МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

«Воронежский государственный технический университет»

Кафедра прикладной математики и механики

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Методические указания
к проведению практических занятий
для студентов направления 15.03.01
«Машиностроение»
заочной формы обучения

Воронеж 2021

УДК 517.9(075)
ББК 22.161(я7)

Составители: А. П. Бырдин, А.А. Сидоренко

Основы математического моделирования: методические указания к проведению практических занятий для студентов направления 15.03.01 «Машиностроение» заочной формы обучения / ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»; сост.: А. П. Бырдин, А. А. Сидоренко. – Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2021. - 24 с.

Методические указания содержит программу курса «Основы математического моделирования», литературу, примеры решения задач и задачи для самостоятельного решения.

Предназначены для студентов направления 15.03.01 «Машиностроение» (профиль «Технологии, оборудование и автоматизация машиностроительных производств») заочной формы обучения.

Методические указания подготовлены в электронном виде и содержатся в файле Основы Матмоделирования_Машиностроение_заочники.pdf

Табл. 12. Библиогр.: 7 назв.

УДК 517.9(075)
ББК 22.161(я7)

Рецензент - *Е. А. Соболева, канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры прикладной математики и механики*

Издается по решению учебно-методического совета Воронежского государственного технического университета

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания предназначены для проведения практических занятий по курсу “Основы математического моделирования” для студентов-заочников направления «Машиностроение».

В них представлены задачи по численным методам, теории графов и методам оптимизации. Для успешного проведения практических занятий, а также последующей сдачи зачета необходимо изучить теоретические вопросы (ссылки на учебную литературу даны в каждом вопросе) и ознакомиться с методами решения типовых задач, которые приводятся ниже.

При изучении материала по учебнику полезно вести конспект, в который рекомендуется вписывать определения, формулировки теорем, формулы, уравнения и т.д. Чтение учебника должно сопровождаться решением задач, для чего рекомендуется завести специальную тетрадь. В пособии [3] имеется большое количество решенных задач, с которыми студентам рекомендуется ознакомиться при изучении соответствующего материала.

Если в процессе изучения теоретического материала или при решении задач у студентов возникают вопросы, справиться с которыми самостоятельно не удается, то за помощью можно обратиться к преподавателю на консультации.

ПРОГРАММА КУРСА “ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ” ДЛЯ СТУДЕНТОВ–ЗАОЧНИКОВ НАПРАВЛЕНИЯ «МАШИНОСТРОЕНИЕ» (ЧЕТВЕРТЫЙ СЕМЕСТР)

1. Задача и способы аппроксимации функций [**4**, гл.1, §1.1].

2. Интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона [**2**, гл. XIV, §12], [**3**, гл. VII, § 1], [**4**, гл.1, § 1.2], [**2**, гл. XIV, §§ 5-6], [**3**, гл.VII, § 3], [**4**, гл. 1, § 1.5].

3. Метод наименьших квадратов [**2**, гл. XIV, §§ 5-6], [**3**, гл.VII, § 3], [**4**, гл. 1, § 1.5].

4. Приближенное дифференцирование. Постановка вопроса [**2**, гл.XV, § 1], [**4**, гл. 6, §§ 6.1-6.2].

5. Постановка задачи решения обыкновенных дифференциальных уравнений [**4**, гл. 7, § 7.1].

6. Метод Эйлера [**3**, гл. IX, §§ 1-3], [**4**, гл. 7, §§ 7.2-7.4].

7. Методы Рунге-Кутта произвольного и четвертого порядков [**3**, гл. IX, § 4], [**4**, гл. 7, §§ 7.5-7.6].

8. Постановка задачи приближенного решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений [**4**, гл. 10, § 10.1].

9. Метод конечных разностей [**3**, гл. IX, §6], [**4**, гл.10, § 10.3].

10. Основные определения и понятия графа. Ориентированный граф. [5, §1.1], [**6**, гл. I, §1],

11. Матрицы и графы. Операции над графами. [**5**, гл. 1, §1.1- §1.7].

12. Маршруты, пути, циклы. [**5**, §1.4]. [**6**, гл. 4, §1],

13. Задачи дискретной оптимизации. Постановка задачи коммивояжера. [**7**, гл.5, §5.4.1].

14. Метод ветвей и границ. Дерево решений и стратегии его обхода. Оценки и рекорды. [**7**, гл. 5, §5.4.2].

15. Симплекс-метод [**8,** с. 137-146].

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ

1. Дайте определение аппроксимации функции. Что такое полиномиальная аппроксимация?
2. Запишите интерполяционный многочлен Лагранжа.
3. Запишите конечные разности различных порядков, выразите их через табличные значения функции.
4. Напишите первую и вторую интерполяционные формулы Ньютона.
5. Сформулируйте задачу, которую решают методом наименьших квадратов.
6. Сформулируйте задачу численного дифференцирования.
7. Запишите формулы численного дифференцирования, основанные на интерполяционных формулах Ньютона.
8. Запишите формулы Эйлера и Рунге-Кутта четвертого порядка для решения обыкновенных дифференциальных уравнений.
9. Сформулируйте задачу приближенного решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.
10. Назовите методы приближенного решения краевых задач.
11. Дайте определение графа, какие элементы он содержит. Что такое ориентированный граф?
12. Дайте определение матрицы инцидентности и матрицы смежности графа.
13. Сформулируйте задачу нахождения кратчайшего пути на графе.
14. В чем состоит специфика задач дискретной оптимизации. Что такое целевая функция? Допустимое решение?
15. Опишите постановку задачи коммивояжера. Переформулируйте задачу коммивояжера в задачу о переналадках оборудования.
16. В чем заключается суть метода ветвей и границ. Как строится дерево решений? Как вычисляются оценки и рекорды?
17. Как принимается решение о выборе перспективного подмножества и дальнейшем ветвлении? Как выполняется приведение матриц?
18. Что называется симплексным методом? Алгоритм метода.
19. Сформулируйте условие нахождения начального опорного решения.
20. Как составить симплексную таблицу? Как находится вершина нового (следующего) симплекса? Условие окончания поиска.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1

Задача №1

Задание. Дана табл. 1 значений функции $y = f(x)$. Используя метод наименьших квадратов, подобрать для заданных значений x и y:

1) линейную функцию $y = A_0 + A_1 x$;

2) квадратичную функцию $y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2$.

Построить графики этих функций.

