии нескольких составляющих вектора $\mathbf{y}$, каждую из них можно исследовать отдельно. Зависимость отклика от факторов носит название *функции отклика*, а геометрическое представление функции отклика – *поверхности отклика*. Функция отклика рассматривается как показатель качества или эффективности объекта. Этот показатель является функцией от параметров – факторов. На практике широкое распространение получили простые функции вида $\mathrm{M}\{y'\} = \mathbf{bf}(v)$, где $\mathbf{b}=(b_0, b_1, \ldots, b_h)$ – вектор неизвестных параметров модели размерности $h+1$, $\mathbf{f}(v)=(f_0(v), f_1(v), \ldots, f_h(v))$ – вектор заданных базисных функций, $\mathrm{M}\{y'\}$ – математическое ожидание функции отклика. Такое представление функции отклика соответствует линейной по параметрам модели регрессионного анализа, т.е. функция отклика есть линейная комбинация базисных функций от факторов.

Вследствие влияния на результаты экспериментов случайных воздействий истинные значения коэффициентов можно определить только приближенно. Оценку $\beta = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_h)$ вектора неизвестных параметров **b** находят по результатам экспериментов, в ходе которых получают значения y_u при заданных значениях факторов $\mathbf{v}_u$. Эти оценки обычно рассчитываются с помощью метода наименьших квадратов (МНК) на основе выборок значений факторов и откликов системы на воздействия [8]. В качестве оценки $\boldsymbol{\beta}$ вектора **b** выбирается такое значение, которое минимизирует

$$\frac{1}{N}\sum_{u=1}^{N}(y_u^{'} - y_u)^2,$$

где y'_u – вычисленное на модели значение функции отклика в u-й точке факторного пространства. Приравнивая нулю частные производные от данной квадратичной формы, взятые по переменным $b_0, b_1, \ldots, b_h$, можно получить систему уравнений вида

$$\frac{1}{N}\sum_{u=1}^{N}(y_u^{'} - y_u)f(v_i) = 0,$$

где i= 0, 1, 2, …, h. Значение **b** находят путем решения этой системы уравнений. Решение системы возможно при линейной независимости базисных функций.

Если не принимать специальных мер, то оценки коэффициентов $\boldsymbol{\beta}$ станут взаимозависимыми, и полученное выражение для функции отклика можно рассматривать только как интерполяционную формулу, что затрудняет ее физическую интерпретацию и последующие расчеты. Однако, формируя специальным образом матрицу плана, можно получить независимые значения $\boldsymbol{\beta}$. И эти величины будут характеризовать вклад каждого фактора в значение функции отклика.

Итак, задача заключается в определении общей формы записи функции отклика y'. В большинстве случаев вид этой функции, получаемый из теоретических соображений, является сложным для практического применения, а при неполном знании объекта вообще неизвестен. По данным причинам функцию целесообразно представить в универсальном, удобном для практического применения виде, чему соответствует представление в виде полинома. Тогда системой базисных функций является совокупность степенных функций с целыми неотрицательными значениями показателей степени. Полиномиальная форма представления функции отклика примет вид

$$y' = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_k x_k + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \ldots + \beta_{k-1,k}\, x_{k-1} x_k + + \beta_{11} x^2{}_1 + \ldots + \beta_{kk} x^2{}_k + \ldots + \varepsilon, \qquad (1.3)$$

где ε – случайная величина, характеризующая ошибку опыта.

Такая функция отклика линейна относительно неизвестных коэффициентов и будет полностью определена, если заданы степень полинома и коэффициенты.

Степень полинома обычно задается исследователем априорно и уточняется в ходе исследования. На практике наибольшее распространение получили полиномы первого и второго порядка, соответственно линейные и квадратичные модели. Коэффициенты полинома принято называть *эффектами факторов*.

Иногда функцию отклика целесообразно представить в другом виде, например, в виде степенной функции, так как достижение заданной точности требует применения полинома высокого порядка. Однако использование функций, нелинейных относительно неизвестных параметров, усложняет вычисления, затрудняет оценку их свойств.

В некоторых случаях задачу можно упростить путем искусственного преобразования нелинейной функции в линейную. При этом требуется соответствующее преобразование и результатов экспериментов.

Применение ТПЭ основано на ряде допущений, а именно [2, 6]: функция отклика содержит в своем составе неслучайную и случайную составляющую. Многие показатели качества автоматизированных систем обработки информации носят случайный характер. Это требует многократного повторения опытов в одних и тех же условиях в целях получения статистически устойчивых результатов, а получаемые оценки показателей должны обладать свойствами состоятельности, эффективности, несмещенности и достаточности. Оценки типовых показателей формируются путем усреднения результатов наблюдений. Поэтому при достаточно большом количестве наблюдений можно считать, что случайная составляющая е распределена по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием, что позволяет получить несмещенную оценку математического ожидания функции отклика в конкретной точке плана. Будем также считать, что величина е имеет дисперсию, не зависящую от значений факторов. Иначе говоря, результаты, полученные путем усреднения повторных опытов в каждой точке плана, представляют собой независимые, нормально распределенные случайные величины;

факторы $v_1, v_2, \ldots, v_k$ измеряются с пренебрежимо малой ошибкой по сравнению с ошибкой в определении величины y (учет помех в задании факторов приводит к трудно разрешимым проблемам в оценке коэффициентов функции отклика). Ошибка в определении значения функции отклика объясняется не столько погрешностью измерений, сколько влиянием на результат работы системы неучтенных или случайных факторов, например различиями в формируемой последовательности случайных чисел при статистическом моделировании; дисперсии среднего значения функции отклика в различных точках равны друг другу (выборочные оценки дисперсии однородны). Это означает, что при многократных повторных наблюдениях над величиной y_u при некотором наборе значений $v_{1u}, v_{2u}, \ldots, v_{ku}$, получаемая оценка дисперсии среднего значения не будет отличаться от оценки дисперсии, полученной при многократных наблюдениях для любого другого набора значений независимых переменных $v_{1s}, v_{2s}, \ldots, v_{ks}$.

Указанные допущения позволяют использовать для расчетов коэффициентов полинома МНК, который дает эффективные и несмещенные оценки коэффициентов и обеспечивает простоту проведения самих расчетов. Применение

МНК, вообще говоря, не требует соблюдения нормального распределения результатов наблюдения. Этот метод в любом случае дает решение, минимизирующее сумму квадратов отклонений результатов наблюдения от значений функции отклика. Допущение о нормальном распределении используется при проведении различного рода проверок, например, при проверке адекватности функции отклика и экспериментальных данных. Естественно, что точность оценок коэффициентов функции отклика повышается с увеличением числа опытов, по которым вычисляются коэффициенты.

2. КРИТЕРИИ ОПТИМАЛЬНОСТИ И ТИПЫ ПЛАНОВ

В настоящее время используется свыше 20 различных критериев оптимальности планов, которые подразделяются на две основные группы. К первой группе относят критерии, связанные с ошибками оценок коэффициентов, а ко второй – с ошибкой оценки поверхности отклика [2, 3, 6]. Далее будут охарактеризованы только те критерии, которые наиболее часто применяются при решении задач оптимизации, описания поверхности отклика и оценки влияния факторов.

Критерии первой группы представляют интерес для задач оптимизации, выделения доминирующих (наиболее значимых) параметров на начальных этапах решения оптимизационных задач или для выявления несущественных параметров в задачах восстановления закономерности функционирования объекта. Геометрическое истолкование свойств ошибок коэффициентов связано со свойствами эллипсоида их рассеяния, определяемого математическим ожиданием и дисперсией значений ошибок. Пространственное расположение, форма, и размер эллипсоида полностью зависят от плана эксперимента.

Критерию *D*-оптимальности соответствует минимальный объем эллипсоида рассеяния ошибок (минимум произведения всех дисперсий коэффициентов полинома). В соответствующем плане эффекты факторов максимально независимы друг от друга. Этот план минимизируют ожидаемую ошибку предсказания функции отклика. Критерию A-оптимальности соответствует план с минимальной суммарной дисперсией всех коэффициентов. Критерию E-оптимальности – план, в котором максимальная дисперсия коэффициентов будет минимальна.

Выбор критерия зависит от задачи исследования, так при изучении влияния отдельных факторов на поведение объекта применяют критерий E -оптимальности, а при поиске оптимума функции отклика – D-оптимальности. Если построение D-оптимального плана вызывает затруднения, то можно перейти к A-оптимальному плану, построение которого осуществляется проще.

Критерии второй группы используются при решении задач описания поверхности отклика, определения ограничений на значения параметров. Основным здесь является критерий G-оптимальности, который позволяет построить план с минимальным значением наибольшей ошибки в описании функции отклика. Применение G-оптимального плана дает уверенность в том, что в области планирования нет точек с чрезмерно большой ошибкой описания функции.

Среди всех классов планов основное внимание в практической работе уделяется ортогональным и ротатабельным планам.

Ортогональным называется план, для которого выполняется условие парной ортогональности столбцов матрицы планирования, в частности, для независимых переменных, где N – количество точек плана эксперимента, k – количество независимых

факторов. При ортогональном планировании коэффициенты полинома определяются независимо друг от друга – вычеркивание или добавление слагаемых в функции отклика не изменяет значения остальных коэффициентов полинома. Для ортогональных планов эллипсоид рассеяния ориентирован в пространстве так, что направления его осей совпадают с направлениями координат пространства параметров.

Использование *ротатабельных* планов обеспечивает для любого направления от центра эксперимента равнозначность точности оценки функции отклика (постоянство дисперсии предсказания) на равных расстояниях от центра эксперимента. Это особенно важно при решении задач поиска оптимальных значений параметров на основе градиентного метода, так как исследователь до начала экспериментов не знает направление градиента и поэтому стремится принять план, точность которого одинакова во всех направлениях. В ряде случаев при исследовании поверхности отклика требуется униморфность модели, а именно, соблюдение постоянства значений дисперсии ошибки в некоторой области вокруг центра эксперимента. Выполнение такого требования целесообразно в тех случаях, когда исследователь не знает точно расположение области поверхности отклика с оптимальными значениями параметров. Указанная область будет определена на основе упрощенной модели, полученной по результатам экспериментов.

По соотношению между количеством оцениваемых неизвестных параметров модели и количеством точек плана эксперимента все планы подразделяются на три класса: *ненасыщенные* – количество параметров меньше числа точек плана; *насыщенные* – обе величины одинаковы; *сверхнасыщенные* – количество параметров больше числа точек плана. Метод наименьших квадратов применяют только при ненасыщенном и насыщенном планировании, и он не применим для сверхнасыщенного планирования.

Для некоторых планов важную роль играет свойство *композиционности* . Так, композиционные планы для построения полиномов второго порядка получают добавлением некоторых точек к планам формирования линейных функций. Это дает возможность в задачах исследования сначала попытаться построить линейную модель, а затем при необходимости, добавив наблюдения, перейти к моделям второго порядка, используя ранее полученные результаты и сохраняя при этом некоторое заданное свойство плана, например его ортогональность.

Между критериями оптимальности и методами построения оптимальных планов экспериментов существует жесткая связь. Построение планов производится или с использованием каталогов планов или с использованием непосредственно методов планирования экспериментов, что является непростой задачей и требует достаточно высокой квалификации исследователя в области ТПЭ.

Кроме рассмотренных критериев в планировании экспериментов вполне естественно применяется критерий минимума числа экспериментов, т.е. среди всех планов желательно выбирать такой, который требует минимального числа опытов при соблюдении требований к качеству оценки функции или ее параметров.

Как было отмечено выше, одной из областей применения ТПЭ является решение задач оптимизации, причем непосредственно для поиска оптимальных решений используются градиентные методы. Вычисление оценки градиента осуществляется на основе обработки экспериментальных данных. Хотя градиентный метод оптимизации не является составной частью ТПЭ, в целях удобства освоения материала далее приведено его краткое изложение.

Применение методов планирования экспериментов вносит в типовую процедуру градиентных методов поиска свою специфику.

1. В задачах экспериментального исследования функция $f(V)$ обычно изначально неизвестна, ее вид выбирается относительно произвольно, а параметры устанавливается по результатам эксперимента. На начальных этапах исследования трудоемкость решения задачи оптимизации можно снизить, применяя неполные полиномы k-го порядка или линейные полиномы

$$y' = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_k x_k + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \ldots + \beta_{k-1,k}\, x_{k-1} x_k + \ldots + \beta_{12\ldots k}\, x_1 x_2 \ldots x_k + \varepsilon; \tag{2.1а}$$

$$y' = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_k x_k + \varepsilon. \tag{2.1б}$$

Таким образом, вместо самого градиента применяется его оценка. Оба вида полинома являются линейными относительно конкретного фактора. Количество членов полинома типа (2.1а) составляет 2^k, а для типа (2.1б) равно k+1. Теоретически оценки коэффициентов в точке оптимума должны стать равными нулю, что и будет признаком завершения поиска решения. Однако применение этих моделей может стать нерациональным в области, близкой к оптимуму, из-за больших относительных погрешностей в оценке коэффициентов указанных моделей. Поэтому для исследования области оптимума следует переходить к использованию полиномов более высокой степени.

2. Применение градиентных методов предполагает, что движение по градиенту может осуществляться в любом направлении изменения аргументов функции $f(V)$, т.е. ограничений на область допустимых значений аргументов нет. В практических задачах всегда существуют ограничения на значения параметров, поэтому при выборе направления движения следует учитывать это обстоятельство.

3. Значение градиента зависит от принятой системы перехода к кодированным значениям переменных, т.е. не является инвариантным к выбору центральной точки и интервала варьирования. Но знаки частных производных при переходе от одной системы координат к другой сохраняются. Поэтому направление перемещения в методе градиентного поиска не меняется при смене системы координат. Следовательно, в любой системе координат градиентный метод приведет к оптимуму, хотя скорость поиска и будет зависеть от выбранных значений центра и интервала варьирования переменных.

4. Рассмотренный выше способ определения шага крутого восхождения применяют только при описании поверхности отклика полными полиномами второй или более высокой степени. При анализе *линейных* функций определение шага изменения аргументов производится на основе неформальных процедур. Для полиномов (2.1а, б) шаг Δv_i^* изменения i-го фактора относительно

центра (в центре области планирования все нормализованные переменные равны нулю) определяется пропорционально соответствующей составляющей оценки градиента и величине интервала варьирования Δv_i

$$\Delta v_i^* = \Delta v_i \ \beta_i /[\beta_1^2 + \beta_2^2 + \ldots + \beta_k^2]^{0,5}. \qquad (2.2)$$

Новое значение основного уровня фактора $v_{i,\,1}$ в исходной шкале измерений составит величину

$$v_{i,\,1} = v_{i,\,0} + \Delta v_i^*.$$

5. Применение метода крутого восхождения в его классическом виде предполагает вычисление градиента на каждом этапе. А это означает необходимость проведения достаточно большого количества опытов. Бокс и Уилсон предложили в 1951 г. модификацию метода крутого восхождения. Они рекомендуют на начальном этапе поиска применять линейные полиномы для описания функции отклика. Значение градиента оценивается в начальной точке, после чего пошаговое движение по градиенту продолжается до попадания в частный оптимум (до тех пор, пока значение функции отклика возрастает при переходе от точки к точке). В точке частного оптимума с помощью факторного эксперимента снова определяется градиент. И пошаговое движение начинается по новому направлению. Так продолжается до попадания в область глобального экстремума. Эта область не может быть адекватно описана линейным уравнением. Поэтому переходят к более точному описанию поверхности отклика на основе полиномов второго порядка и уточнению положения точки глобального оптимума. Построение плана для определения полинома второй степени целесообразно осуществить путем добавления некоторых точек к "ядру", уже сформированному планированием для линейного приближения (такие планы получили наименование *композиционных*). В целом метод Бокса – Уилсона во многих случаях требует меньшего количества опытов возможно при несколько большем числе шагов.

6. Градиентные методы не обеспечивают гарантированного нахождения глобального максимума при

нарушении условия унимодальности функции отклика. Выбор начальной точки для крутого восхождения предопределяет область поиска локального экстремума. Поэтому при наличии априорных сведений о возможности существования нескольких локальных экстремумов, целесообразно осуществить решение задачи оптимизации для нескольких вариантов задания исходных значений параметров. Эти положения остаются в силе и при поиске минимума функции отклика по методу наискорейшего спуска.

7. Если эксперимент проводится на реальном объекте и требует больших затрат ресурсов, то поиск значений параметров может завершиться при получении удовлетворительных, а не оптимальных, значений функции отклика. Градиентный метод позволяет находить приемлемые решения и в этом случае.

Однако градиентный метод не всегда эффективен. Например, если поверхность функции отклика имеет овражный характер, то движение будет происходить с одного склона на другой с медленным продвижением к точке минимума. Для таких функций разработано несколько эвристических методов ускоренного продвижения вдоль оврага или гребня.

3. ПЛАНЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

3.1. Постановка задачи оптимизации

Поиск оптимальных значений параметров является одной из важных задач, решаемых при создании новых технических систем, управлении производством или технологическими процессами. В соответствии с теорией эффективности необходимо [1]:

сформировать критерий эффективности (функцию отклика в терминах ТПЭ). В большинстве случаев эффективность определяется совокупностью показателей, характеризующих частные свойства исследуемой системы и выполняемой ею операции. Критерий эффективности строится на множестве значений частных показателей с использованием теории полезности или методов векторной оптимизации. В некоторых случаях критерий эффективности удается построить на

множестве значений одного показателя, переведя все остальные показатели в разряд ограничений;
выделить управляемые и неуправляемые параметры (факторы) системы и среды, оказывающие существенное влияние на критерий эффективности;
определить ограничения на значения параметров.
Задача оптимизации заключается в нахождение экстремума функции отклика в области допустимых значений параметров. Чтобы найти экстремум, необходимо иметь описание поверхности отклика в интервалах варьирования параметров, что далеко не всегда удается получить исходя из теоретических соображений, так как функция отклика в аналитическом виде может быть априори неизвестна.

Реализация задачи оптимизации, основанная на применении ТПЭ, как и любой задачи экспериментального исследования, начинается с определения объекта анализа, цели исследования, изучении сущности исследуемого процесса, анализе имеющихся ресурсов, возможности проведения экспериментов с изучаемым объектом в необходимом диапазоне изменения факторов.
Объектом анализа выступает заданный критерий эффективности исследуемой системы, рассматриваемый как функция от существенных параметров системы и внешней среды. Система может представлять собой реальный физический объект или его модель – физическую или математическую (имитационную, сложную аналитическую).

Изучение процесса функционирования объекта позволяет выявить факторы, оказывающие существенное влияние на функцию отклика. Выбор существенных переменных потенциально определяет степень достижения адекватности получаемой модели: отсутствие в исходном перечне существенных параметров, да еще и произвольно меняющихся в ходе эксперимента, не позволяет правильно решить задачу оптимизации; включение несущественных параметров усложняет модель, вызывает значительное увеличение объема экспериментов, хотя по результатам исследования несущественность соответствующих параметров будет выявлена. Для каждой переменной следует определить диапазон и характер изменения (непрерывность или дискретность). Ограничения на диапазон изменений могут носить принципиальный или технический характер. Принципиальные ограничения факторов не могут быть нарушены при любых обстоятельствах. Эти ограничения задаются исходя из физических представлений (например, емкость устройств памяти всегда имеет положительное значение). Второй тип ограничений связан с технико-экономическими соображениями, например, с наличием соответствующего аппаратно-программного комплекса, принятой технологией обработки информации.

Выделение области изменения факторов является не формальной задачей, а основывается на опыте исследователя. В рамках области допустимых значений факторов необходимо выделить начальную область планирования эксперимента. Этот выбор включает определение основного (нулевого) уровня как исходной точки построения плана и интервалов варьирования. Интервал варьирования задает относительно основного уровня значения фактора, при которых будут производиться эксперименты. Обычно интервалы являются симметричными относительно центрального значения. Интервал варьирования должен отвечать двум ограничениям: его применение не должно приводить к выходу фактора за пределы области допустимых значений; он должен быть больше погрешности задания значений фактора (в противном случае уровни фактора станут не различимыми). В пределах этих ограничений выбор конкретного значения является неформальной процедурой, учитывающей ориентировочную информацию о кривизне поверхности функции отклика.

Фактор должен быть управляемым, т.е. экспериментатор может поддерживать его постоянное значение в течение всего опыта. Для фактора необходимо указать его конкретные значения и средства контроля. Сам фактор должен быть первичным, ибо сложно управлять фактором, который в свою очередь является

функцией других факторов. Для каждого фактора следует указать точность его задания и поддержания в ходе эксперимента.
Одновременное изменение факторов предполагает их совместимость, что означает осуществимость и безопасность всех их сочетаний. Необходимо также обеспечить независимость изменения каждого фактора, что означает возможность установления любого значения фактора вне связи со значениями других факторов.

Цель исследования, требуемая точность получаемых результатов, имеющиеся ресурсы ограничивают множество допустимых моделей функции отклика (с усложнением модели и повышением точности оценки показателей резко возрастает объем необходимых опытов) и соответственно предопределяют план проведения экспериментов.

3.2. Полный факторный эксперимент типа 2^k

На начальных этапах оптимизации для определения градиента применяют неполные полиномы второго порядка или линейные полиномы [2, 5, 6]. Вычисление оценок коэффициентов таких полиномов осуществляется на основе обработки результатов реализации наиболее простых планов, в которых каждый фактор принимает только два значения $v_{i,\,min}$ или $v_{i,\,max}$, расположенные симметрично относительно некоторого нулевого уровня или центра плана по данному фактору. Значения уровней варьирования выбирает исследователь, исходя из возможного диапазона изменения каждого фактора и возможности применения линейной аппроксимации функции отклика в выбранном диапазоне изменений параметра. Без ограничения общности можно считать, что кодированные значения x_i принимают значения – 1 и +1 соответственно (или просто – или +). Множество всех точек в k-мерном пространстве, координаты которых являются комбинациями "+" и "–", называется полным факторным планом или планом *полного факторного эксперимента* типа 2^k (ПФЭ). Количество точек в этом плане $N = 2^k$.

Для примера возьмем полный факторный эксперимент с тремя независимыми переменными x_1, x_2 и x_3, табл. 3.1.

Таблица 3.1

Матрица планирования								Вектор результатов
x_0	x_1	x_2	x_3	$x_1\ x_2$	$x_1\ x_3$	$x_2\ x_3$	$x_1\ x_2\ x_3$	y
+	–	–	–	+	+	+	–	y_1
+	–	–	+	+	–	–	+	y_2
+	–	+	–	–	+	–	+	y_3
+	–	+	+	–	–	+	–	y_4
+	+	–	–	–	–	+	+	y_5
+	+	–	+	–	+	–	–	y_6
+	+	+	–	+	–	–	–	y_7
+	+	+	+	+	+	+	+	y_8

Второй, третий и четвертый столбцы таблицы соответствуют собственно плану экспериментов, пятый – восьмой столбцы содержит значения произведений независимых переменных. Фиктивная переменная x_0 =1 (первый столбец) введена для единообразия записи расчетных формул коэффициентов полинома. Строки соответствуют опытам, например, первая строка характеризует эксперимент, в котором все независимые переменные находятся на нижнем уровне.

Существует несколько способов построения подобных матриц планирования. В частности можно воспользоваться приемом, характерным для записи последовательности двоичных чисел. В столбце последней переменной x_3 знаки меняются поочередно, в столбце предпоследней переменной x_2 – чередуются через два элемента, третьей справа переменной x_1 – через четыре элемента. Аналогично строится матрица для любого количества переменных, порядок перечисления переменных не играет роли. Столбцы с произведениями переменных вычисляются путем умножения значений элементов в соответствующих столбцах простых переменных.