Таблица 1

X	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
Y	0,31	0,82	1,29	1,85	2,51	3,02

Решение. Пусть для неизвестной функции $f(x)$ в точках $x_0, x_1, ..., x_m$ экспериментальным путем получены значения $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, ..., $y_m = f(x_m)$. Интерполяция позволяет аппроксимировать таблично заданную функцию $f(x)$ с помощью более простой функции $\varphi(x)$. При этом требуется выполнение в узлах интерполяции $\{x_i\}$ равенства $f(x_i) = \varphi(x_i)$ ($i = 0,1,...,m$). В ряде случаев выполнение этого условия затруднительно или даже нецелесообразно. При большом числе узлов интерполяции степень интерполирующего многочлена получается высокой. Поэтому точность такой аппроксимации гарантирована лишь в небольшом интервале порядка несколько шагов сетки. Для другого интервала приходится заново вычислять коэффициенты интерполяционной формулы. В практических приложениях желательно иметь единую приближенную формулу $f(x_i) \approx \varphi(x_i)$ ($i = 0,1,...,m$), пригодную для большего отрезка $[a,b]$. При этом точность приближения может оцениваться по-разному. В основу обычно берется рассмотренное отклонение

$$f(x_i) - \varphi(x_i) \quad (i = 0,1,...,m).$$

В связи с этим возникает задача о приближении: таблично заданную функцию $f(x)$ заменяют многочленом $P_n(x)$, который имеет не слишком высокую степень $n < m-1$ и дает в некотором смысле разумную точность аппроксимации.

Для решения этой задачи воспользуемся методом наименьших квадратов. В методе наименьших квадратов за меру отклонения многочлена $P_n(x)$ от функции $f(x)$ принимается их среднее квадратичное отклонение

$$\delta = \sum_{i=0}^{m} \left[P_n(x_i) - y_i\right]^2 .$$

Задача состоит в том, чтобы в аппроксимирующем многочлене $P_n(x) = A_0 + A_1 x + ... + A_n x^n$ подобрать коэффициенты $A_0, A_1, ..., A_n$ так, чтобы минимизировать $\delta = \sum_{i=0}^{m} \left[A_0 + A_1 x_i + ... + A_n x_i^n - y_i\right]^2 = \delta(A_0, A_1, ..., A_n)$. Так как коэффициенты $A_0, A_1, ..., A_n$ выступают в роли независимых переменных функции δ, то необходимым условием минимума является равенство нулю всех частных производных $\frac{\partial\delta}{\partial A_0}, \frac{\partial\delta}{\partial A_1}, \dots, \frac{\partial\delta}{\partial A_n}$. Приравнивая к нулю эти частные производные, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2\sum_{i=0}^{m}(A_0 + A_1 x_i + A_2 x_i^2 + ... + A_n x_i^n - y_i) = 0; \\ 2\sum_{i=0}^{m}(A_0 + A_1 x_i + A_2 x_i^2 + ... + A_n x_i^n - y_i) x_i = 0; \\ 2\sum_{i=0}^{m}(A_0 + A_1 x_i + A_2 x_i^2 + ... + A_n x_i^n - y_i) x_i^2 = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 2\sum_{i=0}^{m}(A_0 + A_1 x_i + A_2 x_i^2 + ... + A_n x_i^n - y_i) x_i^n = 0. \end{cases}$$

После преобразования система принимает вид

$$\begin{cases} A_0 m + A_1 \sum_{i=0}^{m} x_i + A_2 \sum_{i=0}^{m} x_i^2 + ... + A_n \sum_{i=0}^{m} x_i^n = \sum_{i=0}^{m} y_i; \\ A_0 \sum_{i=0}^{m} x_i + A_1 \sum_{i=0}^{m} x_i^2 + A_2 \sum_{i=0}^{m} x_i^3 + ... + A_n \sum_{i=0}^{m} x_i^{n+1} = \sum_{i=0}^{m} x_i y_i; \\ A_0 \sum_{i=0}^{m} x_i^2 + A_1 \sum_{i=0}^{m} x_i^3 + A_2 \sum_{i=0}^{m} x_i^4 + ... + A_n \sum_{i=0}^{m} x_i^{n+2} = \sum_{i=0}^{m} x_i^2 y_i; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_0 \sum_{i=0}^{m} x_i^n + A_1 \sum_{i=0}^{m} x_i^{n+1} + A_2 \sum_{i=0}^{m} x_i^{n+2} + ... + A_n \sum_{i=0}^{m} x_i^{2n} = \sum_{i=0}^{m} x_i^n y_i. \end{cases}$$

Определитель этой системы отличен от нуля, поэтому она имеет единственное решение $A_0, A_1, ..., A_n$.

1. Аппроксимируем таблично заданную функцию $y = f(x)$ линейной $y = A_0 + A_1 x$.

Составим систему для определения A_0, A_1:

$$\begin{cases} A_0 m + A_1 \sum\limits_{k=1}^{6} x_k = \sum\limits_{k=1}^{6} y_k; \\ A_0 \sum\limits_{k=1}^{6} x_k + A_1 \sum\limits_{k=1}^{6} x_k^2 = \sum\limits_{k=1}^{6} x_k y_k. \end{cases}$$

Предварительно вычисляем $\sum\limits_{k=1}^{6} x_k = 0{,}5 + 1 + 1{,}5 + 2 + 2{,}5 + 3 = 10{,}5$,

$\sum\limits_{k=1}^{6} x_k^2 = 0{,}25 + 1 + 2{,}25 + 4 + 6{,}25 + 9 = 22{,}75$,

$\sum\limits_{k=1}^{6} y_k = 0{,}31 + 0{,}82 + 1{,}29 + 1{,}85 + 2{,}51 + 3{,}02 = 9{,}8$,

$\sum\limits_{k=1}^{6} x_k y_k = 0{,}5 \cdot 0{,}31 + 1 \cdot 0{,}82 + 1{,}5 \cdot 1{,}29 + 2 \cdot 1{,}85 + 2{,}5 \cdot 2{,}51 + 3 \cdot 3{,}02 = 21{,}94.$

Следовательно, $\begin{cases} 6A_0 + 10{,}5A_1 = 9{,}8; \\ 10{,}5A_0 + 22{,}75A_1 = 21{,}94. \end{cases}$

Решая эту систему, находим A_0 и A_1: $A_0 = -0{,}28$, $A_1 = 1{,}09$.
Искомый многочлен $y = 1{,}09x + 0{,}28$.

2. Аппроксимируем таблично заданную функцию $y = f(x)$ квадратичной функцией $y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2$.