Из анализа матрицы планирования легко видеть, что полный факторный эксперимент обладает свойствами:
ортогональности. Сумма парных произведений элементов любых двух различных столбцов равна нулю. В частности, для простых переменных

$$\sum_{u=1}^{N} x_{iu} x_{ju} = 0, \quad i \neq j, \; i, j = \overline{0, k};$$

симметричности. Сумма всех элементов любого столбца, за исключением первого, равна нулю, например

$$\sum_{u=1}^{N} x_{iu} = 0, \quad i = \overline{1, k};$$

нормированности. Сумма квадратов элементов любого столбца равна числу опытов, так для i-й переменной

$$\sum_{u=1}^{N} x_{iu}^2 = N, \quad i = \overline{0, k}$$

Первые два свойства обеспечивают независимость оценок коэффициентов модели и допустимость их физической интерпретации. Нарушение этих свойств приводит к взаимной зависимости оценок и невозможности придания смысла коэффициентам.

Включение в матрицу планирования переменных вида x_i^2 приведет к появлению единичных столбцов, совпадающих друг с другом и со столбцом x_0. Следовательно, нельзя будет определить, за счет чего получено значение β_0. Поэтому планы ПФЭ 2^k не применимы для построения функции отклика в виде полного полинома второй степени.

3.3. Оценки коэффициентов функции отклика

С помощью матрицы планирования, описанной в табл. 3.1, можно вычислить оценки коэффициентов неполного полинома третьей степени

$$y' = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta x_3 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \beta_{23} x_2 x_3 + \beta_{123} x_1 x_2 x_3$$

или линейной функции

$$y' = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3.$$

Первый вид полинома позволяет оценить не только влияние отдельных факторов, но и один из часто встречающихся видов нелинейности, когда эффект одного фактора зависит от уровня других факторов, т.е. присутствует эффект взаимодействия факторов. Эффект взаимодействия вида $x_i\ x_j$ называют парным, $x_i\ x_j\ x_k$ – тройным и т. д. С ростом количества факторов число возможных взаимодействий быстро увеличивается. Суммарно количество всех коэффициентов функции отклика такого типа равно числу опытов полного факторного эксперимента.

Оценки коэффициентов полинома определяются на основе метода наименьших квадратов и для рассматриваемого типа ПФЭ вычисляются по простым соотношениям [8, стр. 29]

$$\beta_i = \frac{1}{N}\sum_{u=1}^{N} x_{iu}\bar{y}_u, \quad i = \overline{0,k};$$

$$\beta_{i,\ldots,m} = \frac{1}{N}\sum_{u=1}^{N} x_{iu}\ldots x_{mu}\bar{y}_u, \quad i = \overline{1,k}, \quad m > i \qquad (3.1)$$

.

Здесь величина y соответствует значению отклика в указанной точке факторного пространства при отсутствии повторных опытов или является оценкой математического ожидания

$$\bar{y}_u = \frac{1}{r_u}\sum_{i=1}^{r_u} y_{ui}$$

значений функции отклика по всем r_u повторным опытам в данной точке. Повторные опыты проводятся в тех случаях, когда на функционирование системы оказывают влияние случайные воздействия. Количество повторных опытов в разных точках плана может различаться.

Допустима следующая интерпретация оценок коэффициентов:

β_0 соответствует значению функции отклика в центре проводимого эксперимента;

β_i равен приращению функции при переходе значения фактора *i* с нулевого уровня на верхний (это вклад соответствующего фактора в значение функции);

β_{ij} равен нелинейной части приращения функции при одновременном переходе факторов *i* и *j* с нулевого уровня на верхний и т.п.

Ошибки в определении коэффициентов полинома можно охарактеризовать соответствующей дисперсией. С учетом того, что кодированные значения факторов принимают значения +1 и – 1, оценка дисперсии коэффициента определяется соотношением

$$\sigma^2(\beta_i) = D\left[\frac{1}{N}\sum_{u=1}^{N} x_u \bar{y}_u\right] = \frac{1}{N^2}\sum_{u=1}^{N} D(\bar{y}_u) = \frac{1}{N}\left[\frac{1}{N}\sum_{u=1}^{N} D(\bar{y}_u)\right] \quad (3.2)$$

.

Следовательно, оценка дисперсии всех коэффициентов одинакова и определяется только дисперсией средних значений функции отклика и числом опытов. Эту формулу можно применять, если количество опытов во всех точках плана одинаково. При факторном эксперименте, в отличие от классического, одновременно варьируются все факторы, поэтому каждый коэффициент полинома определяется по результатам всех экспериментов, тем самым оценка дисперсии коэффициентов получается в *N* раз меньше средней дисперсии всех опытов. Оценка дисперсии среднего значения в конкретной точке плана

$$D(\bar{y}_u) = \sigma_u^2 / r_u\ ,$$

где σ_u^2 – оценка дисперсии функции отклика в точке *u*, r_u – число повторных опытов в этой точке плана [7, стр. 50]. Дисперсия оценок всех коэффициентов одинакова, поэтому ПФЭ рассмотренного типа являются ротатабельным.

При использовании неполных полиномов *k*-го порядка количество точек плана равно количеству оцениваемых параметров (насыщенное планирование). Поэтому не остается степеней свободы для проверки гипотезы об адекватности представления результатов эксперимента заданной математической моделью. Если применять полиномы первой степени, то тогда остаются степени свободы для проверки гипотезы об адекватности модели.

3.4. Дробный факторный эксперимент

С ростом количества факторов k число точек плана в ПФЭ растет по показательной функции 2^k. Планы ПФЭ позволяют получить несмещенные оценки градиента функции отклика в центральной точке, но в случае применения линейного полинома оказываются недостаточно эффективными по количеству опытов при большом числе независимых переменных, так как остается слишком много степеней свободы на проверку адекватности модели. Например, при $k = 5$ на проверку адекватности линейной модели остается 26 степеней. Хотя большое количество опытов и приводит к существенному снижению погрешности в оценке коэффициентов, все же такое число степеней свободы для проверки адекватности является чрезмерным.

Таким образом, в случаях, когда используются только линейные приближения функции отклика, количество опытов следует сократить, используя для планирования так называемые *регулярные дробные реплики* от ПФЭ, содержащие подходящее число опытов и сохраняющие основные свойства матрицы планирования. Реплика, включающая только половину экспериментов ПФЭ, называется полурепликой, включающая четвертую часть опытов – четвертьрепликой и т. д. Краткое обозначение указанных дробных реплик 2^{k-1}, 2^{k-2} соответственно.

Построение регулярной дробной реплики или проведение *дробного факторного эксперимента* (ДФЭ) типа 2^{k-p} предусматривает отбор из множества k факторов $k–p$ основных, для которых строится план ПФЭ. Этот план дополняется p столбцами, которые соответствуют остальным факторам. Каждый из этих столбцов формируется по специальному правилу, а именно, получается как результат поэлементного умножения не менее двух и не более $k–p$ определенных столбцов, соответствующих основным факторам. Иначе говоря, в дробных репликах p линейных эффектов приравнены к эффектам взаимодействия. Но именно такое построение матрицы планирования и позволяет обеспечить ее симметричность, ортогональность и нормированность.

Таблица 3.2

Матрица планирования				Вектор результатов
x_0	x_1	x_2	x_3	y
+	–	–	+	y_1
+	–	+	–	y_2
+	+	–	–	y_3
+	+	+	+	y_4

Правило образования каждого из p столбцов ДФП называют *генератором плана*. Каждому дополнительному столбцу соответствует свой генератор (для плана типа 2^{k-p} должно быть задано p различных генераторов). Генератор задается как произведение основных факторов, определяющее значение элементов соответствующего дополнительного столбца матрицы планирования. Примером записи генератора для плана 2^{3-1} служит выражение $x_3 = x_1x_2$, табл. 3.2. Матрица планирования ДФП типа 2^{k-p} содержит $k + 1$ столбец и $N = 2^{k-p}$ строк.

3.5. Оценки коэффициентов функции отклика в дробном факторном эксперименте

Применение дробных реплик ведет к смешиванию оценок параметров модели, а их построение предполагает исключение из рассмотрения некоторых взаимодействий факторов. Оценки смешиваются в связи с тем, что каждый из p столбцов дробного факторного плана совпадает с некоторым произведением основных факторов.

Запись плана в виде 2^{k-p} не дает полной характеристики регулярной дробной реплики, так как основные эффекты можно приравнять к различным эффектам взаимодействия. Правило смешивания, определяющее коррелированные основные эффекты и эффекты взаимодействия, удобно описывать с помощью *определяющего контраста реплики*. Определяющий контраст полуреплики получается путем умножения генерирующего соотношения на его же левую часть, а так как для любой кодированной переменной $x_i^2=1$, то левая часть формулы определяющего контраста всегда равна единице и обозначается I. В частности, для ДФП типа 2^{3-1} и генераторе $x_3 = x_1x_2$ имеет место определяющий контраст $I = x_1x_2x_3$ (генератор умножается на переменную x_3, следовательно, $x_3\,x_3 = I = x_1\,x_2\,x_3$).

Чтобы определить, с какими параметрами смешана оценка коэффициента данного фактора, следует умножить обе части определяющего контраста на этот фактор. Учитывая равенство $x_i^2=1$, получим порядок смешивания оценок коэффициентов при использовании конкретного плана. В рассматриваемом примере для плана 2^{3-1} и определяющего контраста $I = x_1x_2x_3$ порядок смешивания факторов следующий:

$$x_1 = x_1^2\,x_2\,x_3 = x_2\,x_3;\;\; x_2 = x_1\,x_2^2\,x_3 = x_1\,x_3;\;\; x_3 = x_1\,x_2\,x_3^2 = x_1\,x_2\,.$$

Оценки коэффициентов линейной модели для этого плана эксперимента не могут быть получены раздельно и будут смешанными:

$$\beta_1^*= \beta_1 + \beta_{23}\;;\;\; \beta_2^*= \beta_2 + \beta_{13}\;;\;\; \beta_3^*= \beta_3 + \beta_{12}\;.$$

Планы типа 2^{k-p} являются ортогональными для моделей с взаимодействиями. Поэтому для вычисления оценок коэффициентов получаются простые формулы, как и для случая ПФЭ

$$\beta_i^* = \frac{1}{N}\sum_{u=1}^{N} x_{iu}\bar{y}_u\,, \qquad i = \overline{0,\,k}\,.$$

Планы дробных реплик строят различным образом, но так, чтобы соблюдались основные свойства матрицы планирования. Например, ДФП 2^{3-1} можно представить одной из двух полуреплик, генераторами которых являются $x_3 = x_1x_2$ и $x_3 = -\,x_1x_2$ соответственно. Определяющие контрасты этих полуреплик: $x_3^2 = I = x_1x_2x_3$ и $x_3^2 = I = -\,x_1x_2x_3$.

В этих полурепликах смешивание факторов задается соотношениями:

$$а)\ x_1 = x_2x_3\,,\ \ x_2 = x_1x_3\,,\ \ x_3 = x_1x_2\,;$$
$$б)\ x_1 = -\,x_2x_3\,,\ \ x_2 = -\,x_1x_3\,,\ \ x_3 = -\,x_1x_2\,.$$

Коэффициенты линейного полинома в каждой полуреплике:

$$а)\ \beta_1^* = \beta_1 + \beta_{23}\,;\ \ \beta_2^* = \beta_2 + \beta_{13}\,;\ \ \beta_3^* = \beta_3 + \beta_{23}\,;$$
$$б)\ \beta_1^* = \beta_1 - \beta_{23}\,;\ \ \beta_2^* = \beta_2 - \beta_{13}\,;\ \ \beta_3^* = \beta_3 - \beta_{23}\,.$$

Реализовав обе полуреплики путем совместной обработки результатов экспериментов можно получить раздельные оценки для линейных эффектов и эффектов взаимодействия (такой вариант плана соответствует ПФЭ).

Разрешающая способность полуреплик (возможность раздельного определения коэффициентов уравнения) зависит от генерирующих соотношений. Так, если для плана 2^{4-1} выбрать генерирующее соотношение $x_4 = x_1x_2$, то получим реплику с контрастом $I = x_1x_2x_4$ и разрешающей способностью $x_1 = x_2x_4$ и т.д. Здесь линейные эффекты определяются совместно с парными взаимодействиями. Очевидно, что в первую очередь следует пренебречь взаимодействием более высоких порядков из-за их более низкой вероятности существования по сравнению с парными. У полуреплики с контрастом $I = x_1x_2x_3x_4$ или равноценным $I = -\,x_1x_2x_3x_4$ линейные эффекты будут определяться совместно уже только с тройными взаимодействиями, что повышает точность оценок параметров модели (потенциально величина смещения в оценке коэффициента уменьшается). С ростом количества независимых переменных растет разрешающая способность полуреплик, позволяя оценивать раздельно сначала линейные эффекты, затем парные, тройные взаимодействия и т. д. Но при этом растет и избыточность экспериментов.

Реплики можно строить высокой степени дробности, сокращая тем самым количество экспериментов. Пусть необходимо изучить влияние пяти переменных и известно, что все эффекты взаимодействия пренебрежимо малы. Для линейного приближения следует определить шесть коэффициентов, что потребует применения плана с количеством точек не менее шести. Ближайшее большее число, соответствующее целой степени 2, равно восьми, это дает возможность получить дробную реплику, эквивалентную ПФЭ 2^3, т. е. реплику 2^{5-2} или четвертьреплику. Для построения четвертьреплики необходимы два генерирующих соотношения. В целях построения такой реплики целесообразно пожертвовать тройным и одним из двойных взаимодействий. Пусть этим двойным взаимодействием будет x_1x_2. Тогда можно построить четыре различные четвертьреплики, каждая из которых задается двумя генерирующими соотношениями:

а) $x_4 = x_1x_2$, $x_5 = x_1x_2x_3$;
б) $x_4 = x_1x_2$, $x_5 = -x_1x_2x_3$;
в) $x_4 = -x_1x_2$, $x_5 = x_1x_2x_3$;
г) $x_4 = -x_1x_2$, $x_5 = -x_1x_2x_3$.

Определяющие контрасты каждой четвертьреплики задаются двумя соотношениями:

а) $I = x_1x_2x_4$, $I = x_1x_2x_3x_5$;
б) $I = x_1x_2x_4$, $I = -x_1x_2x_3x_5$;
в) $I = -x_1x_2x_4$, $I = x_1x_2x_3x_5$;
г) $I = -x_1x_2x_4$, $I = -x_1x_2x_3x_5$.

Из этой совокупности четвертьреплик следует выбрать только одну, например, выберем реплику, задаваемую первой парой генерирующих соотношений. Матрица планирования ДФП получается из матрицы ПФЭ 2^{k-p} для $k-p$ основных факторов добавлением p столбцов, элементы которых вычисляются по соответствующим генерирующим соотношениям, табл. 3.3.

Таблица 3.3

Матрица планирования						Вектор результатов
x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
+	–	–	–	+	–	y_1
+	+	–	–	–	+	y_2
+	–	+	–	–	+	y_3
+	+	+	–	+	–	y_4
+	–	–	+	+	+	y_5
+	+	–	+	–	–	y_6
+	–	+	+	–	–	y_7
+	+	+	+	+	+	y_8

Для полной характеристики разрешающей способности четвертьреплик вводят обобщающие определяющие контрасты, третий компонент которых получается путем перемножения попарно первых двух контрастов. Для выбранной четвертьреплики обобщающий определяющий контраст $I = x_1x_2x_4 = x_1x_2x_3x_5 = x_3x_4x_5$.

Все совместные оценки находятся путем умножения обобщающего определяющего контраста последовательно на x_1, x_2 и т.д. В рассматриваемом случае совместные оценки задаются соотношениями:

$x_1 = x_2x_4 = x_2x_3x_5 = x_1x_3x_4x_5,$

$x_2 = x_1x_4 = x_1x_3x_5 = x_2x_3x_4x_5,$

. . . .

$x_5 = x_1x_2x_4x_5= x_1x_2x_3 = x_3x_4$.

Оценки коэффициентов линейного полинома задаются соотношениями:

$$\beta_1^* = \beta_1 + \beta_{24} + \beta_{235} + \beta_{1345}\ ,$$

$$\beta_2^* = \beta_2 + \beta_{14} + \beta_{135} + \beta_{2345}\ ,$$

и т. д.

Разрешающая способность выбранной четвертьреплики невысокая – все линейные эффекты определяются совместно с парными взаимодействиями. Этой репликой можно пользоваться для оценки линейных эффектов при условии равенства нулю соответствующих парных взаимодействий. Если такой уверенности нет, то следует применить полуреплику (что требует в два раза большего количества точек плана эксперимента по сравнению с четвертьрепликой) с генерирующим соотношением $x_5 = x_1x_2x_3x_4$, пользуясь которым, можно разделить все линейные эффекты и парные взаимодействия.

Построение обобщающего определяющего контраста для реплик более высокой степени дробности производится аналогично четвертьреплике: исходные контрасты сначала перемножаются попарно, получаются контрасты первого уровня; затем контрасты первого уровня снова перемножаются попарно, получаются контрасты второго уровня и так далее, пока не будет исчерпана возможность перемножения. Если получается два и более одинаковых контрастов, то из них оставляется только один. Обобщающий определяющий контраст составляется путем перечисления выражений для всех сформированных контрастов.

Взаимодействие факторов, выбранных в качестве генераторов плана, может быть значимым или незначимым. Для построения дробных реплик следует выбирать незначимые взаимодействия, которые выбираются по физическим соображениям на основе априорных сведений. Следует учитывать, что ДФЭ позволяет получить несмещенную оценку градиента функции отклика тогда и только тогда, когда ее обобщающий определяющий контраст больше трех. Наличие смещения в оценке градиента увеличивает количество шагов оптимизации, вносит систематическую ошибку в описание функции отклика.

4. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

4.1. Предварительная обработка

После того, как составлен план проведения эксперимента, можно приступать к его проведению. Вопросы непосредственного осуществления эксперимента рассматривать не будем, а перейдем к обработке результатов. Сущность обработки результатов эксперимента во многом одинакова для различных областей применения – поиска оптимума функции, описания поверхности отклика и др.

Необходимо учитывать, что любой эксперимент сопровождается погрешностями (методическими, измерений) и содержит элементы неопределенности (случайности). Проведение повторных опытов не дает полностью совпадающих результатов. Поэтому процедура обработки должна учитывать эти обстоятельства.

Обработка результатов включает предварительную обработку результатов экспериментов, вычисление оценок коэффициентов функции отклика и проведение ряда проверок: однородности дисперсии воспроизводимости, адекватности модели и значимости коэффициентов [2, 5, 6].

Расчетные соотношения будут приведены в предположении, что в каждой точке плана производиться различное количество повторных опытов r_u.

В ходе предварительной обработки вычисляются следующие параметры для всех точек $u = \overline{1, N}$ плана экспериментов:

среднее значение функции отклика

$$\bar{y}_u = \frac{1}{r_u} \sum_{i=1}^{r_u} y_{u\,i};$$

несмещенная оценка дисперсии функции отклика

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{r_u - 1} \sum_{i=1}^{r_u} \left(y_{ui} - \bar{y}_u \right)^2.$$

Для данной величины количество степеней свободы $\varphi_u = r_u - 1$; оценка дисперсии среднего значения функции отклика *(оценка дисперсия воспроизводимости*)

$$D(\bar{y}_u) = \sigma_u^2 / r_u = D_u.$$

На основе частных оценок вычисляется средняя величина оценки *дисперсии воспроизводимости среднего значения функции отклика* по всей области планирования

$$\sigma^2(y) = \left\{ \sum_{u=1}^{N} (r_u - 1) D_u \right\} / \left\{ \sum_{u=1}^{N} (r_u - 1) \right\} = \left\{ \sum_{u=1}^{N} (r_u - 1) D_u \right\} / \left\{ \sum_{u=1}^{N} r_u - N \right\}. \qquad (4.1)$$

Эта оценка является несмещенной и ее можно рассматривать как случайную величину с количеством степеней свободы

$$\varphi(y) = \sum_{u=1}^{N} r_u - N.$$

Именно величину $\sigma^2(y)$ следует использовать как оценку дисперсии воспроизводимости среднего значения функции отклика вместо

$$\frac{1}{N}\sum_{u=1}^{N} D(\bar{y}_u)$$

в выражении (3.2).

4.2. Проверка воспроизводимости

Необходимым условием применения метода наименьших квадратов для расчета оценок коэффициентов модели является *однородность* оценок дисперсии воспроизводимости среднего значения функции отклика во всех точках плана.

Поэтому обязательным этапом обработки должна быть проверка статистической гипотезы об однородности совокупности дисперсий воспроизводимости. В условиях различного количества опытов в точках плана применяют критерии Фишера или Бартлетта [8, стр. 12].

Если количество повторных опытов в каждой точке плана достаточно велико (больше 7), то средние значения функции отклика можно считать распределенными по нормальному закону.

Проверка однородности по критерию Фишера сводится к проверке гипотезы о равенстве дисперсий двух нормально распределенных случайных величин:

из совокупности оценок дисперсии среднего значения функции отклика выбирается минимальное $D_{u\ \mathrm{min}}$ и максимальное $D_{u\ \mathrm{max}}$ значения с числом степеней свободы соответственно $\varphi_{u\ \mathrm{min}}$ и $\varphi_{u\ \mathrm{max}}$;

вычисляется значение критерия Фишера $F = D_{u\ \mathrm{max}}/D_{u\ \mathrm{min}}$, которое сравнивается с критическим значением $F_{\text{кр}} = F(\alpha;\ \varphi_{u\ \mathrm{max}};\ \varphi_{u\ \mathrm{min}})$, где α – уровень значимости (обычно α выбирают в пределах от 0,01 до 0,1). Критическая область является односторонней (альтернативная гипотеза допускает между проверяемыми оценками дисперсии соотношение $D_{u\ \mathrm{max}} > D_{u\ \mathrm{min}}$).

Критическое значение определяют по специальным таблицам (например, табл. П.1 приложения) или с использование стандартных функций математических пакетов;

гипотеза об однородности оценок дисперсии воспроизводимости в различных точках плана принимается, если условие $F <= F_{\text{кр}}$ выполняется, и отвергается в противном случае.
Существенным недостатком критерия Фишера является игнорирование всех оценок дисперсии воспроизводимости, кроме максимального и минимального значения.

Проверка однородности по Бартлетту учитывает оценки дисперсии воспроизводимости во всех точках плана и производится на основе вычисления критерия

$$B = \frac{2{,}303\left\{\varphi(y)\lg D_u - \sum_{u=1}^{N}(r_u - 1)\lg D_u\right\}}{1 + \frac{1}{3(N-1)}\left[\sum_{u=1}^{N}\frac{1}{(r_u - 1)} - \frac{1}{\varphi(y)}\right]}.$$

Случайная величина B при справедливости гиsпотезы об однородности дисперсий распределена приближенно как хи-квадрат с N–1 степенями свободы, если все $r_u > 3$. Следовательно, критическое значение $B_{\text{кр}} = \chi^2(\alpha;\ N-1)$, оно определяется по специальным таблицам или с использование стандартных функций математических пакетов. Если $B \le B_{\text{кр}}$, то гипотеза об однородности принимается, при $B > B_{\text{кр}}$ – отвергается.
Критерий Бартлетта чувствителен к отклонениям распределения от нормального, поэтому к результатам сравнения следует относиться осторожно, а при одинаковом объеме опытов в различных точках плана лучше применять критерий Кочрена [8, стр. 13].

Итак, если не выявлена неоднородность дисперсии воспроизводимости, то обработку результатов экспериментов можно продолжать дальше. В противном случае следует выявить и устранить причины неоднородности. Обычно неоднородность является следствием принятых решений по организации и проведению экспериментов.
Во-первых, в экспериментальном исследовании возможно не учтен некоторый существенный фактор (факторы), который изменялся в ходе опытов. Такой фактор (факторы) следует

выявить, включить в модель или обеспечить его стабильность в ходе исследований и повторить опыты;

Во-вторых, количество повторных опытов в точках плана с большой дисперсией функции отклика проведено недостаточно. Действительно, дисперсия функции отклика σ_u^2 может существенно различаться в разных точках плана. Так, дисперсия среднего количества заявок в очереди для одноканальной системы массового обслуживания при пуассоновском входном потоке и экспоненциально распределенном времени обслуживания равна $\rho/(1-\rho)^2$, где ρ – загрузка системы. Иначе говоря, эта дисперсия заведомо неоднородна при изменении загрузки. В частности, изменение загрузки с 0,8 до 0,9 приводит к увеличению дисперсии в 4,5 раза. Поэтому для обеспечения однородности дисперсии воспроизводимости среднего значения в точке плана при $\rho = 0{,}9$ следует провести в 4,5 раза больше повторных опытов по сравнению с точкой плана, в которой $\rho = 0{,}8$.

Неоднородность можно снизить за счет уменьшения интервала варьирования факторов или увеличения количества опытов в соответствующих точках плана. Изменение интервалов варьирования влечет необходимость повторения опытов во всех точках плана. Поэтому из указанных способов снижения неоднородности следует выбрать тот, который требует меньшего количества новых опытов.

После того, как установлена однородность дисперсии воспроизводимости, можно приступать к вычислению оценок коэффициентов функции отклика. Оценки коэффициентов функции отклика вычисляются по формулам (3.1). Результаты вычислений этих оценок всегда отличаются от нуля. Но это не значит, что они являются значимыми, т.е. сами коэффициенты не равны нулю. Проверку значимости оценок обычно осуществляют после проверки адекватности модели.

4.3. Проверка адекватности модели

Проверка адекватности математической модели данным эксперимента проводится только в случае ненасыщенного планирования на основе сопоставления дисперсии воспроизводимости среднего значения функции отклика $\sigma^2(y)$ и дисперсии адекватности. Оценка дисперсии адекватности при $N > m$ характеризует отклонения между результатами наблюдений и значениями, формируемыми по функции отклика

$$\sigma_a^2 = \frac{1}{N-m}\sum_{u=1}^{N}\left(\bar{y}_u - y'_u\right)^2, \quad N > m,$$

где m – количество оцениваемых коэффициентов модели;

$\bar{y}_u$ – среднее значение результатов наблюдения в u-й точке плана;

y'_u – значение отклика в этой же точке, предсказанное на модели.

Количество степеней свободы дисперсии адекватности $\varphi_a = N - m$. При насыщенном планировании нет степеней свободы и сумма отклонений равна нулю.

Проверка адекватности сводится к проверке гипотезы об однородности оценки дисперсии воспроизводимости $\sigma^2(y)$ с количеством степеней свободы $\varphi(y)$ и оценки дисперсии адекватности.

Проверка осуществляется по критерию Фишера аналогично рассмотренной выше проверке однородности дисперсий воспроизводимости.

Оценки дисперсий в формуле расчета критерия расставляются так, чтобы его величина была больше единицы, критическая область является двусторонней.

Если вычисленное значение критерия меньше критического, то нет оснований для сомнений в адекватности модели. Однако положительный исход статистической проверки не гарантирует достоверной адекватности, а тем более истинности модели (хотя и не противоречит такому предположению). Когда гипотеза отклоняется, следует вывод о неадекватности модели, следовательно, она заведомо не является истинной. Дальнейшее применение неадекватной модели обычно нецелесообразно, и надо принять меры по ее совершенствованию.

Причиной неадекватности могут являться: ошибки в организации и проведении опытов, например неконтролируемое изменение неучтенных в модели факторов; погрешности в задании исходных данных и в измерении результатов; большой размах варьирования факторов и другие причины. Иначе говоря, анализ причин неадекватности требует серьезного изучения сущности исследуемого процесса и методов его исследования.

4.4. Проверка значимости оценок коэффициентов

Проверка значимости оценок коэффициентов полинома производится на основе проверки статистической гипотезы о равенстве математического ожидания случайной величины нулю, т.е. проверки условия $b_i = 0$ для всех коэффициентов. Проверка осуществляется с помощью критерия Стьюдента

$$t_i = (|\beta_i| - 0)/\ \sigma(\beta_i) = |\beta_i|\ /\ \sigma(\beta_i).$$

Критическое значение $t_{кр}=t(\alpha;\ \varphi(y))$ находится стандартным образом: критическая область является двусторонней, так как коэффициент может быть положительным или отрицательным; количество степеней свободы соответствует количеству степеней свободы для оценки дисперсии воспроизводимости $\varphi(y)$.

Если вычисленное значение критерия больше $t_{кр}$, то данный коэффициент отличается от нуля и оставляется в уравнении функции отклика, иначе коэффициент незначим. Отсутствие значимости коэффициента в моделях описания поверхности отклика говорит о целесообразности исключения соответствующего слагаемого из уравнения (частный градиент равен нулю).

После проверки значимости коэффициентов может оказаться, что все коэффициенты незначимы. Эти выводы являются следствием одной их следующих причин:

достигнута область оптимума функции отклика. Следует перейти к построению функции на основе полных полиномов второго порядка;

интервал варьирования факторов слишком мал. Необходимо увеличить интервал варьирования факторов;

отклик системы не зависит от выбранных факторов. В выбранной области значений факторы не оказывают влияние на функцию отклика или для анализа выбраны несущественные факторы.
Формальных правил выявления соответствующих ситуаций не существует.

Рассмотренные этапы обработки результатов экспериментов должны выполняться не только в случае полного или дробного факторного эксперимента, но и при реализации других планов оптимизации и описания поверхности отклика.
В условиях относительно небольшого влияния случайности на значение функции отклика (например, случайные ошибки измерительных приборов) в каждой точке плана проводится только по одному опыту. Очевидно, что в такой ситуации оценка дисперсии воспроизводимости невозможна.

Следовательно, проверки однородности дисперсии воспроизводимости и адекватности модели не проводятся. И только в условиях ненасыщенного планирования возможна проверка значимости коэффициентов полинома, если в качестве дисперсии оценки коэффициента взять величину $\sigma^2(\beta_i) = \sigma_a^2/N$ с количеством степеней свободы $\varphi_a = N–m$..

5. ПЛАНЫ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ОТКЛИКА

5.1. Композиционные планы

Применение линейных планов совместно с методом градиентного поиска оптимума позволяет достичь окрестностей точки оптимума. Поиск оптимального решения в этой области требует перехода от линейных моделей к моделям более высокого порядка – как минимум к полиномам второй степени [2, 6]. Полиномы второго порядка содержит

$$N = (k+1)(k+2)/2$$

эффектов:

$$y' = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i + \sum_{i,\,j=1}^{k} b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{k} b_{ii} x_i^2 \,, \quad j > i \tag{5.1}$$

Построение такой модели требует применения плана, в котором каждая переменная принимает хотя бы три различных значения. Существуют различные подходы к построению планов второго порядка. Можно воспользоваться ПФЭ типа 3^k, но такие планы обладают большой избыточностью. Например, для трех переменных количество точек плана составит 27, а количество оцениваемых коэффициентов в функции отклика равно 10. В соответствии с идеей пошагового эксперимента планирование рационально осуществлять путем добавления специально подобранных точек к “ядру”, образованному планированием для линейного приближения. Такие планы называют *композиционными* (последовательными), они позволяют использовать информацию, полученную в результате реализации линейного плана.

Композиционные планы используются обычно на заключительном этапе исследования, когда модель приходится подбирать последовательно, начиная с простейшего линейного уравнения, которое потом достраивается до полной квадратичной формулы. В этом случае композиционные планы дают выигрыш по числу опытов по сравнению с другими планами. Эти планы можно применять и при непосредственном построении функции отклика в виде полинома (5.1).

Решение подобных задач основано на применении ортогональных или ротатабельных *центральных композиционных планов* (ЦКП). Эти планы используют в качестве ядра полный факторный эксперимент или минимально возможные регулярные дробные реплики типа 2^{k-p}. В качестве дробной реплики применяют такую, в которой два любых парных взаимодействия по модулю не равны друг другу

$$|x_i x_j| \neq |x_s\, x_z| \qquad (5.2)$$

для любых попарно различных индексов. Именно план ПФЭ или дробные реплики, удовлетворяющие указанному условию, служат ядром ЦКП. На практике широкое распространение получили два типа ЦКП, известные как планы Бокса и Хартли. Понятие “центральный” означает, что факторы принимают значения, симметричные относительно центра плана.

Центральный композиционный план второго порядка называют планом Бокса, если его ядром является ПФЭ 2^k или регулярная реплика типа 2^{k-p}, для которой парные взаимодействия не равны по модулю линейным факторам:

$$x_i \neq \pm x_s x_z;\ s \neq z;\ i, s, z = 1, 2, \ldots, k$$

и, кроме того, выполняется условие (5.2). Применение ПФЭ или регулярных реплик, отвечающих этим условиям, позволяет получить несмещенные оценки коэффициентов модели (5.1). Из условий построения дробной реплики следует, что разрешающая способность ядра плана должна быть больше четырех, т.е. определяющий контраст должен содержать не менее пяти переменных. Следовательно, ядром плана Бокса при $k < 5$ является ПФЭ, а при $k\ ^{3}\ 5$ может быть ДФЭ.

План Бокса можно сделать ортогональным либо ротатабельным. Но нельзя добиться одновременного и строго соблюдения обоих свойств. В некоторых случаях ЦКП можно сделать *приближенно* и ортогональным, и ротатабельным, если вначале построить ротатабельный план, а затем подобрать необходимое количество опытов в центральной точке.

Центральный композиционный план второго порядка называют планом Хартли, если его ядром является регулярная реплика типа 2^{k-p}, в которой некоторые парные взаимодействия равны по модулю линейным факторам. Иначе говоря, ЦКП второго порядка будет или планом Бокса или планом Хартли. Планы Хартли обычно более экономны по числу опытов, чем планы Бокса, но уступают им по точности оценивания коэффициентов, кроме того, их нельзя сделать ни ортогональными, ни ротатабельными. Планы Хартли целесообразно применять, если известно, что часть эффектов b_j или b_{ju} в модели отсутствует (следовательно, простые эффекты можно смешивать с парными взаимодействиями, не теряя в разрешающей способности плана) или тогда, когда дисперсия наблюдений относительно мала.

5.2. Ортогональные центральные композиционные планы

В планах Бокса к ядру, построенному на основе ПФЭ или ДФЭ, добавляется одна точка в центре плана с координатами (0, 0, ..., 0) и $2k$ "звездных" точек с координатами
(± γ, 0, ..., 0), ..., (0, 0, ..., ± γ).

Построенный таким образом план будет ЦКП второго порядка. Общее точек плана при использовании композиционного планирования составит $N=N_0+2k+1$, где N_0 – количество точек ядра плана. В табл. 5.1 и 5.2 содержится описание соответствующих матриц планирования для ЦКП при k=2. Количество опытов для данного плана $N=2^2+2\cdot 2+1=9$. Аналогично строятся ЦКП для произвольного числа факторов, при этом каждый фактор варьируется на пяти уровнях: – γ; – 1; 0; 1; γ.

Таблица 5.1

Ядро плана	
x 1	x 2
+	+
–	+
+	–
–	–

Таблица 5.2

Дополнительные точки	
x 1	x 2
γ	0
–γ	0
0	γ
0	–γ
0	0

В матрице плана второго порядка не у всех столбцов соблюдается условие симметрии и не все пары столбцов ортогональны. Например, рассмотрим ЦКП второго порядка для трех переменных, табл. 5.3.

Таблица 5.3

План	x_0	x_1	x_2	x_3	$x_1\ x_2$	$x_1\ x_3$	$x_2\ x_3$	x_1^2	x_2^2	x_3^2
ПФЭ	+	–	–	–	+	+	+	+	+	+
	+	+	–	–	–	–	+	+	+	+
	+	–	+	–	–	+	–	+	+	+
	+	+	+	–	+	–	–	+	+	+
	+	–	–	+	+	–	–	+	+	+
	+	+	–	+	–	+	–	+	+	+
	+	–	+	+	–	–	+	+	+	+
	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
Звездный	+	$-\gamma$	0	0	0	0	0	γ^2	0	0
план	+	g	0	0	0	0	0	γ^2	0	0
	+	0	$-\gamma$	0	0	0	0	0	γ^2	0
	+	0	g	0	0	0	0	0	γ^2	0
	+	0	0	$-\gamma$	0	0	0	0	0	γ^2
	+	0	0	g	0	0	0	0	0	γ^2
Центр	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Суммы

$$\sum_{u=1}^{N} x_{iu}^2 \neq 0, \sum_{u=1}^{N} x_{iu}^2 x_{ju}^2 \neq 0,$$

так как

$$x_{iu}^2 \neq 0$$

для всех строк плана.

Для устранения асимметрии и нарушений ортогональности ЦКП Бокса необходимо провести преобразование квадратичных параметров и специальным образом выбрать величину плеча g. Чтобы добиться соблюдения свойства симметричности следует перейти от x_i^2 к центрированным величинам $x_i^* = x_i^2 - x^2_{i\ \text{ср}}$ (сумма центрированных величин равна нулю). Среднее значение $x^2_{i\ \text{ср}}$, как видно из табл. 5.3, для всех x_i^2 одинаково и равно

$$c = (N_0+2\gamma^2)/N. \qquad (5.3)$$

Тогда исходную квадратичную модель (5.1) можно преобразовать

$$y' =\beta_0 + \beta_1 x_1+ \ldots + \beta_1 x_k + \beta_{12} x_1 x_2 + \ldots + \beta_{k-1,\,k}\, x_{k-1} x_k+$$
$$+\beta_{11}(x_1^2 - x^2_{1\ \text{ср}} + x^2_{1\ \text{ср}}) + \ldots + \beta_{kk}(x_k^2 - x^2_{k\ \text{ср}} + x^2_{k\ \text{ср}}) =$$
$$= d_0 + \beta_1 x_1+ \ldots + \beta_1 x_k + \beta_{12} x_1 x_2 + \ldots + \beta_{k-1,\,k}\, x_{k-1} x_k+\beta_{11} x_1^* + \ldots + \beta_{kk} x_k^*,$$
где $d_0 = \beta_0 + \beta_{11}\, x^2_{1\ \text{ср}} + \ldots + \beta_{k-1,\,k}\, x^2_{k\ \text{ср}} = \beta_0 + c(\beta_{11} + \ldots + \beta_{k-1,\,k})$.

Исходная и преобразованная модели эквивалентны, в них все коэффициенты, за исключением нулевого, совпадают.
После преобразования получим матрицу планирования, табл. 5.4.

Таблица 5.4

План	x_0	x_1	x_2	x_3	$x_1\,x_2$	$x_1\,x_3$	$x_2\,x_3$	x_1^*	x_2^*	x_3^*
ПФЭ	+	–	–	–	+	+	+	1–с	1–с	1–с
	+	+	–	–	–	–	+	1–с	1–с	1–с
	+	–	+	–	–	+	–	1–с	1–с	1–с
	+	+	+	–	+	–	–	1–с	1–с	1–с
	+	–	–	+	+	–	–	1–с	1–с	1–с
	+	+	–	+	–	+	–	1–с	1–с	1–с
	+	–	+	+	–	–	+	1–с	1–с	1–с
	+	+	+	+	+	+	+	1–с	1–с	1–с
Звездный	+	$-\gamma$	0	0	0	0	0	γ^2–с	–с	–с
план	+	γ	0	0	0	0	0	γ^2–с	–с	–с
	+	0	$-\gamma$	0	0	0	0	–с	γ^2–с	–с

	+	0	γ	0	0	0	0	–c	γ^2–c	–c
	+	0	0	–γ	0	0	0	–c	–c	γ^2–c
	+	0	0	γ	0	0	0	–c	–c	γ^2–c
Центр плана	+	0	0	0	0	0	0	–c	–c	–c

Нетрудно заметить, что в этой таблице суммы элементов по всем столбцам, за исключением столбца x_0, равны нулю, т.е. в преобразованной таблице соблюдается свойство симметричности. Но столбцы квадратичных членов не являются ортогональными при произвольных значениях γ

$$\sum_{u=1}^{N}(x_{iu}^2 - c)(x_{ju}^2 - c) = \sum_{u=1}^{N} x_{iu}^* x_{ju}^* \neq 0, \quad i \neq j$$

Ортогонализация столбцов, т. е. приравнивание

$$\sum_{u=1}^{N} x_{iu}^* x_{ju}^*$$

к нулю, достигается специальным выбором величины γ. Это значение величины γ находится из уравнения

$$\sum_{u=1}^{N} x_{iu}^{*} x_{ju}^{*} = N_0(1-c)^2 - 4c(\gamma^2 - c) + (2k-4)c^2 + c^2 = 0$$

или

$$N_0 - 2cN_0 + N_0 c^2 - 4c\gamma^2 + 4c^2 + 2kc^2 - 4c^2 + c^2 =$$
$$N_0 - 2(N_0 + 2\gamma^2)c + c^2 (N_0 + 2k + 1) = N_0 - 2c^2 N + c^2 N = 0.$$

Следовательно, $c^2N = N_0$. Тогда $c = (N_0 / N)^{1/2}$. Подставим найденное значение величины c в уравнение (5.2)

$$(N_0 / N)^{1/2} = (N_0 + 2\gamma^2)/N.$$

Решив уравнение, найдем величину γ, которая придает матрице планирования (в том числе табл. 5.4) свойство ортогональности

$$\gamma = \{[(N N_0)^{1/2} - N_0]/2\}^{1/2}. \qquad (5.3)$$

Значения g, обеспечивающие ортогональность, например, для ядер 2^2, 2^3, 2^4, 2^{5-1}, составляют соответственно 1; 1,215; 1,414; 1,547.

Оценки коэффициентов регрессии определяются по модифицированной матрице независимых переменных, табл. 5.4:

$$\beta_i = \sum_{u=1}^{N} x_{iu} \bar{y}_u / \sum_{u=1}^{N} x_{iu}^2, \quad i = \overline{1,m}$$

В приведенной формуле m равно числу сочетаний из k+2 по два и обозначает общее количество оцениваемых коэффициентов полинома, за исключением нулевого.

Оценка коэффициента

$$d_0 = \sum_{u=1}^{N} \bar{y}_u / N$$

,

тогда

$$\beta_0 = d_0 - c\sum_{j=1}^{k} \beta_{jj}$$

.

Оценки дисперсии коэффициентов

$$\sigma^2(\beta_i) = \sum_{u=1}^{N} x_{iu}^2 \sigma^2(\bar{y}_u) / \left[\sum_{u=1}^{N} x_{iu}^2\right]^2; \quad \sigma^2(d_0) = \sum_{u=1}^{N} \sigma^2(\bar{y}_u) / N^2$$

;

$$\sigma^2(\beta_0) = \sigma^2(d_0) + c^2 \sum_{i=1}^{k} \sigma^2(\beta_{ii})$$,

где $\sigma^2(\bar{y}_u)$ – оценка дисперсии среднего значения функции отклика в u-й точке плана.

Оценка дисперсии функции отклика

$$\sigma^2(y) = \sigma^2(\beta_0) + \sum_{1\le i\le k} x_i^2 \sigma^2(\beta_i) + \sum_{1\le i<j\le k} x_i^2 x_j^2 \sigma^2(\beta_{ij}) + \sum_{1\le i\le k} (x_i^2 - c)^2 \sigma^2(\beta_{ii})$$.

Оценки дисперсии коэффициентов являются различными, так как вычисляются по разным совокупностям точек плана. Оценка дисперсии функции отклика зависит не только от расстояния до заданной точки от центра, но и от ее положения в пространстве, т. е. ортогональный план второго порядка не являются ротатабельным.

Проверка однородности дисперсии воспроизводимости, адекватности модели, значимости коэффициентов полинома в случае применения ортогональных ЦКП второго порядка осуществляется по рассмотренной выше схеме.

5.3. Ротатабельные центральные композиционные планы

В некоторых случаях ортогональное планирование второго порядка не отвечает потребностям практики – при описании поверхности отклика, особенно в окрестностях точки оптимума, более значимой является оценка дисперсии уравнения в целом, чем оценка дисперсии отдельных коэффициентов полинома. В этом случае обычно стремятся к равномерности распределения информации в уравнении функции отклика по всем направлениям. Такому положению отвечают ротатабельные планы. Кроме сказанного, подобные планы второго порядка позволяют минимизировать систематические ошибки, связанные с неадекватностью представления результатов полиномами второго порядка. Но построение ротатабельного плана второго порядка более сложно, чем ортогонального, а сама задача построения не имеет однозначного решения. Один из подходов к построению таких планов состоит в следующем [2].

Путем специального подбора звездного плеча γ ЦКП Бокса можно сделать ротатабельным, иначе говоря, ЦКП Бокса можно сделать или ортогональным или ротатабельным.

Точки ротатабельного ЦКП Бокса второго порядка располагают на концентрических гиперсферах, количество которых не менее двух. Первая гиперсфера может быть вырожденной, т. е. представлять собой центральную точку плана, ее радиус $\rho_1 = 0$. Именно такая сфера часто используется на практике.

Вторая гиперсфера соответствует вписанному в нее кубу, выбранному в качестве ядра плана. Для ядра $x_i = 1$, следовательно, радиус этой гиперсферы

$$\rho_2 = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2)^{1/2} = (k)^{1/2}.$$

Ядро представляет собой ПФЭ вида 2^k или ДФЭ вида 2^{k-p} , причем должно соблюдаться условие $(k - p)/4 > 3/4$. Следовательно, с учетом ограничений на ЦКП Бокса, если $k \geq 5$, то в качестве ядра можно использовать полуреплику, если $k \geq 8$, ядром может служить четверть реплика.

Третья гиперсфера имеет радиус $r_3 = 2^{k/4}$ для ядра в виде ПФЭ и радиус $r_3 = 2^{(k-p)/4}$ для ядра в виде ДФЭ.

Таким образом, каждый фактор в ротатабельном ЦКП Бокса варьируется на пяти уровнях. В некоторых случаях радиусы второй и третьей гиперсферы совпадают:

$n = 2$:

$$\rho_2 = 2^{1/2},\ \rho_3 = 2^{2/4} = 2^{1/2};$$

$n = 8$ и $p = 2$:

$$\rho_2 = 8^{1/2} = 2^{3/2},\ \rho_3 = 2^{(8-2)/4} = 2^{3/2}.$$

Пример 5.3.1. Построить матрицу ротатабельного ЦКП Бокса второго порядка для трех факторов.

Решение.

Ядром плана является ПФЭ вида 2^3 (радиус соответствующей гиперсферы $\rho_2 = 3^{1/2} = 1{,}732$). Звездные точки располагаются на гиперсфере с радиусом $\rho_3 = 2^{3/4} = 1{,}682$ и имеют координаты (

1,682; 0; 0), (0; 1,682; 0), (0; 0; 1,682). Матрица планирования включает три гиперсферы и соответствует табл. 5.3, в которой γ = 1,682. План содержит 15 точек и является ненасыщенным – количество оцениваемых коэффициентов 10. В табл. 5.5 приведены минимально необходимые сведения для составления рассмотренного вида ротатабельных ЦКП.