Составим систему для определения A_0, A_1, A_2:

$$\begin{cases} A_0 m + A_1 \sum\limits_{k=1}^{6} x_k + A_2 \sum\limits_{k=1}^{6} x_k^2 = \sum\limits_{k=1}^{6} y_k \\ A_0 \sum\limits_{k=1}^{6} x_k + A_1 \sum\limits_{k=1}^{6} x_k^2 + A_2 \sum\limits_{k=1}^{6} x_k^2 = \sum\limits_{k=1}^{6} x_k y_k \\ A_0 \sum\limits_{k=1}^{6} x_k^2 + A_1 \sum\limits_{k=1}^{6} x_k^3 + A_2 \sum\limits_{k=1}^{6} x_k^4 = \sum\limits_{k=1}^{6} x_k^2 y_k. \end{cases}$$

Предварительно вычисляем:

$$\sum_{k=1}^{6} x_k = 0{,}5 + 1 + 1{,}5 + 2 + 2{,}5 + 3 = 10{,}5,$$

$$\sum_{k=1}^{6} x_k^2 = 0{,}25 + 1 + 2{,}25 + 4 + 6{,}25 + 9 = 22{,}75,$$

$$\sum_{k=1}^{6} x_k^3 = 0{,}125 + 1 + 3{,}375 + 8 + 15{,}625 + 27 = 55{,}125,$$

$$\sum_{k=1}^{6} x_k^4 = 0{,}0625 + 1 + 5{,}0625 + 16 + 39{,}0625 + 81 = 142{,}1875,$$

$$\sum_{k=1}^{6} y_k = 0{,}31 + 0{,}82 + 1{,}29 + 1{,}85 + 2{,}51 + 3{,}02 = 9{,}8,$$

$$\sum_{k=1}^{6} x_k y_k = 0{,}5 \cdot 0{,}31 + 1 \cdot 0{,}82 + 1{,}5 \cdot 1{,}29 + 2 \cdot 1{,}85 + 2{,}5 \cdot 2{,}51 + 3 \cdot 3{,}02 = 21{,}94.$$

$$\sum_{k=1}^{6} x_k^2 y_k = 0{,}25 \cdot 0{,}31 + 1 \cdot 0{,}82 + 2{,}25 \cdot 1{,}29 + 4 \cdot 1{,}85 + 6{,}25 \cdot 2{,}51 + 9 \cdot 3{,}02 = 54{,}0675.$$

Получим систему уравнений вида

$$\begin{cases} 6A_0 + 10{,}5A_1 + 22{,}75A_2 = 9{,}8; \\ 10{,}5A_0 + 22{,}75A_1 + 55{,}125A_2 = 21{,}94; \\ 22{,}75A_0 + 55{,}125A_1 + 142{,}1875A_2 = 54{,}0675. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим A_0, A_1 и A_2: $A_0 = -0{,}08$, $A_1 = 0{,}74$, $A_2 = 0{,}07$.

Искомый многочлен $y = -0{,}08x^2 + 0{,}74x + 0{,}07.$

Задача №2

Задание. Найти численное решение линейной краевой задачи для дифференциального уравнения 2-го порядка конечно-разностным методом, используя аппроксимацию производных второго порядка и шаг $h = 0{,}1$.

$$y'' + xy' - 0{,}5\frac{y}{x} = 1, \qquad \begin{cases} y(2) + 2y'(2) = 1, \\ y(2{,}3) = 2{,}15. \end{cases}$$

Решение. *Метод конечных разностей.*

Разбив отрезок $[2;2{,}3]$ на части с шагом $h = 0{,}1$, получим четыре узловые точки с абсциссами $x_0 = 2$; $x_1 = 2{,}1$; $x_2 = 2{,}2$; $x_3 = 2{,}3$. Две точки $x_0 = 2$ и

$x_3 = 2{,}3$ являются граничными, а две другие – внутренними. Данное уравнение во внутренних точках заменим конечно-разностным уравнением:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + x_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - 0{,}5\frac{y_i}{x_i} = 1 \ (i = 2{,}3).$$

Для краевых условий составим конечно-разностное уравнение в граничных точках:

$$\begin{cases} y_0 + 2\dfrac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h} = 1 \quad (i = 0), \\ y_3 = 2{,}15 \quad (i = 3). \end{cases}$$

Данная задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} y_0 + \dfrac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{0{,}1} = 1 \\ \dfrac{y_2 - 2y_1 + y_0}{0{,}01} + 2{,}1 \cdot \dfrac{y_2 - y_0}{0{,}2} - 0{,}5\dfrac{y_1}{2{,}1} = 1, \\ \dfrac{y_3 - 2y_2 + y_1}{0{,}01} + 2{,}2 \cdot \dfrac{y_3 - y_1}{0{,}2} - 0{,}5\dfrac{y_2}{2{,}2} = 1, \\ y_3 = 2{,}15. \end{cases}$$

Выполнив преобразования, имеем

$$\begin{cases} -2.9y_0 + 4y_1 - y_2 = 0.1, \\ 375.9y_0 - 841y_1 + 464.1y_2 = 4.2, \\ 391.6y_1 - 881y_2 + 488.4y_3 = 4.4, \\ y_3 = 2.15. \end{cases}$$

Подставив значение y_3 в третье уравнение, получим для определения остальных неизвестных систему

$$\begin{cases} -2{,}9y_0 + 4y_1 - y_2 = 0{,}1, \\ 375{,}9y_0 - 841y_1 + 464{,}1y_2 = 4{,}2, \\ 391{,}6y_1 - 881y_2 = -1045{,}66. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получим

$x_0 = 2$; $y_0 = 2{,}235$; $x_1 = 2{,}1$; $y_1 = 2{,}185$;
$x_2 = 2{,}2$; $y_2 = 2{,}158$; $x_3 = 2{,}3$; $y_3 = 2{,}150$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Способом наименьших квадратов подобрать для заданных значений x и y (таблица 2) линейную функцию $y = a_0 + a_1 x$:

Таблица 2

x	1	2	3	4	5	6
y	2	4.9	7.9	1.1	4.1	17

2. Способом наименьших квадратов подобрать для заданных значений x и y (таблица 3) квадратичную функцию $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$:

………..Таблица 3

x	7.5	4.0	7.8	3.7	6.7	6.9
y	92	283	270	235	97	81

3. Методом конечных разностей второго порядка составьте алгебраическую систему уравнений относительно значений решения краевой задачи

$$y'' + 2y' - 3xy = \frac{2-8x}{x^3}, \quad x \in [1,2], \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 0.5$$

на сетке с шагом $h = 0.2$.

4. Используя метод конечных разностей, составить решение краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения точностью $\varepsilon = 10^{-3}$; шаг $h = 0.1$:

$$y'' + \frac{y'}{x} + 2y = x, \qquad \begin{cases} y(0.7) = 0.5 \\ 2y(1) + 3y'(1) = 1.2. \end{cases}$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №2

Задача №1

Задание. Решить задачу нахождения кратчайшего пути технологического маршрута, используя индивидуальные назначения на станки, а время выполнения операций подходящими станками и время транспортировки представлены в табл. 4.

Теория графов. Основные понятия. В системном анализе широко распространены графические методы исследования структуры системы. Эти методы хороши тем, что позволяют анализировать саму структуру системы без раскрытия содержания каждого элемента. Как известно, элементы системы теории графов отображаются в виде его вершин. Если элементы связаны между собой отрезками, то говорят, что имеется одномерный граф. При этом отрезки определяют связи между вершинами. Число связей, которыми элемент системы соединен с другими элементами, определяют число ребер, выходящих из вершины, которое принято называть степенью или индексом вершины. Если система связная, т.е. любой ее элемент связан с другими элементами, то соответствующий граф также получается связным.

Такая зависимость позволяет анализировать связи в системе по графам или их алгебраическим представлениям – матрицам связности. В свою очередь, возможность представить граф матрицей позволяет применить для анализа системы мощный математический аппарат теории матриц.

На основе теории графов, приводятся примеры анализа связности системы хищник-жертва и других систем, а также исследование различных свойств, например, определение нетипичных элементов системы (через вычисление эксцентриситета), определение границ и пр.

Теория графов является мощным инструментом исследования структурных свойств системы. При этом возможность матричного описания графа позволяет применять аналитические и компьютерные автоматизированные процедуры анализа систем. Однако теория графов предназначена для анализа статических структур.

Тео́рия гра́фов — раздел *дискретной математики*, изучающий свойства *графов.* В общем смысле граф представляется как множество *вершин* (узлов), соединенных *ребрами*. Теория графов находит применение, например, в геоинформационных системах. Существующие или вновь проектируемые дома, сооружения, кварталы и т.п. рассматриваются как вершины, а соединяющие их дороги, инженерные сети, линии электропередачи и т.п.— как ребра. Применение различных вычислений, производимых на таком графе, позволяет, например, найти кратчайший объездной путь или ближайший продуктовый магазин, спланировать оптимальный маршрут.

При изображении графов на рисунках чаще всего используется следующая система обозначений: вершины графа изображаются точками или, при конкретизации смысла вершины, прямоугольниками, овалами и др., где внутри фигуры раскрывается смысл вершины (графы блок-схем алгоритмов). Если между вершинами существует ребро, то соответствующие точки (фигуры) соединяются линией или дугой. В случае ориентированного графа дуги заменяют стрелками, или явно указывают направленность ребра. Иногда рядом с ребром размещают поясняющие надписи, раскрывающие смысл ребра, например, в графах переходов конечных автоматов. Различают планарные и непланарные графы. *Планарный граф*— это граф, который можно изобразить на рисунке (плоскости) без пересечения ребер (простейшие — треугольник или пара связанных вершин), иначе граф непланарный. В том случае, если граф не содержит циклов (содержащих, по крайней мере, один путь однократного обхода ребер и вершин с возвратом в исходную вершину), его принято называть «деревом». Важные виды деревьев в теории графов — бинарные деревья, где каждая вершина имеет одно входящее ребро и ровно два выходящих, или является конечной — не имеющей выходящих ребер и содержит одну корневую вершину, в которую нет входящего ребра.

Производственная задача, сводимая к задаче поиска пути на графе, возникает при выборе технологических маршрутов обработки деталей в гибкой производственной системе (ГПС).

Задача. Пусть на вход некоторой ГПС поступила партия одинаковых деталей для изготовления изделий одной номенклатуры. Задана установленная для этой номенклатуры последовательность технологических операций. Для каждой операции определены допустимые назначения на станки ГПС и время ее выполнения каждым подходящим станком. Время выполнения операции может зависеть от станка, который ее выполняет. Известно время транспортировки детали от одного станка к другому. Требуется так назначить операции на станки, чтобы получаемый при этом технологический маршрут прохождения станков был минимальным.

Решение. Пусть $O_1, O_2, ..., O_n$– последовательность операций, а $C_1, C_2, ..., C_m$– станки ГПС. Построим орграф с вершинами s, t и вершинами для каждой операции O_i и каждого станка C_i, который может ее выполнить. Вершины соединим дугами $s \to u_{i,1}$, $v_{i,n} \to t$, $u_{i,j} \to v_{i,j}$, $v_{i,j} \to u_{k,j+1}$ для всех допустимых наборов значений i, j, k.

Все дуги вида $u_{i,j} \to v_{i.j}$ нагрузим временем выполнения операции O_i станком C_i, все дуги вида $v_{i,j} \to v_{k,j+1}$, $i \neq k$ – временем транспортировки от станка C_i; к станку C_k, а все дуги вида $s \to u_{i,1}$, $v_{i,n} \to t$, $v_{i,j} \to u_{i,j+1}$– нулем.

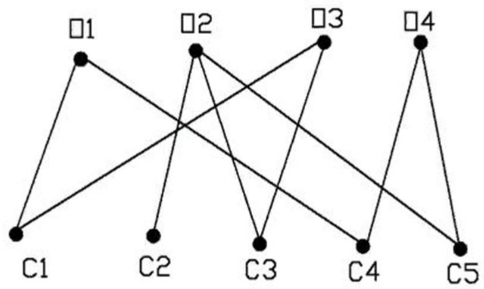

Рис. 1. Пример допустимых назначений операций на станки

Таблица 4

Допустимые назначения операций на станки

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
Q_1	1	0	0	1	0
Q_2	0	1	1	0	1
Q_3	1	0	1	0	0
Q_4	0	0	0	1	1

Рассмотрим пример построения орграфа при $n=4$, $m=5$. Допустимые назначения операций на станки определены ребрами двудольного графа на рис. 1 или в табл. 2, а время выполнения операций подходящими станками и время транспортировки представлены в табл. 5. Клетки, соответствующие недопустимым назначениям операции на станки, заполнены 0. Для удобства построения графа изобразим таблицу, где столбцы – это операции, а строки – станки. Начинаем построение из вершины «s», далее операция первая может быть выполнена на станке первом или четвертым, ставим в соответствующих ячейках направленный отрезок - дугу, затем соединяем вершину «s» с вершинами u_{11} и $u_{4,1}$, считая время затраченное от старта до начала выполнения операции равное 0. После этого для вершины v_{11} есть три пути, так вторая операция может быть выполнена на трех станках, соединяем дугами данные варианты. Аналогично для вершины $v_{4,1}$. Продолжая такой алгоритм приходим в финишную вершину t. На рис. 2 изображен соответствующий орграф.