Таблица 5.5

Количество факторов	Число точек ПФЭ	Число звездных точек	Значение γ
2	4	4	1,414
3	8	6	1,682
4	16	8	2,000
5	32	10	2,378
5, полуреплика	16	10	2,000
6	64	12	2,828
6, полуреплика	32	12	2,378
7	128	14	3,364
7, полуреплика	64	14	2,828

Коэффициенты модели и их дисперсии рассчитываются на основе использования обратной матрицы по формулам :

$$A = 1/\left[2\lambda_4\left((k+2)\lambda_4 - k\lambda_2^2\right)\right];$$

$$\lambda_2 = \sum_{u=1}^{N} x_{iu}^2; \qquad \lambda_4 = \frac{1}{3N}\sum_{u=1}^{N} x_{iu}^4;$$

$$\beta_0 = \frac{A}{N}\left[2\lambda_4^2(k+2)\sum_{u=1}^{N}\bar{y}_u - 2\lambda_2\lambda_4\sum_{i=1}^{k}\sum_{u=1}^{N} x_{iu}^2\bar{y}_u\right];$$

$$\beta_i = \frac{1}{N\lambda_2}\sum_{u=1}^{N} x_{iu}\bar{y}_u;$$

;

$$\beta_{ii} = \frac{A}{N}\left\{\left[(k+2)\lambda_4 - k\lambda_2^2\right]\sum_{u=1}^{N} x_{iu}^2\bar{y}_u + (\lambda_2^2 - \lambda_4)\sum_{i=1}^{k}\ \sum_{u=1}^{N} x_{iu}^2\bar{y}_u - 2\lambda_2\lambda_4\sum_{u=1}^{N}\bar{y}_u\right\}$$

$$\beta_{ij} = \frac{1}{N\lambda_4}\sum_{u=1}^{N} x_{iu}x_{ju}\bar{y}_u$$

;

$$\sigma^2(\beta_0) = 2A\lambda_4^2(k+2)\sigma^2(\bar{y})/N$$

;

$$\sigma^2(\beta_i) = \sigma^2(\bar{y})/(N\lambda_2)$$

;

$$\sigma^2(\beta_{ij}) = \sigma^2(\bar{y})/(N\lambda_4)$$

;

$$\sigma^2(\beta_{ii}) = A\left[\lambda_4(k+1) - (k-1)\lambda_2^2\right]\sigma^2(\bar{y})/N$$

.

Представленные формулы справедливы для ротатабельного планирования при любом количестве независимых переменных. Такое планирование не позволяет получить независимые оценки для всех коэффициентов модели, коррелированными оказываются коэффициенты (β_0, β_{ii}) и (β_{ii}, β_{ij}). Взаимную связь этих пар коэффициентов можно охарактеризовать ковариациями:

$$\mathrm{cov}(\beta_0, \beta_{ii}) = -2\sigma^2(\tilde{y})\,\lambda_4\,A/N;$$

$$\mathrm{cov}(\beta_{ii}, \beta_{ij}) = \sigma^2(\tilde{y})\,(1-\lambda_4)A/N.$$

Проверка однородности дисперсии воспроизводимости, адекватности модели и значимости коэффициентов модели производится по схеме, рассмотренной в разделе 4.

Если повторные наблюдения имеются только в центре плана, то

$$\bar{y}_0 = \frac{1}{n_0}\sum_{u=1}^{n_0} y_{0u}$$

и величина

$$\sigma_v^2 = \frac{1}{n_0 - 1}\sum_{u=1}^{n_0}(y_{0u} - \bar{y}_0)^2$$

будет несмещенной оценкой дисперсии ошибок наблюдения. При ненасыщенном планировании остаточная сумма

$$S_R^2 = \sum_{u=1}^{N} r_u(\bar{y}_u - y'_u)^2$$

отличается от нуля. Здесь – величина, предсказанная уравнением модели, – найденная экспериментально. Величина

$$\sigma_R^2 = S_R / [N-(k+1)(k+2)/2]$$

характеризует неадекватность модели и также является несмещенной оценкой дисперсии ошибок наблюдения.

На основании рассчитанных величин можно провести все необходимые проверки коэффициентов и модели в целом.

Иногда интерес представляет информация о функции отклика в некоторой окрестности центра плана. В этом случае следует добиться одинаковой погрешности модели внутри гиперсферы единичного радиуса. План, обеспечивающий такое свойство функции отклика, называется униформ-ротатабельным. Для его формирования достаточно обеспечить равенство дисперсии в центре плана ($\rho = 0$) и на поверхности гиперсферы радиуса $\rho = 1$. Этого добиваются подбором числа наблюдений n_0 в центре плана, а именно параметр λ_4 следует взять равным положительному корню квадратного уравнения

$$2\lambda_4(\lambda_4 - 1)(k + 2) + \lambda_4(k + 1) - (k - 1) = 0.$$

Рассмотренное композиционное планирование представляет собой один из возможных подходов к построению ротатабельных планов второго порядка.

5.4. Композиционные планы типа B_n

Планы типа $\boldsymbol{B_n}$ представляют собой симметричные планы второго порядка с ядром в виде ПФЭ 2^k или ДФЭ 2^{k-p}, дополненные $2k$ звездными точками с плечом g =1 и опытами в центре плана. Иначе говоря, эти планы состоят из 2^k (2^{k-p}) вершин k-мерного гиперкуба с координатами ±1, из $2k$ центров (n–1)-мерных граней и некоторого числа опытов в центре гиперкуба. Количество точек плана с ядром из ПФЭ составляет $N = 2^k + 2k + 1$ (для ДФЭ $N = 2^{k-p} + 2k + 1$) при числе точек в центре гиперкуба равном единице. В каждой точке проводится равное число опытов. Планы этого типа имеют минимально количество уровней варьирования факторов, равное трем, что позволяет более точно выдерживать режимы работы изделий при натурных испытаниях по сравнению с планами, в которых требуется большее число уровней изменения управляемых переменных. Планы типа $\boldsymbol{B_n}$ близки к *D*- и *G*-оптимальным планам.

Обычно результаты опытов в нулевой точке служат для проверки гипотезы об адекватности модели экспериментальным данным. Если оценку параметров выполнять по результатам опытов в звездных точках и точках ядра, то [2]

$$\beta_0 = \frac{1}{2(k-1)}\left(\sum_{u=N_1+1}^{N} \bar{y}_u - \frac{1}{2^{n-1-p}}\sum_{u=1}^{N_1} \bar{y}_u\right);$$

$$\beta_{ii} = \frac{1}{2}\sum_{u=N_1+1}^{N} x_{iu}^2 \bar{y}_u - \beta_0;$$

$$\beta_i = (2 + 2^{k-p})^{-1}\sum_{u=1}^{N} x_{iu}\bar{y}_u;$$

$$\beta_{ij} = (2^{k-p})^{-1}\sum_{u=1}^{N} x_{iu}x_{ju}\bar{y}_u,$$

где N_1 – число точек ядра плана; – среднее значение отклика в *u*-й точке, полученное по *r* опытам. Если некоторые коэффициенты незначимы, то остальные уточняются по специальным формулам.

5.5. Каталоги оптимальных планов

Построение оптимальных планов для произвольных функций отклика представляет сложную задачу. В интересах облегчения решения такой задачи для некоторых типовых функций отклика составлены каталоги оптимальных планов [5, 9].

Рассмотрим некоторые из них для случаев, когда многомерное пространство допустимых значений факторов представляет собой куб или шар.

Соответственно допустимые области значений факторов должны удовлетворять условиям:
для куба $-1 <= x_i <= 1$, $i= 1, 2, \ldots, k$;
для шара $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 <= 1$.

1. Функция отклика представляет собой полином порядка q одного фактора (k = 1)

$$y' = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_q x^q, \; q = 1, 2, \ldots .$$

Примеры A-оптимальных планов представлены в табл. 5.6, D-оптимальных планов – в табл. 5.7. Соблюдение свойства оптимальности планов требует выполнения определенных соотношений по количеству реализаций в каждой точке плана. Это соотношение задается значением веса w_j. Например, значение веса, равное 0,152, означает, что в соответствующей точке плана в ходе исследования следует провести 0,152-ю часть всех опытов. Для A-оптимальных планов веса точек различны, для D-оптимальных планов веса всех точек одинаковы.

Таблица 5.6

Степень поли-нома, q	Значения фактора x / вес точки плана w				
	$x_{(1)}$ / w_1	$x_{(2)}$ / w_2	$x_{(3)}$ / w_3	$x_{(4)}$ / w_4	$x_{(5)}$ / w_5
2	–1,0 / 0,25	0,0 / 0,5	1,0 / 0,25	–	–
3	–1,0 / 0,152	–0,468 / 0,348	0,468 / 0,348	1,0 / 0,152	–
4	–1,0 / 0,107	–0,683 / 0,25	0,0 / 0,286	0,683 / 0,25	1,0 / 0,107

Таблица 5.7

Степень поли-нома, q	Значения фактора x				
	$x_{(1)}$	$x_{(2)}$	$x_{(3)}$	$x_{(4)}$	$x_{(5)}$

2	–1,0	0,0	1,0	–	–
3	–1,0	–0,447	0,447	1,0	–
4	–1,0	–0,655	0,0	0,655	1,0

2. Выше были рассмотрены композиционные планы для оценки коэффициентов полной квадратичной функции (5.1) от k факторов. Кроме них существуют оптимальные планы на кубе, которые предусматривают выбор множеств точек с целочисленными координатами:

точку в центре куба (множество M_0). Все координаты равны нулю;

множество точек M_k, соответствующих вершинам куба. Все координаты равны ±1. Количество точек 2^k;

множество M_{k-1} середин ребер (все координаты равны ±1, за исключением одной нулевой координаты). Количество точек $k\times2^{k-1}$;

множество центров граней размерности $k - l$ (l координат равно нулю). Количество точек равно $C_k^{k-l}2^{k-l}$, $l = 2, 3, \ldots, k - 1$.

В табл. 5.8 приведены веса множества M_j, $j = 0, 1, 2, \ldots, k$ для различного количества факторов. Для получения веса конкретной точки плана следует вес соответствующего множества разделить на количество точек в множестве. Как видно из табл. 5.8, каждый фактор варьируется на трех уровнях, и не все сочетания множеств допустимы для конкретного типа плана.

Пример 5.5.1. Составить D-оптимальный план для $k = 3$.

Решение.

План представлен в табл. 5.9. План включает: точку с нулевыми координатами; двенадцать точек, соответствующих центрам ребер трехмерного куба; восемь точек, соответствующих вершинам куба. Этот план не включает точки, соответствующие центрам граней трехмерного куба.

Таблица 5.8

		Множество точек плана

Критерий оптимальности плана	Количество переменных, k	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
D	2	0,0962	0,3206	0,5832	-	-	-	-
	3	0,0655	-	0,4242	0,5103	-	-	-
	4	0,0474	-	-	0,5021	0,4506	-	-
	5	0,0368	-	-	-	0,5622	0,4021	-
	6	0,0216	-	-	-	-	0,6097	0,3297
A	2	0,376	0,391	0,233	-	-	-	-
	3	0,425	-	0,569	0,060	-	-	-
	4	0,370	-	0,552	-	0,078	-	-
	5	0,427	-	0,573	-	-	-	-
	6	0,404	-	-	0,556	-	0,040	-

Таблица 5.9

<table>
<tr><th>№ пп</th><th>x_1</th><th>x_2</th><th>x_3</th><th>Характеристика множества</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>Множество M_0. Вес точки w_j = 0,0655</td></tr>
<tr><td>2</td><td>+ 1</td><td>+ 1</td><td>0</td><td rowspan="6">Множество M_2. Суммарный вес точек множества 0,4242. Количество точек $2\times k\times(k-1)$.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>– 1</td><td>+ 1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>4</td><td>+ 1</td><td>– 1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>5</td><td>– 1</td><td>– 1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>6</td><td>+ 1</td><td>0</td><td>+ 1</td></tr>
<tr><td>7</td><td>– 1</td><td>0</td><td>+ 1</td></tr>
</table>

8	+ 1	0	– 1	Вес одной точки w_j = 0,4242 / 12 = 0,0353
9	– 1	0	– 1	
10	0	+ 1	+ 1	
11	0	– 1	+ 1	
12	0	+ 1	– 1	
13	0	– 1	– 1	
14	+ 1	+ 1	+ 1	Множество M_3. Суммарный вес точек множества 0,5103. Количество точек $2^{\times k}$ = 8. Вес одной точки w_j = 0,5103/ 8 = 0,0638
15	– 1	+ 1	+ 1	
16	+ 1	– 1	+ 1	
17	– 1	– 1	+ 1	
18	+ 1	+ 1	– 1	
19	– 1	+ 1	– 1	
20	+ 1	– 1	– 1	
21	– 1	– 1	– 1	

3. Оптимальные планы на шаре единичного радиуса для построения полных квадратичных моделей включают следующие множества точек:

точку в центре шара (множество M_0). Все координаты равны нулю;

множество M_1 точек с координатами (±1, 0, …, 0), …., (0, 0, …, ±1). Это множество содержит $2k$ точек;

множество M_2 точек, соответствующих вершинам вписанного в шар многомерного куба. Координаты вершин куба принимают значения $\pm k^{1/2}$. Количество вершин куба равно 2^k.

В табл. 5.10 приведены веса множества M_j, $j = 0, 1, 2$ для различного количества факторов k. Расчет веса конкретной точки плана производится делением веса соответствующего множества на количество точек в множестве. Как видно из табл. 5.10, каждый фактор варьируется на пяти уровнях.

Таблица 5.10

Крите-рий	Коли-чество	Множество точек		
		M_0	M_1	M_2

оптималь-ности	факторов, k			
A	2	0,2918	0,2932	0,4148
	3	0,1924	0,2586	0,5488
	4	0,1377	0,2256	0,6368
	5	0,1044	0,2000	0,6976
	6	0,0825	0,1750	0,7425
D	2	0,1667	0,4167	0,4167
	3	0,1000	0,3600	0,5400
	4	0,0667	0,3111	0,6222
	5	0,0476	0,2721	0,6803
	6	0,0357	0,2411	0,7232

Пример 5.5.2. Составить D-оптимальный план на шаре для k = 3.
Решение.

D-оптимальный план имеет матрицу планирования для основных переменных, представленную в табл. 5.11. Количество точек плана равно 15, каждый фактор варьируется на пяти уровнях.

По своим параметрам представленный план во многом аналогичен центральному композиционному плану Бокса. Отличие заключается в величине радиуса гиперсферы – он равен единице (в ЦКП Бокса радиусы превышают единичное значение). План на шаре более экономичен по сравнению с планом на кубе по количеству точек (аналогичный план на кубе содержит 21 точку), но вместо трех уровней варьирования фактора предполагает пять уровней.

Таблица 5.11

№ пп	Фактор		Примечание

	x_1	x_2	x_3	Вес точки плана	
1	0	0	0	0,1000	Множество M_0
2	1	0	0	0,0600	Множество M_1. Суммарный вес 0,3600. Количество точек 6.
3	– 1	0	0	0,0600	
4	0	1	0	0,0600	
5	0	– 1	0	0,0600	
6	0	0	1	0,0600	
7	0	0	– 1	0,0600	
8	$3^{-1/2}$	$3^{-1/2}$	$3^{-1/2}$	0,0675	Множествыо M_2. Суммарный вес 0,5400. Количество точек 8.
9	$-3^{-1/2}$	$3^{-1/2}$	$3^{-1/2}$	0,0675	
10	$3^{-1/2}$	$-3^{-1/2}$	$3^{-1/2}$	0,0675	
11	$-3^{-1/2}$	$-3^{-1/2}$	$3^{-1/2}$	0,0675	
12	$3^{-1/2}$	$3^{-1/2}$	$-3^{-1/2}$	0,0675	
13	$-3^{-1/2}$	$3^{-1/2}$	$-3^{-1/2}$	0,0675	
14	$3^{-1/2}$	$-3^{-1/2}$	$-3^{-1/2}$	0,0675	
15	$-3^{-1/2}$	$-3^{-1/2}$	$-3^{-1/2}$	0,0675	

6. ПЛАНЫ ДЛЯ ОЦЕНКИ ВЛИЯНИЯ ФАКТОРОВ

6.1. Планы на латинских квадратах

При составлении планов поиска оптимальных значений функции и описания поверхности отклика предполагалось, что факторы представляют собой непрерывные величины. Однако некоторые параметры систем носят дискретный характер и принимают только относительно небольшое количество значений, например, емкость запоминающих устройств, тактовая частота системной шины персонального компьютера. Другие факторы по своей природе имеют не количественную, а качественную природу, в частности, однотипные изделия выпускаются целым рядом изготовителей. Этим изделиям можно приписать некоторые обозначения в номинативной шкале измерений.Таким образом, существует параметры (характеристики), принимающие некоторое ограниченное количество значений, задаваемых в количественной или качественной шкале измерений. Необходимо в условиях воздействия других факторов оценить влияние таких параметров на показатель качества системы или определить их значимость. Полный перебор возможных сочетаний параметров системы потребует чрезмерно большого количества опытов. С целью рационального сокращения экспериментальных исследований применяют специальный вид планов – планы на латинских квадратах. *Латинский квадрат* характеризуется особым расположением некоторого числа символов в ячейках, сгруппированных в строки и столбцы так, что каждый символ встречается один раз в каждой строке и в каждом столбце. Пример латинского квадрата, размером $n \times n$, для $n = 3$ представлен в табл. 6.1.

Таблица 6.1

a	b	c
b	c	a
c	a	b

Для любого $n > 2$ существует множество вариантов построения латинских квадратов. Количество вариантов латинских квадратов с ростом n быстро увеличивается и определяется формулой

$$N(n, n) = n!(n-1)!L(n).$$

Некоторые значения $L(n)$ представлены в табл. 6.2.

Таблица 6.2

n	1	2	3	4	5	6
$L(n)$	1	1	1	4	56	9048

Латинскому квадрату можно сопоставить план эксперимента, в котором строки соответствуют различным значениям одного фактора, столбцы – значениям другого, а латинские буквы – значениям третьего фактора, т.е. латинский квадрат позволяет исследовать влияние не более чем трех факторов. Пример представления латинского квадрата для факторов L, P, Z, каждый из которых варьируется на четырех уровнях (n = 4) приведен в табл. 6.3.

Таблица 6.3

	P_1	P_2	P_3	P_4
L_1	Z_1	Z_3	Z_4	Z_2
L_2	Z_2	Z_1	Z_3	Z_4
L_3	Z_3	Z_4	Z_2	Z_1
L_4	Z_4	Z_2	Z_1	Z_3

Применение плана, построенного на основе латинского квадрата, позволяет оценить дифференциальный (разностный) эффект пар уровней, но не дает информации о взаимодействии между факторами (иначе говоря, факторы не зависят друг от друга). Так, сумма результатов экспериментов, соответствующих столбцу j, будет оценивать эффект P_j, усредненный по всем L и Z. Тогда дифференциальный эффект увеличения значения фактора P от уровня 1 до уровня 2, усредненный по всем L и Z, можно оценить по разности между суммой значений функции отклика столбца 2 и столбца 1. Порядок перечисления уровней факторов роли не играет.

В частности, рассмотренный план позволяет оценить влияние размера видеопамяти графического адаптера (P) на скорость вывода видеоизображений при различном быстродействии (L) процессора компьютера и разном разрешении дисплея (Z). Применительно к рассмотренному примеру для трех факторов при четырех уровнях варьирования ПФЭ требует $4^3 = 64$ опытов, а с применением латинского квадрата – только 16. Экономия достигается за счет потери информации о взаимодействии факторов.

В условиях применения латинского квадрата все факторы должны варьироваться на одинаковом количестве уровней. Можно ослабить это требование путем приравнивания какого-либо уровня другому.

Приведенный пример является одним из возможных расположений уровней факторов, позволяющих получить *несмещенные* оценки главных эффектов. Латинские квадраты можно накладывать друг на друга, образуя *греко-латинские квадраты*. Например, два латинских квадрата 3´3 можно преобразовать в греко-латинский квадрат

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{array} \times \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \chi \\ \chi & \alpha & \beta \\ \beta & \chi & \alpha \end{array} = \begin{array}{ccc} \mathrm{a}\,\alpha & \mathrm{b}\,\beta & \mathrm{c}\,\chi \\ \mathrm{b}\,\chi & \mathrm{c}\,\alpha & \mathrm{a}\,\beta \\ \mathrm{c}\,\beta & \mathrm{a}\,\chi & \mathrm{b}\,\alpha \end{array}.$$

Здесь латинские буквы образуют один латинский квадрат, а греческие буквы – другой латинский квадрат. Каждая латинская буква встречается в паре с конкретной греческой буквой только один раз. С помощью этого греко-латинского квадрата можно оценить главные эффекты четырех 3-х уровневых факторов (фактора строк, фактора столбцов, римских букв и греческих букв) проведя только 9 опытов.

Если наложить друг на друга три различных варианта латинских квадратов, то получится план *гипер-греко-латинского квадрата*. С его помощью можно оценить главные эффекты пяти факторов (фактора строк, столбцов и трех расположений квадратов). В частности, для пяти трехуровневых факторов потребуется провести только 9 опытов вместо 243 опытов при переборе всех возможных сочетаний факторов.

Итак, планы латинских (греко-латинских) квадратов используются в тех случаях, когда требуется оценить влияние факторов, варьируемых более чем на двух уровнях и заранее известно, что между факторами нет взаимодействий или этим взаимодействиями можно пренебречь. Имеются таблицы латинских и греко-латинских квадратов различных размеров, за исключением одного практически важного случая – не существует греко-латинского квадрата для 6 уровней факторов.

6.2. Оценка значимости фактора

Когда основным источником погрешности являются случайные ошибки измерений, то в точках плана обычно проводятся однократные опыты. В такой ситуации ошибки различных опытов считают взаимно независимыми случайными величинами, распределенными по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и одинаковой, хотя и неизвестной, дисперсией. Следовательно, функция отклика в различных точках плана также распределена нормально. Ее математические ожидания неизвестны и могут быть различными. Оценка влияния фактора в этих условиях проводится на основе применения метода дисперсионного анализа, суть которого заключается в определении значимости различий между средними значениями функции отклика для разных значений исследуемого фактора [3, 7]. Такое сравнение производится не на непосредственном сопоставлении средних значений, а путем сопоставления факторной дисперсии функции отклика, порождаемой воздействием различных значений фактора, и остаточной дисперсии, вызванной случайными причинами. Если факторная дисперсия значимо превышает остаточную дисперсию, то фактор оказывает существенное влияние на функцию отклика. А это значит, что и средние значения функции отклика на разных уровнях фактора различаются существенно.

Итак, исходными данными являются:

-план на латинском (греко-латинском, гипер-греко-латинском) квадрате с количеством уровней изменения факторов, равном n. Пусть уровни анализируемого фактора P соответствую столбцам квадрата;

-матрица значений функции отклика $\mathbf{Y} = |y_{kj}|$ размерностью $n \times n$; уровень значимости для проверки статистической гипотезы α.

Дисперсионный анализ включает следующие шаги.

1. Вычисление среднего значения функции отклика по всем опытам и среднего значения по различным уровням фактора P

$$y_{\text{ср}} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} y_{kj},$$

$$y_{\text{ф}}(j) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} y_{kj}, \quad j = \overline{1, n}.$$

2. Оценка факторной дисперсии

$$\mu_{2,\text{ф}} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} \left[y_{\text{ср}} - y_{\text{ф}}(j) \right]^2.$$

3. Оценка остаточной дисперсии

$$\mu_{2,\text{ост}} = \frac{1}{n^2 - n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left[y_{\text{ф}}(j) - y_{kj} \right]^2.$$

4. Оценка значимости фактора *P* производится на основе метода проверки статистических гипотез. Нулевая гипотеза H_0 соответствует равенству средних значений функциииы отклика при различных значениях фактора. В этом случае факторная и остаточная дисперсия являются несмещенными оценками неизвестной генеральной дисперсии функции отклика и поэтому не должны существенно различаться. Очевидно, если оценка факторной дисперсии не превышает оценку остаточной дисперсии, то справедлива гипотеза H_0. Альтернативная гипотеза H_1 соответствует утверждению, что факторная дисперсия существенно больше остаточной дисперсии, следовательно, средние значения также значимо различаются. Проверка осуществляется на основе критерия Фишера

$F=\mu_{2,\text{ф}}/\mu_{2,\text{ост}}$.

Критическое значение критерия $F_{\text{кр}} = F(\alpha;\ n-1;\ n^2-n)$ находят стандартным образом, здесь $n-1$ соответствует количеству степеней свободы факторной дисперсии, а n^2-n – количеству степеней свободы остаточной дисперсии. Если выполняется условие $F > F_{\text{кр}}$, то фактор *P* существенно влияет на функцию отклика, иначе – влияние фактора не существенно.