Таблица 5

Время выполнения операций подходящими станками и время транспортировки

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5		C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
Q_1	3	1	2	4	5	Q_1	0	7	9	5	3
Q_2	4	2	5	3	6	Q_2	7	0	8	4	4
Q_3	1	3	4	2	5	Q_3	9	8	0	3	6
Q_4	2	5	1	5	3	Q_4	3	4	3	0	5
						Q_5	3	4	6	5	0

Произвольный путь на построенном орграфе из s в t проходит через промежуточные вершины $u_{i1,1}$, $v_{i1,1}$, $u_{i2,2}$, $v_{i2,2}$,...$u_{in,n}$, ,$v_{in,n}$, и обладает следующими свойствами:

а) он определяет вариант допустимого назначения операций на станки, поскольку $i_1, i_2,...,i_n$ – это номера станков, которые должны выполнять операции $O_1, O_2,...,O_n$. Причем нет ни одного варианта допустимого назначения операций, которому не соответствовал бы некоторый путь из s в t.

б) соответствующий путь маршрут проходит станки в последовательности $C_{i1}, C_{i2},...,C_{im}$. Самая длинная дуга пути определяет самый длительный по времени процесс на маршруте. Если такой дугой окажется $u_{ik,k} \to v_{ik,k}$, то самым длительным процессом будет операция O_k, если $v_{ik,k} \to u_{ik+1,k+1}$, то – транспортировка от станка C_{ik} к станку C_{ik+1}.

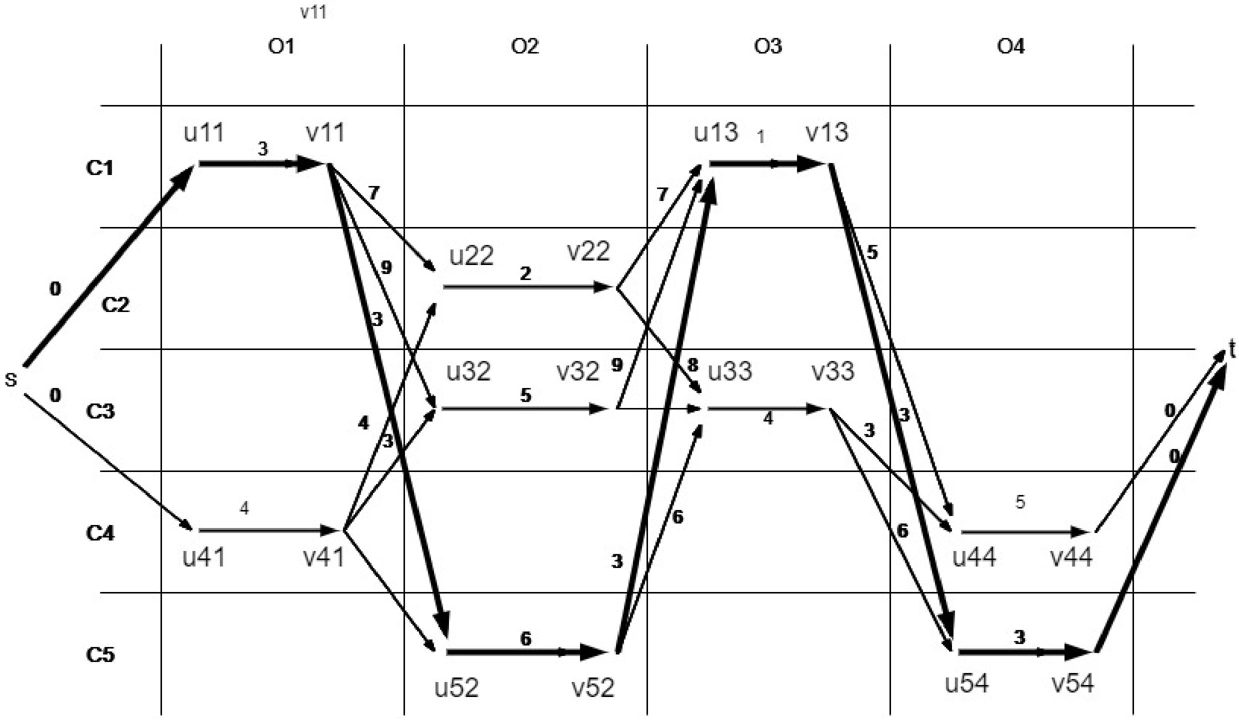

Рис. 2. Орграф для задачи нахождения кратчайшего пути

Пользуясь табл. 5, присваиваем дугам соответствующее время, например, если первую операцию выполнить на первом станке, то это займет 3 единицы времени, и т.д. Самым производительным является маршрут, который деталь проходит за минимальное время. Такая задача сводится к задаче нахождения кратчайшего пути. Поиск кратчайшего пути заключается в следующем: стартуя из вершины «» выбираем дуги с меньшим числом времени. Таким образом, минимальное время, за которое деталь проходит маршрут, равно 22, путь - $\{O_1 \to C_1; O_2 \to C_5; O_3 \to C_1; O_4 \to C_5\}$, на рисунке 2 кратчайший путь показан жирной линией.

Задача №2

Задание. Найти максимум целевой функции при заданных ограничениях.

$$Z(x) = 9x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 24, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_5 = 30. \end{cases}$$

Решение*. Алгоритм симплексного метода решения задач линейного программирования.*

Чтобы решить задачу симплексным методом, необходимо выполнить следующие действия:

1. Привести задачу к каноническому виду.

2. Найти начальное опорное решение с "единичным базисом" (если опорное решение отсутствует, то задача не имеет решения ввиду

несовместимости. Привести системы ограничений).

3. Вычислить оценки разложений векторов по базису опорного решения и заполнить таблицу симплексного метода.

4. Если выполняется признак единственности оптимального решения, то решение задачи заканчивается.

5. Если выполняется условие существования множества оптимальных решений, то путем простого перебора находят все оптимальные решения.

Приводим задачу к каноническому виду.

Для этого в левую часть первого ограничения-неравенства вводим дополнительную переменную x_6 с коэффициентом +1. В целевую функцию переменная x_6 входит с коэффициентом ноль (т.е. не входит).

Получаем:

$$Z(x) = 9x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 0x_6 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_6 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 24, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_5 = 30, \end{cases}$$

$$x_i \ge 0, \ \forall i.$$

Находим начальное опорное решение. Для этого свободные (неразрешенные) переменные приравниваем к нулю: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Получаем опорное решение X1=(0,0,0,24,30,6) с единичным базисом Б1=(A_4, A_5, A_6).