Критерий Фишера применим только при сравнении дисперсий нормально распределенных величин. Если такой уверенности нет, то к полученному выводу следует относиться осторожно.
В случае проведения повторных опытов в точках плана распределение средних значений функции отклика будет приближаться к нормальному с увеличением количеств опытов. И применение критерия Фишера будет достаточно обосновано.

6.3. Оценка дифференциального эффекта уровней фактора
Дифференциальный эффект уровней позволяет оценить изменение среднего значения отклика системы при переходе фактора с уровня *j* на уровень *i*. При этом следует учитывать, что на это изменение оказывает воздействие и случайные причины, а не только анализируемый фактор. Как и в дисперсионном анализе, здесь возможны различные варианты решения задачи в зависимости от наличия априорной информации и повторных опытов в точках плана. Рассмотрим два типовых варианта обработки данных [3].
В первом варианте рассматривается следующая ситуация:
результаты измерений в различных точках независимы, повторные опыты отсутствуют;
предполагается нормальное распределение значений функции отклика в различных точках плана, дисперсии распределения неизвестны, но одинаковы (случайность значений обусловлена ошибками измерений).
Данный вариант соответствует сравнению двух средних нормально распределенных генеральных совокупностей, дисперсии которых неизвестны, но предположительно одинаковы. Сравнение предполагает выполнение следующих шагов.
1. Вычисление средних значений функции отклика для двух сравниваемых значений факторов (уровни факторов соответствуют столбцам *j* и *i* латинского квадрата)

$$y_{\text{ф}}(j) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_{kj}, \quad y_{\text{ф}}(i) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_{ki}$$

.2. Вычисление оценок дисперсии функции отклика для выбранных уровней факторов

$$\mu_2(j) = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left[y_\Phi(j) - y_{kj}\right]^2, \quad \mu_2(i) = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left[y_\Phi(i) - y_{ki}\right]^2$$

.

.

3. Прежде сравнения средних следует проверить однородность оценок дисперсии по критерию Фишера. Дисперсии расставляются так, чтобы значение критерия было больше единицы, например при $D_ф(j) > D_ф(i)$ критерий $F = D_ф(j) / D_ф(i)$. Если однородность нарушена, то проводить сравнение средних неправомочно, следует устранить выявленное нарушение или отказаться отданного варианта проверки.

4. Если неоднородность дисперсий не обнаружена, то можно установить значимо или незначимо различаются средние значения функции отклика для двух значений факторов, используя критерий Стьюдента. Гипотеза H_0 соответствует утверждению $y_ф(j) = y_ф(i)$. В качестве критерия проверки нулевой гипотезы выступает положительное значение случайной величины

$$T = \{[\, y_ф(j) - y_ф(i)] / [D_ф(j) + D_ф(i)]^{0,5}\}\{n(n-1)\}.$$

Эта величина при справедливости гипотезы H_0 имеет распределение Стьюдента с $2n - 2$ степенями свободы. Критическая область зависит от вида альтернативной гипотезы H_1.

Если H_1 соответствует $y_ф(j) \neq y_ф(i)$, то критическая область является двусторонней. Критическое значение $t_{кр}$ находится стандартным образом по заданной величине уровня значимости а и количеству степеней свободы. При $T > t_{кр}$ нулевая гипотеза отвергается, следовательно фактор оказывает существенное влияние на функцию отклика.

Если H_1 соответствует $y_ф(j) > y_ф(i)$ или $y_ф(i) > y_ф(j)$, то критическая область будет правосторонней. В остальном проверка аналогична предыдущему случаю.

Во втором варианте рассматривается следующая ситуация:

в точках плана проведены повторные опыты.. Пусть m – количество всех опытов при значении фактора P_j, n – при значении фактора P_i. Причем $m > 30$ и $n > 30$;

результаты измерений в различных точках независимы.

В этом случае выборочные средние функции отклика распределены приближенно нормально, а оценки дисперсии являются достаточно хорошими приближениями к генеральным дисперсиям.

Порядок проверки гипотезы о значимости влияния фактора на уровнях j и i следующий.

Вычисляются средние значения функции отклика $y_ф(j)$ и $y_ф(i)$ по всем опытам при значениях фактора P_j и P_i. Затем рассчитываются дисперсии функции отклика $D_ф(j)$ и $D_ф(j)$ для двух значений фактора. Дисперсия среднего значения случайной величины в m раз меньше дисперсии этой величины (здесь m количество опытов).

В качестве гипотезы H_0 выступает равенство $y_ф(j) = y_ф(i)$. Поэтому в качестве критерия можно взять величину

$$u = | y_ф(j) – y_ф(i)| / \{D_ф(j) /m + D_ф(j) / q\}^{0,5},$$

которая в случае справедливости нулевой гипотезы распределена приближенно нормально с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией (величина u является центрированной и нормированной). Проверка гипотез осуществляется аналогично случаям, рассмотренным выше, только вместо распределения Стьюдента применяется распределение стандартизованной нормальной величины.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Интерпретация уравнений регрессии — важнейший этап моделирования процессов при использовании планирования эксперимента. Интерпретация включает анализ прежде всего влияния отдельных факторов и их взаимодействий, а затем— особенностей поведения функции отклика в различных частях изученной области факторного пространства.

Влияние факторов проще всего анализировать по уравнению 1-й степени. Здесь вначале оценивается знак коэффициента регрессии, показывающий, в какую сторону—увеличения или уменьшения — влияет на отклик данный фактор.

Планированный эксперимент позволяет также сопоставить влияние отдельных факторов. В обычных уравнениях регрессии значение одного коэффициента трудно сопоставлять со значением другого. Факторы (а соответственно, и коэффициенты регрессии) суть величины размерные, и нельзя сказать, что например, больше: 1 м или 0,001 кг. В планированном эксперименте факторы приведены к безразмерному кодированному виду; в этом виде каждый из них варьируется в одинаковых пределах, от —1 до +1. Поэтому большее, чем b_q, по абсолютной величине значение b_p означает, что в заданных пределах варьирования изменение *р-го* фактора сильнее повлияет на отклик, чем изменение q-*го* фактора.

В том случае, когда $b1$,$b2$ и $b12$ имеют одинаковый знак , обычно говорят о синергиз-ме влияния факторов $X1$ и X2: каждый из них при их совместном увеличении влияет сильнее, чем если они увеличиваются порознь.

Если знаки коэффициентов $b1$ и $b2$ одинаковы, а $b12$ имеет противоположный знак, то каждый фактор в отдельности влияет сильнее, чем при одновременном воздействии второго.

Если адекватно уравнение, полученное по данным факторного эксперимента на 2-х уровнях (безразлично, линейное или содержащее взаимодействия), то наибольшее и наименьшее в изученной области значения отклика, предсказываемые уравнением, лежат в каких-либо из точек полного факторного эксперимента. В тех случаях, когда экспериментатора интересует максимум или минимум отклика (максимум выхода или прочности, минимум загрязнений или затрат, и т. п.), соответствующая точка окажется наилучшей для данной области..

Когда объект описывается уравнением 2-й степени, то чаще всего нас интересует либо положение экстремума, либо общий характер зависимости, или же уравнение регрессии нужно нам лишь как фрагмент, который будет включен в более сложную математическую модель.

Теория ПЭ охватывает практически все встречающиеся на практике варианты исследования объектов. В дальнейшем будут рассмотрены следующие типовые задачи экспериментального исследования:

поиск значений параметров системы, обеспечивающих достижение оптимального значения показателя качества исследуемого объекта при известных ограничениях на значения этих параметров. Перебор всех допустимых сочетаний значений параметров системы с целью поиска оптимального варианта нерационален по затратам ресурсов. Для решения указанной задачи ТПЭ предлагает такую последовательность проведения опытов, которая позволяет применить градиентные методы поиска при априорно неизвестной функции, связывающей показатель качества с параметрами системы;

приближенное аналитическое описание функциональной связи показателей качества с параметрами системы по результатам проведенного эксперимента. Традиционные методики проведения экспериментов из-за зависимости компонентов восстанавливаемого аналитического описания не позволяют определить раздельное влияние каждого фактора на результирующий показатель, т. е. эти методики обеспечивают получение аналитических зависимостей, пригодных лишь для решения интерполяционных задач. В отличие от них ТПЭ дает возможность оценить вклад каждого параметра в значение показателя, т.е. приближенно восстановить закон функционирования объекта по экспериментальным данным.

Полученное аналитическое описание объекта можно использовать для предварительного исследования вариантов построения системы или в интересах построения модели старшей системы, включающей данный объект на правах элемента;
оценка дифференциального влияния уровней параметров системы на показатель качества. Такая задача возникает в случае, когда параметры системы являются по своей природе качественными или когда количественные параметры могут принимать небольшое число различных значений.
Кроме указанных, существуют и других задачи, решаемые с помощью ТПЭ, например:
испытания образцов техники. Планирование должно позволить оценить степень соответствия показателей качества образцов заданным требованиям при минимальном объеме испытаний;
отсеивающие эксперименты. Предназначены выявить параметры, незначительно влияющие на показатель качества системы. Соответствующие планы применяют на начальных этапах исследования, когда нет конкретных сведений о влиянии тех или иных параметров. Отсеивание несущественных факторов снижает трудоемкость решения задач оптимизации или приближенного аналитического описания системы;
адаптивное планирование. Применяется в условиях управления технологическим процессом, когда система управления все время должна приспосабливаться к конкретным условиям функционирования, а возможно, и предсказывать дальнейшее развитие процесса.
Решение задач с применением ТПЭ предусматривает использование априорной информации об изучаемом процессе для выбора общей последовательности управления экспериментами, которая уточняется после очередного этапа проведения исследований на основе вновь полученных сведений. Тем самым достигается возможность рационального управления экспериментами при неполном первоначальном знании характеристик исследуемого объекта. Целесообразность применения ТПЭ тем выше, чем сложнее исследуемая система.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ГЛОССАРИЙ

1. **Эксперимент**	Система операций, воздействий и (или) наблюдений, направленных на получение информации об объекте при исследовательских испытаниях
2. **Опыт**	Воспроизведение исследуемого явления в определенных условиях проведения эксперимента при возможности регистрации его результатов
3. **План эксперимента**	Совокупность данных, определяющих число, условия и порядок реализации опытов
4. **Планирование эксперимента**	Выбор плана эксперимента, удовлетворяющего заданным требованиям
5. **Фактор** параметр	Переменная величина, по предположению влияющая на результаты эксперимента
6. **Уровень фактора**	Фиксированное значение фактора относительно начала отсчета
7. **Основной уровень фактора**	Натуральное значение фактора, соответствующее нулю в безразмерной шкале
8. **Нормализация факторов**	Преобразование натуральных значений факторов в безразмерные
9. **Априорное ранжирование факторов**	Метод выбора наиболее важных факторов, основанный на экспертной оценке
10. **Размах варьирования фактора**	Разность между максимальным н минимальным натуральными значениями фактора в данном плане
11. **Интервал варьирования фактора**	Половина размаха варьирования фактора
12. **Эффект взаимодействия факторов**	Показатель зависимости изменения эффекта одного фактора от уровней других факторов

13. **Факторное пространство**	Пространство, координатные оси которого соответствуют значениям факторов
14. **Область экспериментирования** Область планирования	Область факторного пространства, где могут размещаться точки, отвечающие условиям проведения опытов
15. **Активный эксперимент**	Эксперимент, в котором уровни факторов в каждом опыте задаются исследователем
16. **Пассивный эксперимент**	Эксперимент, при котором уровни факторов в каждом опыте регистрируются исследователем, но не задаются
17. **Последовательный эксперимент** *Шаговый эксперимент*	Эксперимент, реализуемый в виде серий, в котором условия проведения каждой последующей серии определяются результатами предыдущих
18. **Отклик** *Реакция*	Наблюдаемая случайная переменная, по предположению, зависящая от факторов
19. **Функция отклика**	Зависимость математического ожидания отклика от факторов
20. **Оценка функции отклика**	Зависимость, получаемая при подстановке в функцию отклика оценок значений ее параметров
21. **Дисперсия оценки функции отклика**	Дисперсия оценки математического ожидания отклика в некоторой данной точке факторного пространства
22. **Поверхность отклика** *Поверхность регрессии*	Геометрическое представление функции отклика
23. **Поверхность уровня функции отклика**	Геометрическое место точек в факторном пространстве, которому соответствует некоторое фиксированное значение функции отклика
24. **Область оптимума**	Область факторного пространства в окрестности точки, в которой функция отклика достигает экстремального значения

25. **Рандомизация плана**	Один из приемов планирования эксперимента, имеющий целью свести эффект некоторого неслучайного фактора к случайной ошибке
26. **Параллельные опыты**	Рандомизированные во времени опыты, в которых уровни всех факторов сохраняются неизменными
27. **Временный дрейф**	Случайное или неслучайное изменение функции отклика во времени
28. **Модель регрессионного анализа** Регрессионная модель	Зависимость отклика от количественных факторов и ошибок наблюдения отклика
29. **Модель регрессионного анализа, линейная по параметрам** *Линейная модель*	Модель регрессионного анализа, в которой функция отклика есть линейная комбинация базисных функций от факторов
30. **Полиномиальная модель регрессионного анализа** *Полиномиальная модель*	Модель регрессионного анализа, линейная по параметрам, задаваемая полиномом по факторам
31. **Модель регрессионного анализа первого порядка** *Линейная модель*	Модель регрессионного анализа, задаваемая полиномом первого порядка по факторам
32. **Модель регрессионного анализа второго порядка** Квадратичная модель	Модель регрессионного анализа, задаваемая полиномом второго порядка по факторам
33. **Модель дисперсионного анализа**	Зависимость отклика от качественных факторов и ошибок наблюдений отклика
34. **Адекватность математической модели** Адекватность модели	Соответствие математической модели экспериментальным данным по выбранному критерию
35. **Коэффициент регрессии**	Параметр модели регрессионного анализа

36. **Блок плана**	Часть плана, включающая опыты, условия проведения которых однородны с точки зрения значений одного или нескольких мешающих факторов
37. **Точка плана**	Упорядоченная совокупность численных значений факторов, соответствующая условиям проведения опыта
38. **Центральная точка плана** Центр плана	Точка плана, соответствующая нулям нормализованной (безразмерной) шкалы по всем факторам
39. **Звездная точка плана**	Точка плана второго порядка, лежащая на координатной оси в факторном пространстве
40. **Звездное плечо**	Расстояние между центральной и звездной точками плана второго порядка
41. **Спектр плана**	Совокупность всех точек плана, отличающихся уровнями хотя бы одного фактора
42. **Матрица плана**	Стандартная форма записи условий проведения экспериментов в виде прямоугольной таблицы, строки которой отвечают опытам, столбцы - факторам
43. **Матрица спектра плана**	Матрица, составленная из всех строк матрицы плана, отличающихся уровнями хотя бы одного фактора
44. **Матрица дублирования**	Квадратная диагональная матрица, диагональные элементы которой равны числам параллельных опытов в соответствующих точках спектра плана
45. **Матрица базисных функций модели**	Матрица, задающая численные значения базисных функций линейной по параметрам модели в опытах реализуемого плана
46. **Усеченная матрица базисных функций модели**	Подматрица матрицы базисных функций модели, содержащая строки, отвечающие спектру плана

47. **Матрица моментов плана**	Квадратичная симметричная матрица, элементы которой есть скалярные произведения соответствующих векторов - столбцов матрицы базисных функций
48. **Информационная матрица плана**	Нормированная матрица моментов плана
49. **Полный факторный план**	План, содержащий все возможные комбинации всех факторов на определенном числе уровней равное число раз
50. **Дробный факторный план** Дробная реплика полного факторного плана	План, содержащий часть комбинаций полного факторного плана
51. **Генератор плана**	Алгебраическое выражение, используемое при построении дробного факторного плана
52. **План эксперимента первого порядка** Линейный план	План с двумя или более уровнями факторов, позволяющий найти раздельные оценки параметров регрессионной модели первого порядка
53. **План взвешивания**	План первого порядка, включающий факторы на двух или трех уровнях
54. **Симплекс-план**	План эксперимента первого порядка, точки которого размещаются в вершинах симплекса
55. **План эксперимента второго порядка**	План с более чем двумя уровнями факторов для нахождения оценок параметров регрессионной модели второго порядка
56. **План дисперсионного анализа**	План с дискретными уровнями факторов для нахождения оценок параметров дисперсионной модели
57. **Латинский квадрат**	План дисперсионного анализа, задаваемый расположением некоторого числа символов в ячейках,

	сгруппированных в строки и столбцы так, что каждый символ встречается один раз в каждой строке и в каждом столбце
58. **Латинский куб первого порядка** Латинский куб	План дисперсионного анализа, задаваемый расположением некоторого числа символов в квадратах из строк и столбцов так, что каждый символ встречается одинаковое число раз в каждом квадрате
59. **Ортогональность плана**	Свойство плана, при котором матрица моментов для заданной модели является диагональной
60. **Ротатабельность плана**	Свойство плана, при котором дисперсия оценки функции отклика зависит только от расстояния от центра плана
61. **Композиционность плана**	Свойство плана, позволяющее выполнять эксперимент последовательно, переходя от более простых моделей к более сложным
62. **Насыщенность плана**	Свойство плана, задающееся разностью между числом точек спектра плана и числом оцениваемых параметров модели
63. **Метод случайного баланса** Случайный баланс	Метод отсеивания факторов, основанный па использовании сверхнасыщенных планов со случайным выбором сочетаний уровней факторов
64. **Метод крутого восхождения**	Метод экспериментальной оптимизации, сочетающий полный или дробный факторный эксперимент с движением по градиенту функции отклика
65. **Эволюционное планирование** Эвоп	Метод экспериментальной оптимизации, сочетающий многократное использование дробных и полных факторных планов с движением по градиенту функции отклика и предназначенный для

	совершенствования производственных объектов
66. **Последовательный симплексный метод** Псм	Метод экспериментальной оптимизации, основанный на сочетании насыщенного плана, заданными вершинами симплекса с последовательным отражением наихудшей вершины относительно противоположной грани
67. **Регрессионный анализ**	Статистический метод анализа и обработки экспериментальных данных при воздействии на отклик только количественных факторов, основанный на сочетании аппарата метода наименьших квадратов и техники статистической проверки гипотез
68. **Дисперсионный анализ**	Статистический метод анализа и обработки экспериментальных данных при воздействии на отклик только количественных факторов, основанный на использовании техники статистической проверки гипотез и представлении общей вариации экспериментальных данных в виде суммы вариаций, обусловленных исследуемыми факторами и их взаимодействиями
69. **Метод ковариационного анализа**	Статистический метод анализа и обработки экспериментальных данных при воздействии на отклик как количественных, так и качественных факторов, основанный на сочетании элементов регрессионного и дисперсионного анализа

ПРИЛОЖЕНИЕ 2
ПОЛУЧЕНИЕ МОДЕЛИ МЕТОДОМ ОЦКП

Исходными данными являются базовые значения факторов (число факторов k=n=3) и шаги варьирования. Задана матрица планирования эксперимента и результаты трёх дублирующих экспериментов (для каждого эксперимента проведено 3 дублирующих опыта, n=3 – количество факторов,
m=3 – количество дублирующих опытов). Общее количество экспериментов в методе ортогонального центрального композиционного планирования

$$N = 2^n + 2n + 1$$

Обозначим L – порядковый номер эксперимента, L = 1,…,N .
В случае трёхфакторного эксперимента N=15 (15 экспериментов). Результаты всех опытов запишем в виде матрицы размерности 15x3, обозначим её элементыY lj, где l-номер эксперимента, а j-номер дублирующего опыта.
Результаты опытов

$$Y_{11}Y_{12}Y_{13}$$
$$Y_{21}Y_{22}Y_{23}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$Y_{15,1}Y_{15,2}Y_{15,3}$$

Находим среднее значение в каждой серии опытов:

$$\overline{Y_L} = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} Y_{LJ}, L = \overline{1{,}15}$$

$$\overline{Y_1} = \frac{1}{3}(Y_{11} + Y_{12} + Y_{13}) = \frac{1}{3}(34{,}1 + 34 + 34{,}1)$$

$$\overline{Y_2} = \frac{1}{3}(Y_{21} + Y_{22} + Y_{23}) = 34{,}06 \approx 34{,}1$$

Базовые значения факторов (от 0 до 10)

$$X_{61} = 1$$

$$X_{62} = 2$$

$$X_{63} = 3$$

Шаги варьирования факторов (от 0 до 1)

$$d_1 = 0.1$$

$$d_2 = 0.2$$

$$d_3 = 0.3$$

Исходные данные для ОЦКП

L	X1	X2	X3	Yl1	Yl2	Yl3
l1	-1.000	-1.000	-1.000	34.1	34.0	34.1
l2	1.000	-1.000	-1.000	49.4	34.0	34.0
l3	-1.000	1.000	-1.000	34.0	49.4	34.0
l4	-1.000	-1.000	1.000	34.1	34.0	49.4
l5	1.000	1.000	-1.000	49.4	49.4	34.0
l6	-1.000	1.000	1.000	34.1	49.4	49.4
l7	1.000	-1.000	1.000	49.4	34.0	49.4
l8	1.000	1.000	1.000	49.4	49.4	49.4
l9	0.000	0.000	0.000	41.4	41.3	41.4
l10	1.215	0.000	0.000	51.2	41.3	41.3
l11	-1.215	0.000	0.000	32.6	41.4	41.3
l12	0.000	1.215	0.000	41.3	51.2	41.3
l13	0.000	-1.215	0.000	41.4	32.6	41.3
l14	0.000	0.000	1.215	41.4	41.4	51.2
l15	0.000	0.000	-1.215	41.3	41.3	32.6

Матрица планирования Z

Общий вид матрицы планирования эксперимента ОЦКП:

$$Z = \{Z_{lj}\} = \begin{matrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ \dots & \dots & \dots \\ Z_{15,1} & Z_{15,2} & Z_{15,3} \end{matrix}$$

где l-номер опыта, от 1 до15, j-номер фактора, от 1 до 3.

Найдём дисперсию в каждой серии опытов по формуле:

$$D_{Y_l} = D_l = \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}(Y_{l_J} - \overline{Y}_l)^2 = \frac{1}{2}\left[(Y_{l1} - \overline{Y}_l)^2 + (Y_{l2} - \overline{Y}_l)^2 + (Y_{l3} - \overline{Y}_l)^2,\right]$$

$$l = \overline{1.1}$$

$$D_1 = \frac{1}{2}\left[(Y_1 - \overline{Y}_1)^2 + (Y_1 - \overline{Y}_1)^2 + (Y_1 - \overline{Y}_1)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(-0.1)^2 = \frac{1}{2}0.0 = 0.00$$

Аналогично рассчитывают остальные дисперсии.

I. Найдём коэффициенты нормированной модели

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_1 X_1 X_2 + \beta_1 X_1 X_3 + \beta_2 X_2 X_3 + \beta_1 X_1^2 + \beta_2 X_2^2 + \beta_3 X_3^2,$$

$$где\ X_1 = \frac{x_1 - x_1^{\delta}}{\Delta x_1}$$

$$X_2 = \frac{x_2 - x_2^{\delta}}{\Delta x_2}$$

$$X_3 = \frac{x_3 - x_3^{\delta}}{\Delta x_3}$$

где X1, X2, X3-нормированные значения факторов.

ЛИНЕЙНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ β1, β2, β3 находят по формуле:

$$\beta_j = C_1 \sum_{l=1}^{15} Z_{el} \times \overline{Y_l},\ j = 1,2,3.$$

Zlj - элементы матрицы планирования экспериментов, при этом 1-й столбец матрицы планирования скалярно умножается на столбец средних значений.