Составляем симплексную табл. 6. В столбец A_0 записывается правая часть ограничений. С правой стороны записываются коэффициенты ограничений. Последняя строка - это целевая функция, умноженная на -1:

Таблица 6

Б	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	min
A_6	6	1	-2	2	0	0	1	
A_4	24	1	2	*1*	1	0	0	
A_5	30	2	1	*-4*	0	1	0	
	0	-9	-5	*-4*	-3	-2	0	

Базисные векторы A_6, A_4, A_5 следовательно, все элементы в столбцах A_6, A_4, A_5 ниже горизонтальной линии должны быть нулевыми.

Обнулим все элементы столбца A_4, кроме ведущего элемента. Для этого сложим строку 4 со строкой 2, умноженной на 3. Обнулим все элементы столбца A_5, кроме ведущего элемента. Для этого сложим строку 4 со строкой 3, умноженной на 2.

Симплекс - таблица примет вид (табл. 7):

Таблица 7

Б	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	Min
A_6	6	1	-2	**2**	0	0	1	3
A_4	24	1	2	*1*	1	0	0	24
A_5	30	2	1	*-4*	0	1	0	-
	132	-2	3	*-9*	0	0	0	

В первом столбце "Б" записываются векторы, входящие в базис опорного решения. Порядок записи этих векторов соответствует номерам разрешенных неизвестных в уравнениях-ограничениях. В последней строке таблицы в столбце "A_0" записываются значения целевой функции на опорном решении $Z(x_1)$.

Начальное опорное решение не является оптимальным, так как в задаче на максимум коэффициенты в 4 строке для векторов A_1 и A_3 отрицательные.

По теореме об улучшении опорного решения, если в задаче на максимум хотя бы один вектор имеет отрицательную оценку, то можно найти новое опорное решение, на котором значение целевой функции будет больше.

В качестве ведущего столбца выберем столбец A_3, так как среди коэффициентов в последней строке, по модулю, наибольшим является число 9, max(2,3,9)=9, значит, в базис входит вектор A_3. В качестве ведущей строки выберем строку 1, так как наименьшее из отношений элементов сводного столбца к соответствующим элементам ведущему столбца является 3, min (6/2,24/3,-)=3, значит из базиса выходит A_6. Заметим, что при делении положительного элемента на отрицательный получается бесконечность. На пересечении ведущей строки и ведущего столбца находится ведущий элемент, равный 2.

Обнулим все элементы этого столбца, кроме ведущего элемента. Для этого сложим строки 2, 3, 4 со строкой 1, умноженной на -1/2, 2, 9/2, соответственно. Далее делим строку с ведущим элементом на ведущий элемент. Симплекс-таблица примет следующий вид (табл. 8):

.. Таблица 8

Б	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	Min
A_3	3	1/2	-1	1	0	0	1/2	-
A_4	21	1/2	3	*0*	1	0	-1/2	9
A_5	42	4	-3	*0*	0	1	2	-
	159	5/2	-6	*0*	0	0	9/2	

Это решение не является оптимальным, так как вектор A_2 имеет отрицательное значение в 4 строке равное -6. Для улучшение решения необходимо ввести вектор A_2 в базис опорного решения.

В качестве ведущего столбца выберем столбец A_2, так как по модулю max(5/2,6)=6. В качестве ведущей строки выберем строку 2, так как min(-, 21/3, -)=7, заметим, что при делении положительного элемента на отрицательный получается бесконечность. На пересечении ведущей строки и ведущего столбца находится ведущий элемент, равный 3.

Обнулим все элементы этого столбца, кроме ведущего элемента. Для этого сложим строки 1, 3, 4 со строкой 2, умноженной на 1/3, 1, 2, соответственно. Далее делим строку с ведущим элементом на ведущий элемент.

Симплекс-таблица примет следующий вид (табл. 9):

Таблица 9

Б	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	min
A_3	10	2/3	0	1	1/3	0	1/3	-
A_2	7	1/6	1	*0*	1/3	0	-1/6	-
A_5	63	9/2	0	*0*	1	1	3/2	-
	201	7/2	0	*0*	2	0	7/2	

Это решение является единственным оптимальным, так как в последней строке нет отрицательных элементов.

Ответ: max $Z(X) = 201$ при $X = (0,7,10,0,63)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить задачу нахождения кратчайшего пути технологического маршрута, используя индивидуальные назначения на станки, а время выполнения операций подходящими станками и время транспортировки представлены в табл. 10.

Таблица 10

Задача №1							Задача №2					
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5			C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
Q_1	1	0	0	1	0		Q_1	0	1	0	1	0
Q_2	0	1	1	0	1		Q_2	1	0	1	0	1
Q_3	1	0	0	1	0		Q_3	0	1	0	1	0
Q_4	1	0	0	1	0		Q_4	0	1	0	1	0

2. Найти максимум целевой функции при заданных ограничениях

№1.
$$Z(x) = -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \le 16, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 42, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 36. \end{cases}$$
$$x_i \ge 0, \forall i$$

№2.
$$Z(x) = -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \le 9, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 29, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 39. \end{cases}$$
$$x_i \ge 0, \forall i$$

№3.
$$Z(x) = -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 \le 7, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 23, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 37. \end{cases}$$
$$x_i \ge 0, \forall i$$

№4.
$$Z(x) = 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 6, \\ x_2 + x_3 + x_5 = 19, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 33. \end{cases}$$
$$x_i \ge 0, \forall i$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №3

Задача №5

Задание. На одном станке можно обрабатывать 5 видов деталей, затрачивая при этом одинаковое время на обработку одной детали каждого вида. В таблице 11 задана длительность переналадки станка для обработки j–й детали после i–й детали, $i = \overline{1,5}$, $j = \overline{1,5}$. Требуется найти последовательность обработки деталей, имеющую минимальную суммарную длительность переналадки.

Таблица 11

i	*j*				
	1	2	3	4	5
1	∞	10	25	25	10
2	1	∞	10	15	2
3	8	9	∞	20	10
4	14	10	24	∞	15
5	10	8	25	27	∞

Решение. Выберем произвольно допустимый маршрут: X: 1→2→3→4→5→1. Длина маршрута X составит $L(X)$ = 10 + 10 + 20 + 15 + 10 = 65. Будем считать, что начальный рекорд R^0=65.