Коэффициенты β2,β3 рассчитываются аналогично, но вместо первого столбца берутся соответственно второй и третий.

$$\beta_1 = C_1\left[Z_{11} \times \overline{Y_1} + Z_{21} \times \overline{Y_2} + \ldots + Z_{15,1} \times \overline{Y_{15}}\right] = C_1\left[(-1) \times \overline{Y_1} + 1 \times \overline{Y_2} + (-1)\overline{Y_3} + (-1) \times \overline{Y_4} + \ldots + 0 \times \overline{Y_{15}}\right]$$

СМЕШАННЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ β12, β13, β23 находят по формуле:

$$\beta_{ij} = C_2 \sum_{l=1}^{15} Z_{li} \times Z_{lj} \times \overline{Y_l} = C_2\left[Z_{1i} \times Z_{1j} \times \overline{Y_1} + Z_{2i} \times Z_{2j} \times \overline{Y_2} + \ldots + Z_{15,i} \times Z_{15,j}\overline{Y_{15}}\right]$$

при этом перемножаются два столбца (i-ый и j-ый) из матрицы планирования и столбец средних значений.

$$\beta_{12} = ?$$

$$i = 1,\ j = 2$$

$$\beta_{12} = C_2\left[Z_{11} \times Z_{12} \times \overline{Y_1} + Z_{21} \times Z_{22} \times \overline{Y_2} + Z_{31} \times Z_{32} \times \overline{Y_3} + \ldots + Z_{15,1} \times Z_{15,2} \times \overline{Y_{15}}\right] =$$

$$= C_1\left[(-1) \times (-1)\overline{Y_1} + (+1)(-1)\overline{Y_2} + (-1)(1)\overline{Y_3} + \ldots + 0 \times 0 \times \overline{Y_{15}}\right] = \ldots$$

Например, требуется найти

Аналогично можно найти β13 и β23.

КВАДРАТИЧНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ β11, β22, β33 находят

$$\beta_{jj} = C_3 \sum_1^{15} (Z_{lj}^{\ 2} - ji)\overline{Y_l},\ j = \overline{1{,}3}$$

$$\gamma = (2^{n-p} + 2\alpha^2) \Big/ N = \left[2^3 + 2(\alpha)^2\right] \Big/ 15$$

$$\beta_{11} = ?\ J = 1$$

$$\beta_{11} = C_3\left[(Z_{11}^{\ 2} - \gamma)\overline{Y_1} + (Z_{21}^{\ 2} - \gamma)\overline{Y_2} + \ldots + (Z_{15,1}^{\ 2} - \gamma)\overline{Y_{15}}\right] = C_3\left[((-1)^2 - \gamma)\overline{Y_1} + ((1^2) - \gamma)\overline{Y_2} + \ldots + (0 - \gamma)\overline{Y_{15}}\right] = \ldots$$

по формуле:

Аналогично находим β22 (j=2), β33(j=3).

СВОБОДНЫЙ ЧЛЕН рассчитываем по формуле:

$$\beta_0 = \frac{1}{15}\sum_{l=1}^{15}\overline{Y_l} - \gamma\sum_{j=1}^{3}\beta_{jj} = \frac{1}{15}\sum_{l=1}^{15}\overline{Y_l} - \gamma(\beta_{11} + \beta_{22} + \beta_{33})$$

II. Проверим значимость найденных коэффициентов по t-критерию Стьюдента.

Дисперсии коэффициентов находят по следующим формулам.

Для линейных коэффициентов:

$D_в = (D_1 + D_2 + \ldots + D_{15})/15$ – дисперсия воспроизводимости опытов,

$$D(\beta j) = \frac{C_1}{m} D_B = \frac{C_1}{3} D_B,$$

$$D(\beta_1) = D(\beta_2) = D(\beta_3) = \frac{C_1}{3} D_B$$

Для проверки значимости смешанных коэффициентов используются расчётные формулы:

$$D(\beta j) = \frac{C_2}{m} D_B = \frac{C_2}{3} D_B$$

$$D(\beta_{12}) = D(\beta_{13}) = D(\beta_{23}) = \frac{C_2}{3} D_B$$

Для проверки значимости квадратичных коэффициентов используются расчётные формулы:

$$D(\beta j) = \frac{C_3}{m} D_B = \frac{C_3}{3} D_B$$

$$D(\beta_{11}) = D(\beta_{22}) = D(\beta_{33}) = \frac{C_3}{3} D_B$$

Для проверки значимости свободного члена используются расчётные формулы:

$$D(\beta_0) = \frac{C_0}{m} D_B - \gamma^2 \sum_{j=1}^{3} D(\beta_{jj})$$

$$D(\beta_0) = \frac{C_0}{3} D_B - \gamma^2 (D(\beta_{11}) + D(\beta_{22}) + D(\beta_{33}))$$

Значения табличных коэффициентов приведены в [9], с. 87.
Для проверки значимости коэффициентов находим расчётные значения t-критерия Стьюдента по формуле:

$$t_{расч}(\beta) = \frac{|\beta|}{\sqrt{D(\beta)}}$$

Для всех коэффициентов достаточно найти одно значение t крит по таблице критических значений для t-критерия Стьюдента при f=N(m-1)=15(3-1)=30

Если t расч(β)<t крит, то коэффициент β незначимый, его исключают из модели, приравнивая к нулю. Например, если t расч(β12)<t крит., то β12=0

Если t расч (β)>t крит, то коэффициент значимый и его оставляют в модели.

После того, как в модели остались только значимые коэффициенты, нужно проверить адекватность полученной математической модели по критерию Фишера, то есть сравнить значения Y, полученные при расчёте по нормированной модели (1) с средними значениями по каждой сери и опытов. При расчете по нормированной модели в качестве значений X1, X2, X3 выбирают L-ую строку матрицы

планирования и находят при

$L = \overline{1,15}$

$$Y_\ell = \beta_0 + \beta_1 \times Z_{\ell 1} + \beta_2 \times Z_{\ell 2} + \beta_3 \times Z_{\ell 3} + \beta_{12} \times Z_{\ell 1} \times Z_{l2} + \beta_{13} \times Z_{\ell 1} \times Z_{\ell 3} +$$
$$+ \beta_{23} \times Z_{l2} \times Z_{l3} + \beta_{11} \times Z_{\ell 1}{}^2 + \beta_{22} \times Z_{\ell 2}{}^2 + \beta_{33} \times Z_{\ell 3}{}^2$$

Например, если все коэффициенты значимые

$$Y_1 = \beta_0 + \beta_1(-1) + \beta_2(-1) + \beta_3(-1) + \beta_{12}(-1)(-1) + \beta_{13}(-1)(-1) + \beta_{23}(-1)(-1) + \beta_{11}(-1)^2 +$$
$$+ \beta_{22}(-1)^2 + \beta_{33}(-1)^2 \_\_и\_т.д.\_\_ Y_2, Y_3, ..., Y_{15}$$

Сравнить между собой значения результатов эксперимента с значениями, рассчитанными по найденной математической модели позволяет дисперсия адекватности

$$D_A = \frac{1}{N-d}\sum_{\ell=1}^{N}(\overline{Y_\ell} - Y_\ell)^2, \_где\_N = 15,$$

а d - количество незначимых коэффициентов, которые мы исключили из модели(приравняли к нулю).

Например, если d=0

$$D_A = \frac{1}{15}\left[(\overline{Y_1} - Y_1)^2 + (\overline{Y_2} - Y_2)^2 + \ldots + (\overline{Y_{15}} - Y_{15})^2\right]$$

Расчётное значение критерия Фишера

$$F_{расч} = \frac{D_A}{D_B}$$

где Dв -дисперсия воспроизводимости, которую мы использовали при проверке значимости коэффициентов.
Табличное (критическое) значение критерия Фишера
F крит находят по таблице.

Степени свободы f1 и f2 выбирают по правилу.

1) Если DA<Dв, то f1=N-d=15-d
   f2=N(m-1)=15(3-1)=30
2) Если Dв<DA, то f1=N(m-1)=30
   f2=N-d=15-d

Если F расч. < F крит., то получена адекватная нормированная модель (1)
Если F расч. > F крит., то модель неадекватна, её использовать нельзя. Для получения адекватной модели рекомендуется уменьшить шаги варьирования ($\Delta X1 = d_1$, $\Delta X2 = d_2$, $\Delta X3 = d_3$).

III. Если нормированная модель (1) адекватна, то нужно перейти к реальным физическим величинам.
Для этого в модель (1) с учётом того, что незначимые коэффициенты =0 нужно подставить

$$X_1 = \frac{x_1 - x_1^\delta}{\Delta x_1}, X_2 = \frac{x_2 - x_2^\delta}{\Delta x_2}, X_3 = \frac{x_3 - x_3^\delta}{\Delta x_3}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО КУРСОВОМУ ПРОЕКТИРОВАНИЮ

1. ЦЕЛЬ КУРСОВОГО ПРОЕКТА

Целью курсового проекта является приобретение студентами знаний, умений и практических навыков по синтезу адекватных математических моделей на основе уравнения регрессии в виде полноквадратичной зависимости.

2. ЗАДАНИЕ НА КУРСОВУЮ РАБОТУ

Для данных эксперимента, соответствующих индивидуальному варианту студента (определяемого по двум последним цифрам зачётки) провести проверку выполнения условия воспроизводимости опытов, получить экономичную математическую модель и оценить её работоспособность.

3. ОБЪЕМ ЗАДАНИЯ

Для выполнения курсового проекта необходимо осуществить следующие операции:

- провести обоснование выбора метода синтеза экспериментально-статистической модели;
- проверить условия применимости регрессионного анализа;
- провести расчёт коэффициентов регрессии и оценить их значимость;
- проверить адекватность модели и получить модель в реальных физических величинах.

Оформление пояснительной записки к курсовой работе проводится в соответствии с стандартом ВГТУ. Пояснительная записка должна включать:

-титульный лист;

-задание на курсовой проект;

-лист «Замечания руководителя»;
-содержание;
-введение;
-основные разделы;
-заключение;
-список литературы;
-приложения.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ВАРИАНТОВ

Исходные данные для всех вариантов:
базовые значения факторов $x_1^б$, $x_2^б$, $x_3^б$ выбрать в диапазоне от 0 до 5
шаги варьирования $\Delta\ x_1^б$, $\Delta\ x_2^б$, $\Delta\ x_3^б$ должны быть не больше 0,3.

ВАРИАНТ 1 (3 знач)

Номер опыта	X1	X2	X3	yL1	yL2	yL3
L=1	1	1	1	12	12,2	12,4
L=2	1	-1	-1	12	11,9	12,4
L=3	-1	1	-1	12,5	12,8	12,6
L=4	-1	-1	1	12,3	12,1	12,4
L=5	1	1	-1	12,7	12,6	12,4
L=6	-1	1	1	12,8	12,4	12,4
L=7	1	-1	1	12	12,6	11,9
L=8	-1	-1	-1	12,7	12,5	12
L=9	0	0	0	12	12,8	11,9
L=10	1,215	0	0	12,1	12,1	12
L=11	-1,215	0	0	12,5	12,8	12,1
L=12	0	1,215	0	12	12,2	12,3
L=13	0	-1,215	0	12,8	12,4	12,9
L=14	0	0	1,215	12,2	12,4	12,2
L=15	0	0	-1,215	12,2	12	11,9

ВАРИАНТ 2 (3 знач)

Номер опыта	X1	X2	X3	yL1	yL2	yL3
L=1	1	1	1	10,6	10,9	10,6
L=2	1	-1	-1	10,2	10,9	10,7

L=3	-1	1	-1	10,7	10,3	10,2
L=4	-1	-1	1	10,3	10,9	10,5
L=5	1	1	-1	10,3	10,4	10,3
L=6	-1	1	1	10,6	10,2	10,4
L=7	1	-1	1	10,9	10,8	10,7
L=8	-1	-1	-1	10,4	10,2	10,2
L=9	0	0	0	10,7	10,5	10,8
L=10	1,215	0	0	10,2	10,2	10,5
L=11	-1,215	0	0	10,2	10,3	10,8
L=12	0	1,215	0	10,3	10,3	10,2
L=13	0	-1,215	0	10,5	10,8	10,8
L=14	0	0	1,215	10,9	10,3	10,8
L=15	0	0	-1,215	10,9	10,5	10,3

ВАРИАНТ 3 (3 знач)

Номер опыта	X1	X2	X3	y_{L1}	y_{L2}	y_{L3}
L=1	1	1	1	50,9	50,4	50,8
L=2	1	-1	-1	50,3	50,2	50,6
L=3	-1	1	-1	50,9	50,6	50,9
L=4	-1	-1	1	50,3	50,7	50,2
L=5	1	1	-1	50,7	50,3	50,8
L=6	-1	1	1	50,5	50,7	50,5
L=7	1	-1	1	50,7	50,4	50,7
L=8	-1	-1	-1	50,8	50,3	50,7
L=9	0	0	0	50,8	50,5	50,6
L=10	1,215	0	0	50,6	50,5	50,6
L=11	-1,215	0	0	50,4	50,3	50,4
L=12	0	1,215	0	50,9	50,8	50,4

L=13	0	-1,215	0	50,7	50,8	50,9
L=14	0	0	-1,215	50,4	50,2	50,6
L=15	0	0	1,215	50,5	50,2	50,4

ВАРИАНТ 4 (3 знач)

Номер опыта	X1	X2	X3	y_{L1}	y_{L2}	y_{L3}
L=1	1	1	1	115	115,2	115,8
L=2	1	-1	-1	114,3	115	114,4
L=3	-1	1	-1	116,2	116,4	116,4
L=4	-1	-1	1	115,6	115,9	114,6
L=5	1	1	-1	115	114,4	116,4
L=6	-1	1	1	114,2	114,3	116,1
L=7	1	-1	1	115,5	114,4	116,1
L=8	-1	-1	-1	115,4	115,5	114,1
L=9	0	0	0	114,1	116	115,3
L=10	1,215	0	0	116	114,7	114,5
L=11	-1,215	0	0	114,1	116,4	115,1
L=12	0	1,215	0	114,7	114,9	115,1
L=13	0	-1,215	0	115,7	115,1	114,5
L=14	0	0	-1,215	116,4	115,6	115,6
L=15	0	0	1,215	115,6	115,6	116,3

ВАРИАНТ 5 (3 знач)

Номер опыта	X1	X2	X3	y_{L1}	y_{L2}	y_{L3}
L=1	1	1	1	235,9	235,3	235,2
L=2	1	-1	-1	236,4	236,4	235,2
L=3	-1	1	-1	235,4	236,1	235,2

L=4	-1	-1	1	236,4	236,2	236
L=5	1	1	-1	236	236,1	235,8
L=6	-1	1	1	236,1	235,5	235,7
L=7	1	-1	1	235,7	235,2	235,5
L=8	-1	-1	-1	235,8	235,8	236,4
L=9	0	0	0	235,5	235,9	235,7
L=10	1,215	0	0	236,2	236,2	236,2
L=11	-1,215	0	0	236	235,7	236,2
L=12	0	1,215	0	236,1	235,3	235,6
L=13	0	-1,215	0	236,4	235,3	235,9
L=14	0	0	-1,215	235,5	235,5	236,4
L=15	0	0	1,215	235,8	235,8	235,6

ВАРИАНТ 6 (3 знач)

Номер опыта	X1	X2	X3	y_{L1}	y_{L2}	y_{L3}
L=1	1	1	1	71,8	72,1	72,6
L=2	1	-1	-1	72,8	72,9	72,6
L=3	-1	1	-1	72,6	72,8	72,3
L=4	-1	-1	1	71,8	72	71,9
L=5	1	1	-1	72,5	72,9	71,9
L=6	-1	1	1	72,5	72	72
L=7	1	-1	1	72	71,8	72
L=8	-1	-1	-1	72,6	72,8	72,4
L=9	0	0	0	72,6	71,9	71,9
L=10	1,215	0	0	72,4	71,8	71,9
L=11	-1,215	0	0	72	71,8	72,7
L=12	0	1,215	0	72,6	72,3	71,9
L=13	0	-1,215	0	71,8	72,1	71,7

L=14	0	0	-1,215	72,5	72,2	72
L=15	0	0	1,215	71,7	72,4	72,6

ВАРИАНТ 7 (3 знач)

Номер опыта	X1	X2	X3	y_{L1}	y_{L2}	y_{L3}
L=1	1	1	1	25,4	25,1	25,3
L=2	1	-1	-1	24,9	24,9	25,6
L=3	-1	1	-1	25	25	25,6
L=4	-1	-1	1	25,3	25,3	25,1
L=5	1	1	-1	25,4	25,2	25,5
L=6	-1	1	1	25	25	24,9
L=7	1	-1	1	25,3	25	25,6
L=8	-1	-1	-1	25	25,4	25,6
L=9	0	0	0	25,6	24,9	25,4
L=10	1,215	0	0	25	25,3	25
L=11	-1,215	0	0	25,1	25,3	25,4
L=12	0	1,215	0	25,2	25	24,9
L=13	0	-1,215	0	25,4	25	25,1
L=14	0	0	-1,215	25,4	25,6	25,6
L=15	0	0	1,215	25,6	25,5	25,5

ВАРИАНТ 8 (3 знач)

Номер опыта	X1	X2	X3	y_{L1}	y_{L2}	y_{L3}
L=1	1	1	1	60,8	60,9	60,8
L=2	1	-1	-1	60,8	60,5	60,8
L=3	-1	1	-1	60,3	60,6	60,6
L=4	-1	-1	1	60,9	60,9	60,7

L=5	1	1	-1	60,7	60,9	60,5
L=6	-1	1	1	60,9	60,9	60,3
L=7	1	-1	1	60,6	60,3	60,3
L=8	-1	-1	-1	60,6	60,9	60,5
L=9	0	0	0	60,4	60,8	60,9
L=10	1,215	0	0	60,5	60,3	60,5
L=11	-1,215	0	0	60,3	60,5	60,3
L=12	0	1,215	0	60,8	60,5	60,7
L=13	0	-1,215	0	60,6	60,8	60,8
L=14	0	0	-1,215	60,4	60,4	60,3
L=15	0	0	1,215	60,8	60,6	60,6

ВАРИАНТ 9 (3 знач)

Номер опыта	X1	X2	X3	y_{L1}	y_{L2}	y_{L3}
L=1	1	1	1	125,1	125,4	125,3
L=2	1	-1	-1	125,6	125,4	124,9
L=3	-1	1	-1	125	125,5	125,2
L=4	-1	-1	1	125,7	125,7	125,9
L=5	1	1	-1	125,8	125,9	125,1
L=6	-1	1	1	124,9	125,3	125,5
L=7	1	-1	1	125,6	125,5	125
L=8	-1	-1	-1	125,7	125,7	125,8
L=9	0	0	0	125,6	125,8	125,3
L=10	1,215	0	0	124,9	125,9	125,6
L=11	-1,215	0	0	125,8	125,2	125,8
L=12	0	1,215	0	125,3	125,2	125,4
L=13	0	-1,215	0	125,7	125,6	125,9

L=14	0	0	-1,215	125,8	125,2	125,9
L=15	0	0	1,215	125,3	125,9	125,7

ВАРИАНТ 10 (3 знач)

Номер опыта	X1	X2	X3	y_{L1}	y_{L2}	y_{L3}
L=1	1	1	1	25,6	25,2	25,9
L=2	1	-1	-1	25,3	25,6	25,9
L=3	-1	1	-1	25,4	25,9	25,7
L=4	-1	-1	1	25,2	25,6	25,6
L=5	1	1	-1	25,6	25,2	25,8
L=6	-1	1	1	25,8	25,8	25,8
L=7	1	-1	1	25,7	25,9	25,5
L=8	-1	-1	-1	25,9	25,7	25,7
L=9	0	0	0	25,2	25,5	25,3
L=10	1,215	0	0	25,4	25,2	25,5
L=11	-1,215	0	0	25,2	25,3	25,4
L=12	0	1,215	0	25,6	25,4	25,6
L=13	0	-1,215	0	25,2	25,5	25,6
L=14	0	0	-1,215	25,8	25,3	25,8
L=15	0	0	1,215	25,3	25,3	25,5

ВАРИАНТ 11 (3 знач)

Номер опыта	X1	X2	X3	y_{L1}	y_{L2}	y_{L3}
L=1	1	1	1	26,4	26,2	26,3
L=2	1	-1	-1	26,5	26,2	26,5
L=3	-1	1	-1	26,8	26,6	26,3
L=4	-1	-1	1	26,9	26,5	26,3

L=5	1	1	-1	26,2	26,2	26,6
L=6	-1	1	1	26,5	26,3	26,9
L=7	1	-1	1	26,4	26,3	26,7
L=8	-1	-1	-1	26,7	26,3	26,9
L=9	0	0	0	26,2	26,7	26,6
L=10	1,215	0	0	26,5	26,8	26,5
L=11	-1,215	0	0	26,9	26,6	26,8
L=12	0	1,215	0	26,8	26,2	26,3
L=13	0	-1,215	0	26,7	26,3	26,3
L=14	0	0	-1,215	26,3	26,3	26,3
L=15	0	0	1,215	26,2	26,5	26,3

ВАРИАНТ 12 (3 знач)

Номер опыта	X1	X2	X3	y_{L1}	y_{L2}	y_{L3}
L=1	1	1	1	27,2	27,4	27,3
L=2	1	-1	-1	27,2	27,6	27,5
L=3	-1	1	-1	27,4	27,7	27,7
L=4	-1	-1	1	27,6	27,9	27,4
L=5	1	1	-1	27,6	27,4	27,2
L=6	-1	1	1	27,9	27,3	27,7
L=7	1	-1	1	27,9	27,3	27,7
L=8	-1	-1	-1	27,5	27,5	27,2
L=9	0	0	0	27,8	27,8	27,9
L=10	1,215	0	0	27,2	27,7	27,3
L=11	-1,215	0	0	27,7	27,7	27,8
L=12	0	1,215	0	27,6	27,9	27,8
L=13	0	-1,215	0	27,7	27,6	27,9
L=14	0	0	-1,215	27,4	27,7	27,4

L=15	0	0	1,215	27,9	27,6	27,9

ВАРИАНТ 13 (3 знач)

Номер опыта	X1	X2	X3	y_{L1}	y_{L2}	y_{L3}
L=1	1	1	1	28,7	28,7	28,4
L=2	1	-1	-1	28,2	28,2	28,6
L=3	-1	1	-1	28,9	28,7	28,8
L=4	-1	-1	1	28,7	28,7	28,4
L=5	1	1	-1	28,2	28,3	28,7
L=6	-1	1	1	28,3	28,9	28,8
L=7	1	-1	1	28,7	28,6	28,8
L=8	-1	-1	-1	28,9	28,5	28,9
L=9	0	0	0	28,4	28,4	28,9
L=10	1,215	0	0	28,6	28,4	28,2
L=11	-1,215	0	0	28,2	28,6	28,6
L=12	0	1,215	0	28,9	28,4	28,7
L=13	0	-1,215	0	28,3	28,8	28,6
L=14	0	0	-1,215	28,4	28,7	28,9
L=15	0	0	1,215	28,6	28,6	28,5

ВАРИАНТ 14 (3 знач)

Номер опыта	X1	X2	X3	y_{L1}	y_{L2}	y_{L3}
L=1	1	1	1	29,9	29,9	29,9
L=2	1	-1	-1	29,3	29,5	29,3
L=3	-1	1	-1	29,7	29,9	29,9
L=4	-1	-1	1	29,4	29,3	29,3
L=5	1	1	-1	29,2	29,2	29,9

L=6	-1	1	1	29,5	29,4	29,4
L=7	1	-1	1	29,3	29,4	29,8
L=8	-1	-1	-1	29,4	29,7	29,4
L=9	0	0	0	29,2	29,3	29,4
L=10	1,215	0	0	29,6	29,7	29,2
L=11	-1,215	0	0	29,2	29,8	29,7
L=12	0	1,215	0	29,4	29,8	29,5
L=13	0	-1,215	0	29,2	29,6	29,9
L=14	0	0	-1,215	29,5	29,2	29,4
L=15	0	0	1,215	29,4	29,3	29,6

ВАРИАНТ 15 (3 знач)

Номер опыта	X1	X2	X3	y_{L1}	y_{L2}	y_{L3}
L=1	1	1	1	30,2	30,1	30,7
L=2	1	-1	-1	30,2	30,3	30
L=3	-1	1	-1	30,6	30,2	30,3
L=4	-1	-1	1	30,4	30,6	30,9
L=5	1	1	-1	30,4	30,2	30,4
L=6	-1	1	1	30,6	30,7	30,9
L=7	1	-1	1	30,1	30,6	30,2
L=8	-1	-1	-1	30,7	30,7	30,7
L=9	0	0	0	30,9	30,6	30,6
L=10	1,215	0	0	30,4	30,2	30,4
L=11	-1,215	0	0	30	30,7	30,1
L=12	0	1,215	0	30	30,6	30,5
L=13	0	-1,215	0	30,5	30,3	30,6
L=14	0	0	-1,215	30,6	30,4	30,1

L=15	0	0	1,215	30,8	30,7	30,8

ВАРИАНТ 16 (3 знач)

Номер опыта	X1	X2	X3	y_{L1}	y_{L2}	y_{L3}
L=1	1	1	1	31,6	31,9	31
L=2	1	-1	-1	31,5	31,5	31,4
L=3	-1	1	-1	31,9	31,7	31,1
L=4	-1	-1	1	31,5	31,2	31,3
L=5	1	1	-1	31	31,2	31
L=6	-1	1	1	31,8	31,9	31,8
L=7	1	-1	1	31,4	31,7	31,5
L=8	-1	-1	-1	31,6	31,1	31,3
L=9	0	0	0	31,7	31,7	31,7
L=10	1,215	0	0	31,1	31,2	31,4
L=11	-1,215	0	0	31,9	31,6	31,8
L=12	0	1,215	0	31,9	31,4	31,3
L=13	0	-1,215	0	31,3	31,6	31,2
L=14	0	0	-1,215	31,5	31,4	31,8
L=15	0	0	1,215	31,1	31,6	31,1

ВАРИАНТ 17 (3 знач)

Номер опыта	X1	X2	X3	y_{L1}	y_{L2}	y_{L3}
L=1	1	1	1	32,3	32,2	32,5
L=2	1	-1	-1	32,7	32,5	32,7
L=3	-1	1	-1	32,8	32,3	32,1
L=4	-1	-1	1	32,1	32,4	32,1
L=5	1	1	-1	32,9	32,5	32

L=6	-1	1	1	32,3	32,9	32
L=7	1	-1	1	32	32	32,6
L=8	-1	-1	-1	32,8	32	32,2
L=9	0	0	0	32,8	32,6	32
L=10	1,215	0	0	32	32,1	32
L=11	-1,215	0	0	32,2	32	32,7
L=12	0	1,215	0	32,6	32,8	32,3
L=13	0	-1,215	0	32,2	32,9	32,9
L=14	0	0	-1,215	32,9	32,8	32,8
L=15	0	0	1,215	32,1	32	32,4

ВАРИАНТ 18 (3 знач)

Номер опыта	X1	X2	X3	y_{L1}	y_{L2}	y_{L3}
L=1	1	1	1	34,8	34,1	34,3
L=2	1	-1	-1	34,9	34,5	34,2
L=3	-1	1	-1	34,6	34,9	34,9
L=4	-1	-1	1	34,5	34,6	34,2
L=5	1	1	-1	34,5	34,1	34,2
L=6	-1	1	1	34,4	34,2	34,5
L=7	1	-1	1	34,5	34,6	34,7
L=8	-1	-1	-1	34,4	34,4	34,3
L=9	0	0	0	34,5	34,6	34,4
L=10	1,215	0	0	34,1	34,4	34,7
L=11	-1,215	0	0	34,8	34,6	34,4
L=12	0	1,215	0	34	34,2	34,4
L=13	0	-1,215	0	34,1	34,7	34,5
L=14	0	0	-1,215	34,1	34,1	34
L=15	0	0	1,215	34,5	34,2	34,8

ВАРИАНТ 19 (4 знач)

Номер опыта	X1	X2	X3	y_{L1}	y_{L2}	y_{L3}
L=1	1	1	1	35,8	35,8	35,4
L=2	1	-1	-1	35,9	35,2	35,9
L=3	-1	1	-1	35,6	35,8	35,9
L=4	-1	-1	1	35,6	35,1	35,1
L=5	1	1	-1	35,3	35,4	35,3
L=6	-1	1	1	35,5	35,8	35,6
L=7	1	-1	1	35,9	35,8	35,9
L=8	-1	-1	-1	35,8	35,2	35,6
L=9	0	0	0	35,2	35,1	35,9
L=10	1,215	0	0	35,7	35,5	35
L=11	-1,215	0	0	35,4	35,2	35,5
L=12	0	1,215	0	35,8	35,3	35,9
L=13	0	-1,215	0	35,9	35,6	35,3
L=14	0	0	-1,215	35,4	35,2	35,1
L=15	0	0	1,215	35,3	35,8	35,1

ВАРИАНТ 20 (3 знач)

Номер опыта	X1	X2	X3	y_{L1}	y_{L2}	y_{L3}
L=1	1	1	1	36,9	36,8	36,6
L=2	1	-1	-1	36	36,3	36,2
L=3	-1	1	-1	36,3	36,3	36,5
L=4	-1	-1	1	36,5	36,9	36,3
L=5	1	1	-1	36,6	36,1	36,7
L=6	-1	1	1	36,6	36,2	36,8
L=7	1	-1	1	36,1	36,5	36,9

L=8	-1	-1	-1	36,7	36,9	36,7
L=9	0	0	0	36,1	36,5	36,2
L=10	1,215	0	0	36,8	36,2	36,8
L=11	-1,215	0	0	36,2	36,3	36
L=12	0	1,215	0	36,5	36,9	36
L=13	0	-1,215	0	36,8	36,9	36,7
L=14	0	0	-1,215	36,3	36	36,2
L=15	0	0	1,215	36	36,5	36,1

ВАРИАНТ 21 (3 знач)

Номер опыта	X1	X2	X3	y_{L1}	y_{L2}	y_{L3}
L=1	1	1	1	37,6	37,6	37,9
L=2	1	-1	-1	37,8	37,4	37,9
L=3	-1	1	-1	37,9	37,8	37,8
L=4	-1	-1	1	37,4	37,8	37,2
L=5	1	1	-1	37,6	37	37,2
L=6	-1	1	1	37,5	37,9	37,3
L=7	1	-1	1	37,4	37,4	37,3
L=8	-1	-1	-1	37,7	37,4	37,9
L=9	0	0	0	37,4	37,2	37,2
L=10	1,215	0	0	37,3	37,6	37,1
L=11	-1,215	0	0	37,9	37	37,2
L=12	0	1,215	0	37,8	37,4	37,9
L=13	0	-1,215	0	37	37,5	37,7
L=14	0	0	-1,215	37,6	37,8	37,9
L=15	0	0	1,215	37,1	37,3	37,2

ВАРИАНТ 22 (3 знач)

Номер опыта	X1	X2	X3	y_{L1}	y_{L2}	y_{L3}
L=1	1	1	1	38,6	38,8	38,9
L=2	1	-1	-1	38,7	38,9	38,7
L=3	-1	1	-1	38,6	38,2	38,6
L=4	-1	-1	1	38,9	38,9	38,1
L=5	1	1	-1	38,9	38	38,8
L=6	-1	1	1	38,3	38,1	38,3
L=7	1	-1	1	38,4	38,8	38,6
L=8	-1	-1	-1	38,6	38,5	38,5
L=9	0	0	0	38,5	38,3	38
L=10	1,215	0	0	38,9	38,5	38,5
L=11	-1,215	0	0	38,2	38,5	38,4
L=12	0	1,215	0	38,6	38,7	38,5
L=13	0	-1,215	0	38,4	38,9	38,7
L=14	0	0	-1,215	38,6	38,1	38,2
L=15	0	0	1,215	38	38,5	38,6

ВАРИАНТ 23 (3 знач)

Номер опыта	X1	X2	X3	y_{L1}	y_{L2}	y_{L3}
L=1	1	1	1	9,4	9,9	9,5
L=2	1	-1	-1	9,3	9,3	9
L=3	-1	1	-1	9,7	9,7	9,2
L=4	-1	-1	1	9,9	9,8	9,9
L=5	1	1	-1	9,9	9,5	9,6
L=6	-1	1	1	9,2	9,4	9,1
L=7	1	-1	1	9,7	9,2	9,4
L=8	-1	-1	-1	9,3	9,3	9,1

L=9	0	0	0	9,1	9,1	9,5
L=10	1,215	0	0	9,6	9,7	9,4
L=11	-1,215	0	0	9,1	9,7	9,8
L=12	0	1,215	0	9,6	9,8	9,8
L=13	0	-1,215	0	9,1	9,9	9,1
L=14	0	0	-1,215	9,6	9,1	9
L=15	0	0	1,215	9,8	9,2	9

ВАРИАНТ 24 (3 знач)

Номер опыта	X1	X2	X3	y_{L1}	y_{L2}	y_{L3}
L=1	1	1	1	110,4	110,9	110,2
L=2	1	-1	-1	110,2	110,3	110,4
L=3	-1	1	-1	110,2	110,9	110,4
L=4	-1	-1	1	110,5	110,9	110,8
L=5	1	1	-1	110,5	110,5	110,4
L=6	-1	1	1	110,4	110,3	110,6
L=7	1	-1	1	110,8	110,5	110,3
L=8	-1	-1	-1	110,8	110,7	110,9
L=9	0	0	0	110,6	110,3	110,5
L=10	1,215	0	0	110,3	110,2	110,9
L=11	-1,215	0	0	110,8	110,9	110,9
L=12	0	1,215	0	110,9	110,2	110,5
L=13	0	-1,215	0	110,2	110,2	110,7
L=14	0	0	-1,215	110,6	110,3	110,6
L=15	0	0	1,215	110,5	110,7	110,7

ВАРИАНТ 25 (3 знач)

Номер опыта	X1	X2	X3	y_{L1}	y_{L2}	y_{L3}
L=1	1	1	1	13,4	13,5	13,1
L=2	1	-1	-1	13	12,8	12,7
L=3	-1	1	-1	13,6	13,6	12,7
L=4	-1	-1	1	13,1	12,9	13,2
L=5	1	1	-1	13,5	13,4	13,3
L=6	-1	1	1	12,9	13	13,3
L=7	1	-1	1	13,3	13,4	12,7
L=8	-1	-1	-1	13,1	12,7	12,8
L=9	0	0	0	13,2	13,2	13
L=10	1,215	0	0	12,7	13,1	12,9
L=11	-1,215	0	0	13,2	13	12,8
L=12	0	1,215	0	13,4	13,3	13,5
L=13	0	-1,215	0	12,7	13,4	13,2
L=14	0	0	-1,215	13,4	13,5	13,2
L=15	0	0	1,215	13,6	13,6	12,8

ВАРИАНТ 26 (3 знач)

Номер опыта	X1	X2	X3	y_{L1}	y_{L2}	y_{L3}
L=1	1	1	1	14,8	15	14,9
L=2	1	-1	-1	14,3	15,1	15,5
L=3	-1	1	-1	14,7	14,6	14,5
L=4	-1	-1	1	15,3	15,3	14,9
L=5	1	1	-1	14,9	14,2	14,5
L=6	-1	1	1	15,4	15,3	15,4
L=7	1	-1	1	15,1	15,1	14,2
L=8	-1	-1	-1	14,6	15,3	15,4
L=9	0	0	0	15,1	14,7	14,8

L=10	1,215	0	0	14,6	15,2	15
L=11	-1,215	0	0	14,5	14,2	14,2
L=12	0	1,215	0	15	14,7	15,2
L=13	0	-1,215	0	15,5	14,2	14,4
L=14	0	0	-1,215	14,6	14,2	14,3
L=15	0	0	1,215	15,3	15,4	14,8

ВАРИАНТ 27 (3 знач)

Номер опыта	X1	X2	X3	y_{L1}	y_{L2}	y_{L3}
L=1	1	1	1	16,1	15,9	16
L=2	1	-1	-1	16	15,9	16,7
L=3	-1	1	-1	15,9	15,5	15,6
L=4	-1	-1	1	15,7	16	15,9
L=5	1	1	-1	16,6	16,1	16,7
L=6	-1	1	1	16,5	15,7	15,7
L=7	1	-1	1	16,6	16,7	16,1
L=8	-1	-1	-1	15,5	16,4	16,3
L=9	0	0	0	16	16,3	15,8
L=10	1,215	0	0	16,4	16,2	15,5
L=11	-1,215	0	0	15,7	15,8	15,6
L=12	0	1,215	0	16,4	15,5	15,7
L=13	0	-1,215	0	15,5	16,1	16,2
L=14	0	0	-1,215	16,2	16,6	16,2
L=15	0	0	1,215	16,4	15,9	16

ВАРИАНТ 28 (3 знач)

Номер опыта	X1	X2	X3	y_{L1}	y_{L2}	y_{L3}

L=1	1	1	1	16,1	16,4	16,1
L=2	1	-1	-1	16,8	16,7	16,6
L=3	-1	1	-1	16,5	16,6	16,8
L=4	-1	-1	1	16,2	16,2	16,3
L=5	1	1	-1	16,3	16,8	16,8
L=6	-1	1	1	16,1	16,6	16,6
L=7	1	-1	1	16,1	16,2	16,5
L=8	-1	-1	-1	16,5	16,7	16,5
L=9	0	0	0	16,6	16,8	16,5
L=10	1,215	0	0	16,8	16,3	16,7
L=11	-1,215	0	0	16,6	16,6	16,7
L=12	0	1,215	0	16,1	16,4	16,1
L=13	0	-1,215	0	16,4	16,1	16,4
L=14	0	0	-1,215	16,7	16,4	16,3
L=15	0	0	1,215	16,6	16,8	16,5

ВАРИАНТ 29 (3 знач)

Номер опыта	X1	X2	X3	y_{L1}	y_{L2}	y_{L3}
L=1	1	1	1	18,1	18,8	18,8
L=2	1	-1	-1	18,1	18,4	18,8
L=3	-1	1	-1	18,3	18,8	18,7
L=4	-1	-1	1	18,3	18,1	18,1
L=5	1	1	-1	18,5	18,6	18,1
L=6	-1	1	1	18,8	18,8	18,3
L=7	1	-1	1	18,7	18,4	18,5
L=8	-1	-1	-1	18,3	18	18,1
L=9	0	0	0	18,6	18,7	18,8

L=10	1,215	0	0	18,5	18,6	18,2
L=11	-1,215	0	0	18,2	18,1	18,5
L=12	0	1,215	0	18,6	18,5	18,7
L=13	0	-1,215	0	18,6	18,7	18,2
L=14	0	0	-1,215	18,2	18,8	18,1
L=15	0	0	1,215	18,7	18,6	18,1

ВАРИАНТ 30 (3 знач)

Номер опыта	X1	X2	X3	y_{L1}	y_{L2}	y_{L3}
L=1	1	1	1	19,1	19,8	19,2
L=2	1	-1	-1	19,2	19,3	19,9
L=3	-1	1	-1	19,9	19,9	19,7
L=4	-1	-1	1	19,6	19,4	19,4
L=5	1	1	-1	19,1	19,8	19,8
L=6	-1	1	1	19,2	19,7	19,5
L=7	1	-1	1	19,1	19,6	19,6
L=8	-1	-1	-1	19,9	19,8	19,7
L=9	0	0	0	19,2	19,5	19,9
L=10	1,215	0	0	19,4	19,4	19,3
L=11	-1,215	0	0	19,6	19,8	19,8
L=12	0	1,215	0	19,8	19,1	19,9
L=13	0	-1,215	0	19,9	19,5	19,7
L=14	0	0	-1,215	19,6	19,3	19,9
L=15	0	0	1,215	19,2	19	19

ВАРИАНТ 31 (4 знач)

Номер опыта	X1	X2	X3	y_{L1}	y_{L2}	y_{L3}

L=1	1	1	1	20,5	20,3	20,4
L=2	1	-1	-1	20,8	20,3	20,8
L=3	-1	1	-1	20,7	20,8	20,6
L=4	-1	-1	1	20,9	20,5	20,8
L=5	1	1	-1	20,9	20,3	20,9
L=6	-1	1	1	20,2	20,8	20,4
L=7	1	-1	1	20,8	20,9	20,9
L=8	-1	-1	-1	20,7	20,9	20,8
L=9	0	0	0	20,6	20,4	20,4
L=10	1,215	0	0	20,2	20,3	20,2
L=11	-1,215	0	0	20,5	20,4	20,2
L=12	0	1,215	0	20,8	20,9	20,8
L=13	0	-1,215	0	20,4	20,5	20,8
L=14	0	0	-1,215	20,6	20,7	20,3
L=15	0	0	1,215	20,6	20,4	20,7

ВАРИАНТ 32 (3 знач)

Номер опыта	X1	X2	X3	y_{L1}	y_{L2}	y_{L3}
L=1	1	1	1	21,8	21,2	21,4
L=2	1	-1	-1	21,9	21,8	21,4
L=3	-1	1	-1	21,7	21,8	21,9
L=4	-1	-1	1	21,6	21,4	21,5
L=5	1	1	-1	21,5	21,4	21,5
L=6	-1	1	1	21,9	21,9	21,9
L=7	1	-1	1	21,8	21,9	21,6
L=8	-1	-1	-1	21,3	21,3	21,8
L=9	0	0	0	21,8	21,6	21,4
L=10	1,215	0	0	21,3	21,9	21,7

L=11	-1,215	0	0	21,9	21,8	21,6
L=12	0	1,215	0	21,9	21,7	21,4
L=13	0	-1,215	0	21,5	21,5	21,6
L=14	0	0	-1,215	21,8	21,4	21,4
L=15	0	0	1,215	21,2	21,5	21,4

ВАРИАНТ 33 (3 знач)

Номер опыта	X1	X2	X3	y_{L1}	y_{L2}	y_{L3}
L=1	1	1	1	22,6	22,2	22,3
L=2	1	-1	-1	22,3	22,4	22,9
L=3	-1	1	-1	22,7	22,8	22,6
L=4	-1	-1	1	22,7	22,8	22,6
L=5	1	1	-1	22,4	22,2	22,2
L=6	-1	1	1	22,3	22,7	22,5
L=7	1	-1	1	22,5	22,4	22,4
L=8	-1	-1	-1	22,9	22,9	22,5
L=9	0	0	0	22,2	22,8	22,7
L=10	1,215	0	0	22,7	22,4	22,8
L=11	-1,215	0	0	22,7	22,2	22,8
L=12	0	1,215	0	22,2	22,8	22,2
L=13	0	-1,215	0	22,5	22,8	22,8
L=14	0	0	-1,215	22,9	22,7	22,7
L=15	0	0	1,215	22,7	22,2	22,2

ВАРИАНТ 34 (3 знач)

Номер опыта	X1	X2	X3	y_{L1}	y_{L2}	y_{L3}
L=1	1	1	1	23,5	23,3	23,4

L=2	1	-1	-1	23,2	23,8	23,7
L=3	-1	1	-1	23,5	23,7	23,4
L=4	-1	-1	1	23,5	23,3	23,5
L=5	1	1	-1	23,4	23,4	23,2
L=6	-1	1	1	23,5	23,9	23,5
L=7	1	-1	1	23,8	23,7	23,6
L=8	-1	-1	-1	23,5	23,2	23,9
L=9	0	0	0	23,8	23,8	23,7
L=10	1,215	0	0	23,4	23,8	23,3
L=11	-1,215	0	0	23,9	23,5	23,7
L=12	0	1,215	0	23,5	23,9	23,8
L=13	0	-1,215	0	23,7	23,6	23,6
L=14	0	0	-1,215	23,4	23,3	23,4
L=15	0	0	1,215	23,7	23,4	23,9

ВАРИАНТ 35 (5 знач)

Номер опыта	X1	X2	X3	y_{L1}	y_{L2}	y_{L3}
L=1	1	1	1	24,7	24,4	24,9
L=2	1	-1	-1	24,3	24,4	24,2
L=3	-1	1	-1	24,7	24,9	24,9
L=4	-1	-1	1	24,9	24,8	24,9
L=5	1	1	-1	24,8	24,9	24,6
L=6	-1	1	1	24,5	24,6	24,5
L=7	1	-1	1	24,4	24,4	24,2
L=8	-1	-1	-1	24,8	24,6	24,6
L=9	0	0	0	24,8	24,5	24,5
L=10	1,215	0	0	24,8	24,9	24,3

L=11	-1,215	0	0	24,8	24,4	24,7
L=12	0	1,215	0	24,6	24,8	24,7
L=13	0	-1,215	0	24,7	24,2	24,7
L=14	0	0	-1,215	24,6	24,9	24,8
L=15	0	0	1,215	24,6	24,3	24,2

ВАРИАНТ 36 (5 знач)

Номер опыта	X1	X2	X3	y_{L1}	y_{L2}	y_{L3}
L=1	1	1	1	33,9	33,7	33,6
L=2	1	-1	-1	33,6	33,3	33,5
L=3	-1	1	-1	33,8	33,7	33,7
L=4	-1	-1	1	33,3	33,2	33,8
L=5	1	1	-1	33,3	33,2	33,2
L=6	-1	1	1	33,8	33,8	33,5
L=7	1	-1	1	33,4	33,6	33,7
L=8	-1	-1	-1	33,4	33,6	33,2
L=9	0	0	0	33,5	33,7	33,2
L=10	1,215	0	0	33,2	33,3	33,4
L=11	-1,215	0	0	33,6	33,2	33,7
L=12	0	1,215	0	33,9	33,9	33,6
L=13	0	-1,215	0	33,7	33,7	33,9
L=14	0	0	-1,215	33,6	33,8	33,5
L=15	0	0	1,215	33,6	33,6	33,7

ВАРИАНТ 37

Номер опыта	X1	X2	X3	y_{L1}	y_{L2}	y_{L3}
L=1	1	1	1	12	12.5	12.3
L=2	1	-1	-1	12.7	12.2	11.9

L=3	-1	1	-1	12.5	12.1	12.2
L=4	-1	-1	1	12.4	12.3	12.5
L=5	1	1	-1	12.8	12.5	12.8
L=6	-1	1	1	12.7	12.2	12.1
L=7	1	-1	1	12	12.2	12.4
L=8	-1	-1	-1	12.4	12.3	12.7
L=9	0	0	0	12.9	12.5	12.7
L=10	1,215	0	0	12.7	12.2	12.4
L=11	-1,215	0	0	12.5	12.4	12.0
L=12	0	1,215	0	12.4	12.3	12.3
L=13	0	-1,215	0	12	12.5	12.6
L=14	0	0	-1,215	12.7	12.2	12.9
L=15	0	0	1,215	12.5	11.9	12.2

ВАРИАНТ 38

Нормированные факторы   Результаты опытов

Номер опыта	X1	X2	X3	y_{L1}	y_{L2}	y_{L3}
L=1	+1	+1	+1	10,9	10.5	10.9
L=2	+1	-1	-1	10,9	10.4	10.3
L=3	-1	+1	-1	10,3	10.2	10.8
L=4	-1	-1	+1	10,9	10.7	10.2
L=5	+1	+1	-1	10,4	10.5	10.9
L=6	-1	+1	+1	10,2	10.4	10.3
L=7	+1	-1	+1	10,8	10.9	10.5
L=8	-1	-1	-1	10,2	10.7	10.2
L=9	0	0	0	10,5	10.5	10.9
L=10	+1.215	0	0	10,2	10.4	10.3
L=11	-1.215	0	0	10,3	10.9	10.5

L=12	0	+1.215	0	10,3	10.7	10.2
L=13	0	-1.215	0	10,8	10.5	10.9
L=14	0	0	-1.215	10,3	10.4	10.3
L=15	0	0	+1.215	10,5	10.9	10.5