Приведем матрицу временных затрат. Для этого вычтем из каждой строке минимум по данной строке, а затем из каждого столбца вычтем минимум по данному столбцу. Получим следующие матрицы:

$$C=\begin{pmatrix} \times & 10 & 25 & 25 & 10 \\ 1 & \times & 10 & 15 & 2 \\ 8 & 9 & \times & 20 & 10 \\ 14 & 10 & 24 & \times & 15 \\ 10 & 8 & 25 & 27 & \times \end{pmatrix} \Rightarrow C^{стр}=\begin{pmatrix} \times & 0 & 15 & 15 & 0 \\ 0 & \times & 9 & 14 & 1 \\ 0 & 1 & \times & 12 & 2 \\ 4 & 0 & 14 & \times & 5 \\ 2 & 0 & 17 & 19 & \times \end{pmatrix} \Rightarrow C^{0}=\begin{pmatrix} \times & 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & \times & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \times & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 5 & \times & 5 \\ 2 & 0 & 8 & 7 & \times \end{pmatrix}.$$

Сумма минимумов по строкам и столбцам называется суммой приводящих констант и образует оценку исходного множества решений Ω^0 (длины всех имеющихся маршрутов не превосходят оценки $\xi(\Omega^0)=10+1+8+10+8+9+12=58$).

Вычислим «штрафы» для всех нулевых элементов матрицы C^0, каждый из которых равен сумме минимальных элементов строки и столбца, на пересечении которых находится нулевой элемент:

$Q(1,2)=0$; $Q(1,5)=1$; $Q(2,1)=0$; $Q(2,3)=5$;
$Q(3,1)=0$; $Q(3,4)=2$; $Q(4,2)=4$; $Q(5,2)=2$.

Выберем нулевой элемент с максимальным «штрафом»: $(q,r)=(2,3)$.

Разобьем исходное множество допустимых маршрутов на два подмножества по двум альтернативным условиям:

$x_{23}=1$ - ребро 2→3 обязательно войдет в искомый маршрут и
$x_{23}=0$ - ребро 2→3 точно не войдет в искомый маршрут.

Оценка множества Ω_2^1 равна сумме $\xi(\Omega^0)$ и $Q(2,3)$. Имеем $\xi(\Omega_2^1)$=63.

Оценка множества Ω_1^1 равна сумме $\xi(\Omega^0)$ и приводящих констант матрицы C_1^1, характеризующей множество Ω_1^1. Матрица C_1^1 получается из матрицы C^0 вычеркиванием 2-й строки и 3-го столбца и имеет вид:

$$C_1^1=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \times & 0 & 3 & 0 \\ 0 & \times & 0 & 2 \\ 4 & 0 & \times & 5 \\ 2 & 0 & 7 & \times \end{pmatrix} \end{array}.$$

В матрице C_1^1 принудительно блокируем $\times$ элемент 3→2 в силу выполнения требования отсутствия подциклов.

Так как матрица C_1^1 сразу получилась приведенной, то для нее сумма приводящих констант равна нулю. $\xi(\Omega_1^1)$=58.

В соответствии со стратегией по минимуму оценки дальнейшему ветвлению подлежит множество Ω_1^1.

В результате операции «штрафования» нулей определим пару $(q,r)=(4,2)$ с наибольшей оценкой $Q(4,2)=4$.

Множество Ω_1^1 разветвим на два подмножества по двум альтернативным условиям:

$x_{42}=1$ - ребро 4→2 обязательно войдет в искомый маршрут и

$x_{42}=0$ - ребро 4→2 точно не войдет в искомый маршрут.

Оценка множества Ω_2^2 равна сумме $\xi(\Omega_1^1)$ и $Q(4,2)$. Имеем $\xi(\Omega_2^2)$=62.

Для оценки альтернативного множества Ω_1^2 составим матрицу C_1^2, которая получается из матрицы C_1^1 вычеркиванием 4-й строки и 2-го столбца.

$$C_1^2 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \times & 3 & 0 \\ 0 & \times & 2 \\ 2 & 7 & \times \end{pmatrix} \end{array}$$

В матрице C_1^2 необходимо заблокировать элемент 3→4, чтобы не появился подцикл в формирующемся маршруте 4→2→3.

Сумма приводящих констант для матрицы C_1^2 равна 5. Поэтому $\xi(\Omega_1^2)$ = =58+ 5 = 63.

В соответствии со стратегией по минимуму оценки дальнейшему ветвлению подлежит множество Ω_2^2. Матрица C_2^2 множества Ω_2^2 получается из матрицы C_1^1 блокировкой маршрута 4→2 и имеет вид:

$$C_2^2 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \times & 0 & 3 & 0 \\ 0 & \times & 0 & 2 \\ 4 & \times & \times & 5 \\ 2 & 0 & 7 & \times \end{pmatrix} \end{array}.$$

После операции приведения матрица C_2^2 выглядит так:

$$C_2^2 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \times & 0 & 3 & 0 \\ 0 & \times & 0 & 2 \\ 0 & \times & \times & 1 \\ 2 & 0 & 7 & \times \end{pmatrix} \end{array}.$$

Сумма приводящих констант для матрицы C_2^2 равна 4. Поэтому $\xi(\Omega_2^2)$ = =58 + 4 = 62.

В результате операции «штрафования» нулей определим пару для дальнейшего ветвления $(q,r)=(3,4)$ с наибольшей оценкой $Q(3,4)=3$.

Множество Ω_2^2 разделим на два подмножества по двум альтернативным условиям:

$x_{34}=1$ - ребро 3→4 обязательно войдет в искомый маршрут и

$x_{34}=0$ - ребро 3→4 точно не войдет в искомый маршрут.

Оценивая множества Ω_1^3 и Ω_2^3, получим $\xi(\Omega_1^3)$ = 62 и $\xi(\Omega_2^3)$ = 65.

Дальнейшему ветвлению подлежит множество Ω_1^3, матрица которого имеет вид:

$$C_1^3 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \times & 0 & 0 \\ 0 & \times & 1 \\ 2 & 0 & \times \end{pmatrix} \end{array}.$$

В матрице C_1^3 необходимо заблокировать элемент 4→2, чтобы не появился подцикл в формирующемся маршруте 2→3→4.

В результате операции «штрафования» нулей определим пару для дальнейшего ветвления $(q,r)=(4,1)$ с наибольшей оценкой $Q(4,1)=3$.

Множество Ω_1^3 разделим на два подмножества по двум альтернативным условиям:

$x_{41}=1$ - ребро 4→1 обязательно войдет в искомый маршрут и

$x_{41}=0$ - ребро 4→1 точно не войдет в искомый маршрут.