ВАРИАНТ 39

Нормированные факторы   Результаты опытов

Номер опыта	X1	X2	X3	y_{L1}	y_{L2}	y_{L3}
L=1	+1	+1	+1	50,8	50.4	50.3
L=2	+1	-1	-1	50,6	50.9	50.5
L=3	-1	+1	-1	50,9	50.7	50.2
L=4	-1	-1	+1	50,2	50.5	50.9
L=5	+1	+1	-1	50,8	50.4	50.3
L=6	-1	+1	+1	50,5	50.8	50.5
L=7	+1	-1	+1	50,7	50.7	50.2
L=8	-1	-1	-1	50,7	50.5	50.9
L=9	0	0	0	50,6	50.4	50.3
L=10	+1.215	0	0	50,6	50.9	50.5
L=11	-1.215	0	0	50,4	50.7	50.2
L=12	0	+1.215	0	50,4	50.5	50.9
L=13	0	-1.215	0	50,9	50.4	50.3
L=14	0	0	-1.215	50,6	50.9	50.5
L=15	0	0	+1.215	50,4	50.7	50.2

ВАРИАНТ 40

Нормированные факторы   Результаты опытов

Номер опыта	X1	X2	X3	y_{L1}	y_{L2}	y_{L3}

L=1	+1	+1	+1	115.8	111.2	115
L=2	+1	-1	-1	116.0	115.5	114,3
L=3	-1	+1	-1	116.2	114.8	116,2
L=4	-1	-1	+1	116.4	115.1	115,6
L=5	+1	+1	-1	115.6	114.4	115
L=6	-1	+1	+1	115.8	113.7	114,2
L=7	+1	-1	+1	116.5	114.7	115,5
L=8	-1	-1	-1	116.3	114.4	115,4
L=9	0	0	0	115.7	114.0	114,1
L=10	+1.215	0	0	115.9	114.3	116
L=11	-1.215	0	0	116.1	114.6	114,1
L=12	0	+1.215	0	116.3	114.9	114,7
L=13	0	-1.215	0	116.5	115.2	115,7
L=14	0	0	-1.215	116.2	114.9	116,4
L=15	0	0	+1.215	116.5	114.7	115,6

ВАРИАНТ 41

Нормированные факторы   Результаты опытов

Номер опыта	X1	X2	X3	y_{L1}	y_{L2}	y_{L3}
L=1	+1	+1	+1	235.9	235,9	235.2
L=2	+1	-1	-1	234.7	236,4	235.5
L=3	-1	+1	-1	235.5	235,4	235.8
L=4	-1	-1	+1	236.4	236,4	236.1
L=5	+1	+1	-1	235.8	236	235.4
L=6	-1	+1	+1	235.7	236,1	235.7
L=7	+1	-1	+1	235.5	235,7	236.7
L=8	-1	-1	-1	236.4	235,8	236.4
L=9	0	0	0	235.9	235,5	236.0
L=10	+1.215	0	0	235.7	236,2	235.3

L=11	-1.215	0	0	235.5	236	235.6
L=12	0	+1.215	0	236.4	236,1	235.9
L=13	0	-1.215	0	235.9	236,4	235.2
L=14	0	0	-1.215	235.7	235,5	235.9
L=15	0	0	+1.215	235.5	235,8	235.7

ВАРИАНТ 42

	Нормированные факторы			Результаты опытов		
Номер опыта	X1	X2	X3	y_{L1}	y_{L2}	y_{L3}
L=1	+1	+1	+1	72,1	72.8	73.2
L=2	+1	-1	-1	72,9	72.0	72.5
L=3	-1	+1	-1	72,8	72.2	71.8
L=4	-1	-1	+1	72	72.4	73.1
L=5	+1	+1	-1	72,9	72.6	72.4
L=6	-1	+1	+1	72	71.8	72.7
L=7	+1	-1	+1	71,8	72.5	72.7
L=8	-1	-1	-1	72,8	72.3	72.4
L=9	0	0	0	71,9	72.7	72.0
L=10	+1.215	0	0	71,8	71.9	72.3
L=11	-1.215	0	0	71,8	73.1	72.6
L=12	0	+1.215	0	72,3	72.3	71.9
L=13	0	-1.215	0	72,1	73.5	73.2
L=14	0	0	-1.215	72,2	72.2	71.9
L=15	0	0	+1.215	72,4	72.5	71.7

ВАРИАНТ 43

Нормированные факторы Результаты опытов

Номер опыта	X1	X2	X3	y_{L1}	y_{L2}	y_{L3}
L=1	+1	+1	+1	60.9	60.5	60,8
L=2	+1	-1	-1	60.7	60.2	60,8
L=3	-1	+1	-1	60.5	60.1	60,3
L=4	-1	-1	+1	60.4	60.3	60,9
L=5	+1	+1	-1	60.8	60.5	60,7
L=6	-1	+1	+1	60.7	60.2	60,9
L=7	+1	-1	+1	60.5	60.2	60,6
L=8	-1	-1	-1	60.4	60.3	60,6
L=9	0	0	0	60.9	60.5	60,4
L=10	+1.215	0	0	60.7	60.2	60,5
L=11	-1.215	0	0	60.5	60.4	60,3
L=12	0	+1.215	0	60.4	60.3	60,8
L=13	0	-1.215	0	60.9	60.5	60,6
L=14	0	0	-1.215	60.7	60.2	60,4
L=15	0	0	+1.215	60.5	60.9	60,8

ВАРИАНТ 44

Нормированные факторы Результаты опытов

Номер опыта	X1	X2	X3	y_{L1}	y_{L2}	y_{L3}
L=1	+1	+1	+1	25.3	25.4	25,4
L=2	+1	-1	-1	24.9	25.2	24,9
L=3	-1	+1	-1	25.2	25.6	25
L=4	-1	-1	+1	25.5	25.0	25,3
L=5	+1	+1	-1	24.8	25.4	25,4
L=6	-1	+1	+1	25.1	25.8	25
L=7	+1	-1	+1	25.4	25.2	25,3

L=8	-1	-1	-1	24.7	25.6	25
L=9	0	0	0	25.7	25.0	25,6
L=10	+1.215	0	0	25.4	25.6	25
L=11	-1.215	0	0	25.0	25.4	25,1
L=12	0	+1.215	0	25.3	25.8	25,2
L=13	0	-1.215	0	25.6	25.2	25,4
L=14	0	0	-1.215	24.9	25.6	25,4
L=15	0	0	+1.215	25.2	25.0	25,6

ВАРИАНТ 45

Нормированные факторы Результаты опытов

Номер опыта	X1	X2	X3	y_{L1}	y_{L2}	y_{L3}
L=1	+1	+1	+1	125.3	125,3	125.6
L=2	+1	-1	-1	124.9	124,9	125.3
L=3	-1	+1	-1	125.2	125,2	124.9
L=4	-1	-1	+1	125.5	125,9	125.2
L=5	+1	+1	-1	124.4	125,1	124.5
L=6	-1	+1	+1	125.1	125,5	124.8
L=7	+1	-1	+1	125.4	125	125.1
L=8	-1	-1	-1	124.7	125,8	125.4
L=9	0	0	0	125.7	125,3	124.7
L=10	+1.215	0	0	125.5	125,6	124.7
L=11	-1.215	0	0	125.0	125,8	125.4
L=12	0	+1.215	0	125.3	125,4	125.0
L=13	0	-1.215	0	125.6	125,9	125.3
L=14	0	0	-1.215	124.9	125,9	125.6
L=15	0	0	+1.215	125.9	125,7	124.9

ВАРИАНТ 46

Нормированные факторы Результаты опытов

Номер опыта	X1	X2	X3	y_{L1}	y_{L2}	y_{L3}
L=1	+1	+1	+1	25,6	25.5	25.8
L=2	+1	-1	-1	25,3	25.2	25.7
L=3	-1	+1	-1	25,4	25.1	25.5
L=4	-1	-1	+1	25,2	25.3	25.4
L=5	+1	+1	-1	25,6	25.5	25.9
L=6	-1	+1	+1	25,8	25.2	25.7
L=7	+1	-1	+1	25,7	25.2	25.5
L=8	-1	-1	-1	25,9	25.3	25.4
L=9	0	0	0	25,2	25.5	25.9
L=10	+1.215	0	0	25,4	25.2	25.7
L=11	-1.215	0	0	25,2	25.4	25.5
L=12	0	+1.215	0	25,6	25.3	25.4
L=13	0	-1.215	0	25,2	25.5	25.9
L=14	0	0	-1.215	25,8	25.2	25.7
L=15	0	0	+1.215	25,3	25.9	25.5

ВАРИАНТ 47

Нормированные факторы Результаты опытов

Номер опыта	X1	X2	X3	y_{L1}	y_{L2}	y_{L3}
L=1	+1	+1	+1	26.9	26,2	26.2
L=2	+1	-1	-1	26.7	26,2	26.5
L=3	-1	+1	-1	26.5	26,6	26.8
L=4	-1	-1	+1	26.4	26,5	26.1
L=5	+1	+1	-1	26.8	26,2	26.4
L=6	-1	+1	+1	26.7	26,3	26.7
L=7	+1	-1	+1	26.5	26,3	26.7

L=8	-1	-1	-1	26.4	26,3	26.4
L=9	0	0	0	26.9	26,7	26.0
L=10	+1.215	0	0	26.7	26,8	26.3
L=11	-1.215	0	0	26.5	26,6	26.6
L=12	0	+1.215	0	26.4	26,2	26.9
L=13	0	-1.215	0	26.9	26,3	26.2
L=14	0	0	-1.215	26.7	26,3	26.9
L=15	0	0	+1.215	26.5	26,5	26.7

ВАРИАНТ 48

Нормированные факторы Результаты опытов

Номер опыта	X1	X2	X3	y_{L1}	y_{L2}	y_{L3}
L=1	+1	+1	+1	27.8	27.4	27,3
L=2	+1	-1	-1	27.2	27.9	27,5
L=3	-1	+1	-1	27.5	27.7	27,7
L=4	-1	-1	+1	27.4	27.5	27,4
L=5	+1	+1	-1	27.7	27.4	27,2
L=6	-1	+1	+1	27.2	27.8	27,7
L=7	+1	-1	+1	27.5	27.7	27,7
L=8	-1	-1	-1	27.4	27.5	27,2
L=9	0	0	0	27.8	27.4	27,9
L=10	+1.215	0	0	27.2	27.9	27,3
L=11	-1.215	0	0	27.5	27.7	27,8
L=12	0	+1.215	0	27.4	27.5	27,8
L=13	0	-1.215	0	27.8	27.4	27,9
L=14	0	0	-1.215	27.2	27.9	27,4
L=15	0	0	+1.215	27.5	27.7	27,9

ВАРИАНТ 49

Нормированные факторы   Результаты опытов

Номер опыта	X1	X2	X3	y_{L1}	y_{L2}	y_{L3}
L=1	+1	+1	+1	28.4	28,4	28.9
L=2	+1	-1	-1	28.7	28,6	28.3
L=3	-1	+1	-1	28.8	28,8	28.8
L=4	-1	-1	+1	28.5	28,4	28.2
L=5	+1	+1	-1	28.4	28,7	28.9
L=6	-1	+1	+1	28.8	28,8	28.3
L=7	+1	-1	+1	28.2	28,8	28.5
L=8	-1	-1	-1	28.5	28,9	28.2
L=9	0	0	0	28.4	28,9	28.9
L=10	+1.215	0	0	28.8	28,2	28.3
L=11	-1.215	0	0	28.2	28,6	28.5
L=12	0	+1.215	0	28.5	28,7	28.2
L=13	0	-1.215	0	28.4	28,6	28.9
L=14	0	0	-1.215	28.8	28,9	28.3
L=15	0	0	+1.215	28.2	28,5	28.5

ВАРИАНТ 50

Нормированные факторы   Результаты опытов

Номер опыта	X1	X2	X3	y_{L1}	y_{L2}	y_{L3}
L=1	+1	+1	+1	29.8	29.4	29,9
L=2	+1	-1	-1	29.2	29.9	29,3
L=3	-1	+1	-1	29.5	29.7	29,7
L=4	-1	-1	+1	29.4	29.5	29,4
L=5	+1	+1	-1	29.7	29.4	29,2
L=6	-1	+1	+1	29.2	29.8	29,5

L=7	+1	-1	+1	29.5	29.7	29,3
L=8	-1	-1	-1	29.4	29.5	29,4
L=9	0	0	0	29.8	29.4	29,2
L=10	+1.215	0	0	29.2	29.9	29,6
L=11	-1.215	0	0	29.5	29.7	29,2
L=12	0	+1.215	0	29.4	29.5	29,4
L=13	0	-1.215	0	29.8	29.4	29,2
L=14	0	0	-1.215	29.2	29.9	29,5
L=15	0	0	+1.215	29.5	29.7	29,4

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

ТАБЛИЦЫ ЗНАЧЕНИЙ СТАТИСТИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ

Критические значения для критерия Кохрена

n=k	m=2		m=3		m=4	
	1%	5%	1%	5%	1%	5%
2	-	-	0,995	0,975	0,979	0,939
3	0,993	0,967	0,942	0,871	0,883	0,798
4	0,968	0,906	0,864	0,768	0,781	0,684
5	0,928	0,841	0,788	0,684	0,696	0,598
6	0,883	0,781	0,722	0,616	0,626	0,532
7	0,838	0,727	0,664	0,561	0,568	0,480
8	0,794	0,680	0,615	0,516	0,521	0,438
9	0,754	0,638	0,573	0,478	0,481	0,403
10	0,718	0,602	0,536	0,445	0,447	0,373
11	0,684	0,570	0,504	0,417	0,418	0,348
12	0,653	0,541	0,475	0,392	0,392	0,326
13	0,624	0,515	0,450	0,371	0,369	0,307
14	0,599	0,492	0,427	0,352	0,349	0,291
15	0,575	0,471	0,407	0,335	0,332	0,276
16	0,553	0,452	0,388	0,319	0,316	0,262
17	0,532	0,434	0,372	0,305	0,301	0,250
18	0,514	0,418	0,356	0,293	0,288	0,240
19	0,496	0,403	0,343	0,281	0,276	0,230
20	0,480	0,389	0,330	0,270	0,265	0,220
21	0,465	0,377	0,318	0,261	0,255	0,212
22	0,450	0,365	0,307	0,252	0,246	0,204
23	0,437	0,354	0,297	0,243	0,238	0,197
24	0,425	0,343	0,287	0,235	0,230	0,191
25	0,413	0,334	0,278	0,228	0,222	0,185

n=k	m=5		m=6	
	1%	5%	1%	5%
2	0,959	0,906	0,937	0,877
3	0,834	0,746	0,793	0,707
4	0,721	0,629	0,676	0,590
5	0,633	0,544	0,588	0,506
6	0,564	0,480	0,520	0,445
7	0,508	0,431	0,466	0,397
8	0,463	0,391	0,423	0,360
9	0,425	0,358	0,387	0,329
10	0,393	0,331	0,357	0,303
11	0,366	0,308	0,332	0,281
12	0,343	0,288	0,310	0,262
13	0,322	0,271	0,291	0,243
14	0,304	0,255	0,274	0,232
15	0,288	0,242	0,259	0,220
16	0,274	0,230	0,246	0,208
17	0,261	0,219	0,234	0,198
18	0,249	0,209	0,223	0,189
19	0,238	0,200	0,214	0,181
20	0,229	0,192	0,205	0,174
21	0,220	0,185	0,197	0,167
22	0,212	0,178	0,189	0,160
23	0,204	0,172	0,182	0,155
24	0,197	0,166	0,176	0,149
25	0,190	0,160	0,170	0,144

Критические значения коэффициента Стьюдента (t-критерия) для различной доверительной вероятности p и числа степеней свободы f

f	***p***							
	0,80	**0,90**	**0,95**	**0,98**	**0,99**	**0,995**	**0,998**	**0,999**
1	3,0770	6,3130	12,7060	31,820	63,656	127,656	318,306	636,619
2	1,8850	2,9200	4,3020	6,964	9,924	14,089	22,327	31,599

3	1,6377	2,35340	3,182	4,540	5,840	7,458	10,214	12,924
4	1,5332	2,13180	2,776	3,746	4,604	5,597	7,173	8,610
5	1,4759	2,01500	2,570	3,649	4,0321	4,773	5,893	6,863
6	1,4390	1,943	2,4460	3,1420	3,7070	4,316	5,2070	5,958
7	1,4149	1,8946	2,3646	2,998	3,4995	4,2293	4,785	5,4079
8	1,3968	1,8596	2,3060	2,8965	3,3554	3,832	4,5008	5,0413
9	1,3830	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498	3,6897	4,2968	4,780
10	1,3720	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693	3,5814	4,1437	4,5869
11	1,363	1,795	2,201	2,718	3,105	3,496	4,024	4,437
12	1,3562	1,7823	2,1788	2,6810	3,0845	3,4284	3,929	4,178
13	1,3502	1,7709	2,1604	2,6503	3,1123	3,3725	3,852	4,220
14	1,3450	1,7613	2,1448	2,6245	2,976	3,3257	3,787	4,140
15	1,3406	1,7530	2,1314	2,6025	2,9467	3,2860	3,732	4,072
16	1,3360	1,7450	2,1190	2,5830	2,9200	3,2520	3,6860	4,0150
17	1,3334	1,7396	2,1098	2,5668	2,8982	3,2224	3,6458	3,965
18	1,3304	1,7341	2,1009	2,5514	2,8784	3,1966	3,6105	3,9216
19	1,3277	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609	3,1737	3,5794	3,8834
20	1,3253	1,7247	2,08600	2,5280	2,8453	3,1534	3,5518	3,8495
21	1,3230	1,7200	2,2,0790	2,5170	2,8310	3,1350	3,5270	3,8190
22	1,3212	1,7117	2,0739	2,5083	2,8188	3,1188	3,5050	3,7921
23	1,3195	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073	3,1040	3,4850	3,7676
24	1,3178	1,7109	2,0639	2,4922	2,7969	3,0905	3,4668	3,7454
25	1,3163	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874	3,0782	3,4502	3,7251
26	1,315	1,705	2,059	2,478	2,778	3,0660	3,4360	3,7060
27	1,3137	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707	3,0565	3,4210	3,6896
28	1,3125	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633	3,0469	3,4082	3,6739
29	1,3114	1,6991	2,0452	2,4620	2,7564	3,0360	3,3962	3,8494
30	1,3104	1,6973	2,0423	2,4573	2,7500	3,0298	3,3852	3,6460
32	1,3080	1,6930	2,0360	2,4480	2,7380	3,0140	3,3650	3,6210
34	1,3070	1,6909	2,0322	2,4411	2,7284	3,9520	3,3479	3,6007
36	1,3050	1,6883	2,0281	2,4345	2,7195	9,490	3,3326	3,5821
38	1,3042	1,6860	2,0244	2,4286	2,7116	3,9808	3,3190	3,5657

40	1,303	1,6839	2,0211	2,4233	2,7045	3,9712	3,3069	3,5510
42	1,320	1,682	2,018	2,418	2,6980	2,6930	3,2960	3,5370
44	1,301	1,6802	2,0154	2,4141	2,6923	3,9555	3,2861	3,5258
46	1,300	1,6767	2,0129	2,4102	2,6870	3,9488	3,2771	3,5150
48	1,299	1,6772	2,0106	2,4056	2,6822	3,9426	3,2689	3,5051
50	1,298	1,6759	2,0086	2,4033	2,6778	3,9370	3,2614	3,4060
55	1,2997	1,673	2,0040	2,3960	2,6680	2,9240	3,2560	3,4760
60	1,2958	1,6706	2,0003	2,3901	2,6603	3,9146	3,2317	3,4602
65	1,2947	1,6686	1,997	2,3851	2,6536	3,9060	3,2204	3,4466
70	1,2938	1,6689	1,9944	2,3808	2,6479	3,8987	3,2108	3,4350
80	1,2820	1,6640	1,9900	2,3730	2,6380	2,8870	3,1950	3,4160
90	1,2910	1,6620	1,9867	2,3885	2,6316	2,8779	3,1833	3,4019
100	1,2901	1,6602	1,9840	2,3642	2,6259	2,8707	3,1737	3,3905
120	1,2888	1,6577	1,9719	2,3578	2,6174	2,8598	3,1595	3,3735
150	1,2872	1,6551	1,9759	2,3515	2,6090	2,8482	3,1455	3,3566
200	1,2858	1,6525	1,9719	2,3451	2,6006	2,8385	3,1315	3,3398
250	1,2849	1,6510	1,9695	2,3414	2,5966	2,8222	3,1232	3,3299
300	1,2844	1,6499	1,9679	2,3388	2,5923	2,8279	3,1176	3,3233
400	1,2837	1,6487	1,9659	2,3357	2,5882	2,8227	3,1107	3,3150
500	1,2830	1,6470	1,9640	2,3330	2,7850	2,8190	3,1060	3,3100

Значения критерия Фишера (F-критерия)

	f_1					
f_2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60

	f_1				
f_2	**7**	**8**	**9**	**10**	**15**
1	236,77	238,88	240,54	241,88	245,95
2	19,35	19,37	19,38	19,40	19,43
3	8,89	8,85	8,81	8,79	8,70
4	6,09	6,04	6,00	5,96	5,86
5	4,88	4,82	4,77	4,74	4,62
6	4,21	4,15	4,10	4,06	3,94
7	3,79	3,73	3,68	3,64	3,51
8	3,50	3,44	3,39	3,35	3,22
9	3,29	3,23	3,18	3,14	3,01
10	3,14	3,07	3,02	2,98	2,85
11	3,01	2,95	2,90	2,85	2,72
12	2,91	2,85	2,80	2,75	2,62
13	2,83	2,77	2,71	2,67	2,53
14	2,76	2,70	2,65	2,60	2,46
15	2,71	2,64	2,59	2,54	2,40
16	2,66	2,59	2,54	2,49	2,35
17	2,61	2,55	2,49	2,45	2,31
18	2,58	2,51	2,46	2,41	2,27

Значения критерия Фишера (F-критерия) для уровня значимости p = 0,05

f_1 - число степеней свободы большей дисперсии, f_2 - число степеней свободы меньшей дисперсии

	f_1				
f_2	**7**	*f_2*	**7**	*f_2*	**7**
19	2,54	2,48	2,42	2,38	2,23
20	2,51	2,45	2,39	2,35	2,20

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Анфилатов В,С, Системный анализ в управлении/ В,С, Анфилатов, А,А, Емельянов, А,А, Кукушкин, М,: Финансы и статистика, 2002, 357 с,
2. Асатурян В,И, Теория планирования эксперимента/ В, И, Асатурян, М,: Радио и связь, 1998, 254 с,
3. Иванов А,Ю,, Полковников С,П,, Ходасевич Г,Б, Военно-технические основы построения и математическое моделирование перспективных средств и комплексов автоматизации/ А,Ю, Иванов, С,П, Полковников, Г,Б, Ходасевич, СПб,: ВАС, 1997, 237 с,
4. Кузин Л,Т, Основы кибернетики, Т, 1, Математические основы кибернетики/ Л,Т, Кузин, М,: Энергия, 1993, 315 с,
5. Надежность и эффективность в технике, Т,6, Экспериментальная отработка и испытания, М,: Машиностроение, 1999, 287 с,
6. Налимов В,В, Теория эксперимента/ В,В, Налимов, М,: Наука, 1997, 260 с,
7. Ходасевич Г,Б, Обработка эксперименталь-ных данных на ЭВМ, Часть 1, Обработка одномерных данных/ Г,Б, Ходасевич, СПб,: СПбГУТ, 2002, 185 с,
8. Ходасевич Г,Б, Обработка эксперименталь-ных данных на ЭВМ, Часть 2, Обработка одномерных данных/ Г,Б, Ходасевич, СПб,: СПбГУТ, 2002, 210 с,
9. Львович Я,Е, Теоретические основы конструирования и надёжности РЭА/ Я,Е,Львович, В,Н, Фролов, М,: Радио и связь, 1998, 220 с,

ОГЛАВЛЕНИЕ