Оценивая множества Ω_1^4 и Ω_2^4, получим $\xi(\Omega_1^4)$ = 62 и $\xi(\Omega_2^4)$ = 65. Меньшую оценку имеет множество Ω_1^4, матрица C_1^4 которого имеет размер 2х2:

$$C_1^4 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 2 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \times & 0 \\ 0 & \times \end{pmatrix} \end{array}.$$

В матрице C_1^4 необходимо заблокировать элемент 1→2, чтобы не появился подцикл в формирующемся маршруте 2→3→4→1.

Нули в матрице C_1^4 определяют недостающие звенья маршрута. Собирая все звенья вместе, имеем маршрут: X^*: 5→2→3→4→1→5. Длина маршрута X^* составит $L(X^*)$ = 14 + 8 + 20 + 10 + 10 = 62. Получен новый рекорд R^1=62.

Так как оценки всех имеющихся подмножеств не меньше имеющегося рекорда, то их можно отбросить как неперспективные. Полученный маршрут является оптимальным.

Таким образом, искомая последовательность обработки деталей имеет вид $5 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1 \to 5$. Суммарные временные затраты при такой последовательности переналадки станка будут минимальны и составят 62 временные единицы.

Схема всех выполненных в процессе решения задачи ветвлений приведена на рис.3.

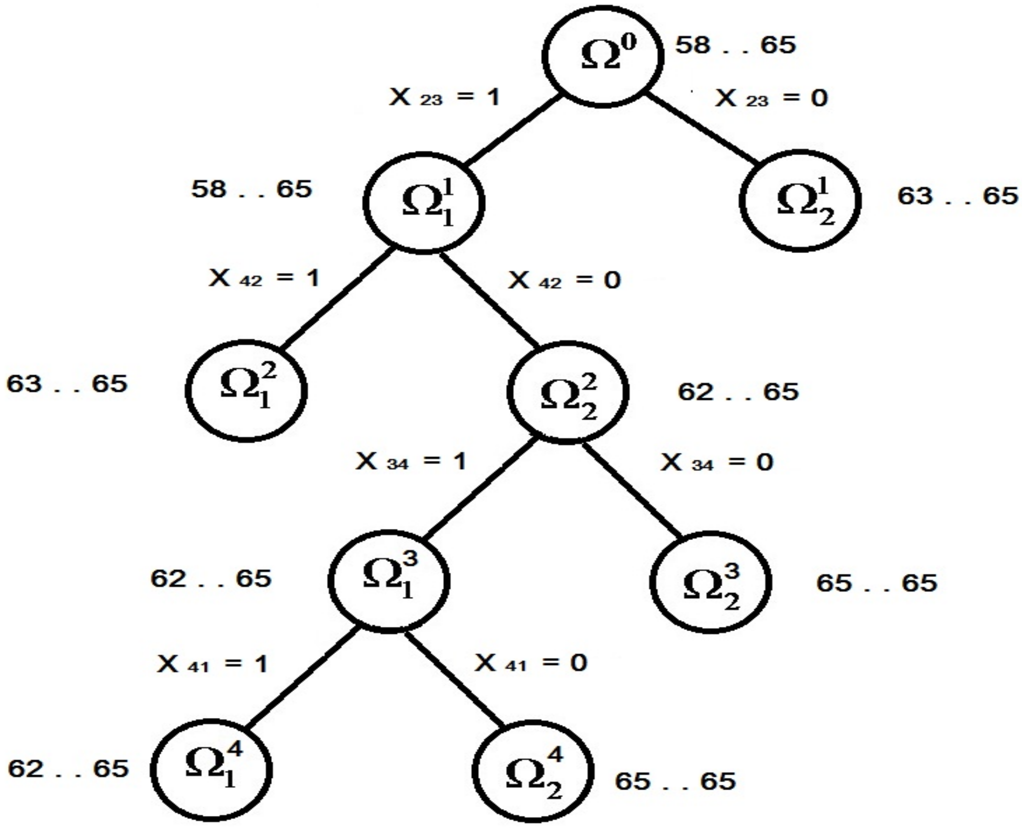

Рис. 3

Задачи для самостоятельного решения

1. На одном станке можно обрабатывать 5 видов деталей, затрачивая при этом одинаковое время на обработку одной детали каждого вида. В таблицах 12 задана длительность переналадки станка для обработки j–й детали после i–й

детали, $i=\overline{1,5}$, $j=\overline{1,5}$. Требуется найти последовательность обработки деталей, имеющую минимальную суммарную длительность переналадки.

Таблица 12

i	*j*				
	1	2	3	4	5
1	∞	11	18	25	18
2	22	∞	19	28	22
3	18	15	∞	11	18
4	25	19	16	∞	25
5	25	24	24	22	∞

i	*j*				
	1	2	3	4	5
1	∞	26	24	22	29
2	20	∞	29	27	20
3	25	14	∞	30	25
4	25	25	11	∞	25
5	14	10	17	29	∞

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. - М.: Издательский дом «ОНИКС 21 век». 2003. Ч. 2. 416 с.

2. Демидович Б. П. Основы вычислительной математики / Б. П. Демидович, И.А. Марон. – М: Наука, 1970. 664 с.

3. Воробьева Г.Н. Практикум по вычислительной математике / Г.Н. Воробьева, А.Н. Данилова. – М: Высш. шк., 1990. 207 с.

4. Вержбицкий В.М. Численные методы / В.М. Вержбицкий. – Высш. шк., 2001. 382 с.

5. Алексеев В.Е., Таланов В.А. Глава 3.4. Нахождения кратчайших путей в графе // Графы. Модели вычислений. Структуры данных. — Нижний Новгород: Издательство Нижегородского гос. университета, 2005. — С. 236—237. — 307 с. — ISBN 5–85747–810–8.

6. Галкина В.А. Глава 4. Построение кратчайших путей в ориентированном графе // Дискретная математика. Комбинаторная оптимизация на графах. — Москва: Издательство "Гелиос АРВ", 2003. — С. 75—94. — 232 с. — ISBN 5–85438–069–2.

7. Домнин Л.Н. Элементы теории графов : учеб. пособие / Л.Н. Домнин. – Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2007. - 144 с.

8. Васильков Ю.В. Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании / Ю.В. Васильков, Н.Н. Василькова. – Учеб. пособие - М.: Финансы и статистика, 2001 – 256 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Методические указания
к проведению практических занятий
для студентов направления 15.03.01
«Машиностроение»
заочной формы обучения

Составители:
Бырдин Аркадий Петрович
Сидоренко Александр Алексеевич

Компьютерный набор А.А. Сидоренко

В авторской редакции

Подписано 19.11.2021.

Уч.-изд. л. 1,5.

ФГБОУ ВО “Воронежский государственный технический университет”
394026 Воронеж, Московский просп., 14